

**THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY**

510
~~517~~
C126
v. 8

MATHEMATICS

9 Jgr. Phys. coll. ad. I. 29405
22. IX. 1892
Entwicklung

Entwicklung

eines

allgemeinen Gesetzes

der

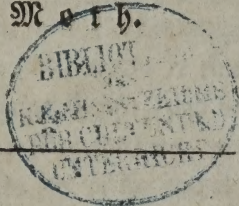
Umkehrung der Funktionen,

von welchem das

von La Grange entdeckte, und von La Place
verallgemeinerte Reversions- Theorem ein besonderer
Fall ist;

von

Franz Xav. Moth.



Für die Abhandlungen der Königl. böhm. Gesellschaft der
Wissenschaften.

Prag 1829.

Gedruckt bei Gottlieb Haase Söhne.

$$(a) \quad 1 = a$$

I. Eines der wichtigsten Hilfsmittel, welche zur Bestimmung der Funktionen dienen, ist bekanntlich ihre Darstellung durch unendliche Reihen; aber die Lösung dieser Aufgabe erfordert nicht selten die feinsten Kunstgriffe der höheren Analysis. Unter den Formen der eine Funktion darstellenden Reihen sind diejenigen die einfachsten und zugleich merkwürdigsten, deren Glieder nach den Potenzen eines der Bestandtheile α einer Funktion fortschreiten, oder die sämmtlich unter der Gestalt $A. \alpha^m$ enthalten sind, worin A eine von dem Bestandtheile α unabhängige GröÙe, und m eine ganze positive Zahl ist. Zur Beurtheilung, ob eine Funktion in eine nach Potenzen der in ihr enthaltenen GröÙe α mit ganzen positiven Exponenten fortschreitende Reihe entwickelt werden könne, dient der sehr einfache Grundsatz, daß, wenn die Werthe der Funktion von α und die aller ihrer abgeleiteten, in Bezug auf diese GröÙe genommen, für $\alpha = 0$ nicht unendlich groß werden, ihre Darstellung in eine Reihe

von der erwähnten Form immer möglich sey; daß aber im entgegengesetzten Falle die ursprüngliche Funktion $f(\alpha)$ eine solche Darstellung nicht gestatte.

Wenn also

$$u = F(\alpha)$$

eine Größe ist, deren Abhängigkeit von α auf was immer für eine Art gegeben seyn mag, und wenn man versichert ist, daß alle abgeleiteten Funktionen $F'(\alpha)$, $F''(\alpha)$, . . . so wie die ursprüngliche $F(\alpha)$ für $\alpha = 0$ nicht unendlich groß werden, oder daß die Größen $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$, . . . endliche Werthe haben; so wird man hieraus schließen können, daß sich $F(\alpha)$ in eine Reihe von der Form:

$$\{ u_0 + u_1 \cdot \alpha + u_2 \cdot \alpha^2 + u_3 \cdot \alpha^3 + \dots \}$$

werde entwickeln lassen, in welcher Reihe kein Glied vorkommt, worin der Exponent von α eine negative oder gebrochene Zahl wäre.

2. Wir wollen jetzt die Reihe von der eben angegebenen Form betrachten, in welche sich die Funktion u entwickeln läßt, und das Gesetz untersuchen, nach welchem man in einem solchen Falle die von α unabhängigen Coefficienten u_0 , u_1 , u_2 , . . . bestimmen könne.

Es ist klar, daß, wenn:

$$u = u_0 + u_1 \cdot \alpha + u_2 \cdot \alpha^2 + u_3 \cdot \alpha^3 + \dots \quad (1)$$

die Größe u_0 der Werth von $u = F(\alpha)$ für $\alpha = 0$ ist. Wenn man die Gleichung (1) nach α differenziert; so wird man erhalten:

$$\left(\frac{d u}{d \alpha}\right) = u_1 + 2u_2 \cdot \alpha + 3 u_3 \cdot \alpha^2 + \dots \quad (2)$$

Setzt man in dieser Gleichung $\alpha = 0$, und deutet man den Werth der Funktion, oder des partiellen Differenzials $\left(\frac{d u}{d \alpha}\right)$ für diesen Werth von α durch

$\left(\frac{d u}{d \alpha}\right)_0$ an; so gibt die Gleichung (2) unmittelbar:

$$u_1 = \left(\frac{d u}{d \alpha}\right)_0$$

Nimmt man von der letzten Gleichung (2) auf beiden Seiten derselben wieder das erste Differenzial nach α , und setzt hierauf in der erhaltenen Gleichung $\alpha = 0$; so wird man haben:

$$u_2 = \frac{\left(\frac{d^2 u}{d \alpha^2}\right)_0}{1 \cdot 2}$$

Diese Schlüsse wird man nun soweit als man will fortsetzen können; so daß man erhalten wird:

$$u_3 = \frac{\left(\frac{d^3 u}{d \alpha^3}\right)_0}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

$$u_4 = \frac{\left(\frac{d^4 u}{d \alpha^4}\right)_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4};$$

und überhaupt:

$$u^n = \left\{ \frac{\left(\frac{d^n u}{d \alpha^n}\right)_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \right\}.$$

3. Ist u eine Funktion mehrerer von einander unabhängiger Größen, wie $\alpha' \alpha'' \alpha''' \dots$; und gestattet diese Funktion eine Entwicklung in eine Reihe nach Potenzen und Produkten der Größen $\alpha' \alpha'' \alpha''' \dots$ mit ganzen positiven Exponenten; so wird der Coefficient des Productes:

$$\left(\alpha'^m \cdot \alpha''^n \cdot \alpha'''^p \dots \right)$$

in dieser Reihe der Werth der Funktion:

$$\frac{\left(\frac{d^{m+n+p+\dots} u}{d \alpha'^m \cdot d \alpha''^n \cdot d \alpha'''^p \dots} \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p \dots}$$

seyn, wenn man nach geschehener Differenzirung setzt:

$$\alpha' = 0; \alpha'' = 0; \alpha''' = 0; \dots$$

Auf diesem für die Verwandlung der Funktionen in unendliche Reihen so wichtigen Satze, der von seinem Erfinder *Maclaurin* auch den Namen führt,

muß nun jede Entwicklung einer Funktion in eine unendliche Reihe von der, in der Rede stehenden Form beruhen; und man sieht, daß die Auflösung des Problems, eine Funktion u , diese mag selbst auf was immer für eine Art bestimmt und gegeben seyn, in eine entsprechende unendliche Reihe zu verwandeln, durch diesen Grundsatz darauf zurückgeführt worden ist, die Werthe der ursprünglichen und ihrer abgeleiteten Funktionen in den besonderen Fällen zu bestimmen, da die Veränderlichen gleich Null gesetzt werden.

4. Zuweilen hängt α auf eine gewisse Art wieder von einer andern Größe i und zwar so ab, daß

$$\alpha = (a_1 \cdot i + a_2 \cdot i^2 + a_3 \cdot i^3 + \dots)$$

worin aber $a_1 \ a_2 \ a_3 \dots$ von i und α wieder unabhängig sind; und u ist eine Funktion von α , welche für $\alpha = 0$ nicht unendlich wird, und deren abgeleitete Funktionen für $\alpha = 0$ gleichfalls nicht unendlich werden; so wird man die Funktion u in eine nach den Potenzen von i fortschreitende Reihe verwandeln können; so zwar, daß:

$$u = U_0 + U_1 \cdot i + U_2 \cdot i^2 + U_3 \cdot i^3 + \dots \quad (1)$$

In diesem Falle wird man das Gesetz zur Bestimmung der von i und α unabhängigen Coefficienten $U_0 \ U_1 \ U_2 \dots$ eben so leicht, wie Art. 3 finden können.

Setzt man $i = 0$ in der Gleichung (1); so zeigt dieselbe, daß U_0 der Werth von u für $i = 0$ ist.

Differenziert man nun die Gleichung (1) nach i , und bemerkt, daß u eine Funktion von α , und α eine Funktion von i ist; so wird man haben:

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right) \left(\frac{d\alpha}{di}\right) = U_1 + 2 \cdot U_2 \cdot i + 3 \cdot U_3 \cdot i^2 + \dots$$

Der Kürze wegen wollen wir den Theil linker Hand des Gleichheitszeichens mit $\overset{I}{A}$ bezeichnen; so daß man habe:

$$\overset{I}{A} = U_1 + 2 U_2 \cdot i + 3 U_3 \cdot i^2 + \dots \quad (2)$$

Es ist klar, daß U_1 wieder der Werth der Funktion $\overset{I}{A}$ für $\alpha = 0$ und $i = 0$ seyn werde, den wir durch $\overset{I}{A}_0$ kurz andeuten wollen. Es ist daher:

$$U_1 = \overset{I}{A}_0.$$

Nimmt man von der Gleichung (2) wieder das Differenzial nach i , und bemerkt, daß $\overset{I}{A}$ eine Funktion sowohl von α als i ist; so wird man haben:

$$\begin{aligned} \overset{I}{A}' &= \left[\left(\frac{d\overset{I}{A}}{d\alpha} \right) \cdot \left(\frac{d\alpha}{di} \right) + \left(\frac{d\overset{I}{A}}{di} \right) \right] \\ &= 1 \cdot 2 \cdot U_2 + 2 \cdot 3 \cdot U_3 \cdot i + \dots \end{aligned}$$

Setzt man in dieser Gleichung $i = 0$ und $\alpha = 0$; so schließt man, daß :

$$U_2 = \frac{\overset{2}{A}_0}{1 \cdot 2}$$

seyn werde.

Die folgende von dieser letztern abgeleitete Gleichung wird seyn :

$$\begin{aligned} \overset{3}{A} &= \left[\left(\frac{d\overset{2}{A}}{d\alpha} \right) \cdot \left(\frac{d\alpha}{di} \right) + \left(\frac{d\overset{2}{A}}{di} \right) \right] \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot U_3 + \dots \end{aligned}$$

und hieraus ist :

$$U_3 = \frac{\overset{3}{A}_0}{1 \cdot 2 \cdot 3} .$$

Diese Schlußreihe kann man fortsetzen, so weit man will, und man wird auf diese Art sehr leicht die Coefficienten $U_0 \ U_1 \ U_2 \dots$ der obigen Reihe für u erhalten.

5. Ist hingegen u eine Funktion von i , die für $i = 0$ nicht unendlich wird, und deren abgeleitete Funktionen für $i = 0$ gleichfalls endliche Werthe erhalten; und besteht zwischen α und i die nämliche Verbindung, als im vorigen Art.; so wird man die Funktion u in eine nach den Potenzen von α fortschreitende Reihe verwandeln können. Ist also :

$$u = V_0 + V_1 \cdot \alpha + V_2 \cdot \alpha^2 + V_3 \cdot \alpha^3 + \dots \quad (1)$$

die gedachte Reihe; so wird das Entwicklungsgesetz zu der Bestimmung der Coefficienten $V_0 V_1 V_2 \dots$ durch ein dem vorigen analoges Verfahren erhalten werden. Es ist klar, daß V_0 der Werth der Funktion u für $i = 0$ ist. Differenziert man die Gl. (1) nach i ; so hat man:

$$\frac{\left(\frac{d}{d i}\right)}{\left(\frac{d}{d i}\right)} = \overset{1}{J} = V_1 + 2 \cdot V_2 \cdot \alpha + 3 V_3 \cdot \alpha^2 + \dots \quad (2)$$

Bedeutet $\overset{1}{J}_0$ den Werth der Funktion $\overset{1}{J}$ für $i = 0$ und $\alpha = 0$; so hat man:

$$V_1 = \overset{1}{J}_0.$$

Differenziert man die Gl. (2) wieder nach i ; so hat man:

$$\frac{\left(\frac{d}{d i}\right)}{\left(\frac{d}{d i}\right)} = \overset{2}{J} = 1 \cdot 2 V_2 + 2 \cdot 3 \cdot V_3 \cdot \alpha + \dots,$$

und hieraus, wie vorher:

$$V_2 = \frac{\overset{1}{J}_0}{1 \cdot 2}.$$

Setzt man sofort wieder:

$$\frac{\left(\frac{d^2 J}{d i^2}\right)}{\left(\frac{d \alpha}{d i}\right)} = J^3;$$

so wird man erhalten :

$$V_3 = \frac{J_0^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Diese Schlüsse lassen sich wieder, soweit als man will fortsetzen, und man wird auf diese Art zu allen Werthen der folgenden Coefficienten $V_4 V_5 \dots$ gelangen.

II.

6. Wir wollen nun einen sehr ausgebreiteten Fall betrachten, welcher ebenderselbe ist, welcher auf dem Titelblatte zu dieser Abhandlung angezeigt wird. Sind $f_1(x); f_2(x); f_3(x); \dots$ gegebene Funktion von x , statt deren wir uns auch der einfachern Bezeichnungen $z_1 z_2 z_3 \dots$ bedienen wollen; und besteht zwischen den Größen x und α die Funktionalgleichung :

$$x = \varphi \left[t + \alpha z_1 + \alpha^2 \cdot z_2 + \alpha^3 \cdot z_3 + \dots \right] \dots (I)$$

in welcher φ gleichfalls eine gegebene Funktion von bekannter Form bedeutet, und worin α und t von einander unabhängig gesetzt werden; denkt man sich end-

lich die Größe x aus der Gleichung (I) durch die übrigen noch darin sich befindlichen Größen ausgedrückt, und in die Funktion $\Psi(x)$, welche wir u nennen wollen, gesetzt; so wird man dieselbe in eine nach Potenzen von α mit ganzen positiven Exponenten fortschreitende Reihe von der Form:

$$u = \chi(t) + \alpha \cdot \chi_1(t) + \alpha^2 \cdot \chi_2(t) + \alpha^3 \cdot \chi_3(t) + \dots$$

darstellen können, in welcher Reihe die Coefficienten dieser Potenzen von α , nämlich $\chi(t)$; $\chi_1(t)$; $\chi_2(t)$; α . Funktionen von t sind, die nach einem einfachen Gesetze aus den Funktionen z_1, z_2, z_3, \dots φ und Ψ hergeleitet werden können, dessen Auffindung eben der Gegenstand der gegenwärtigen Untersuchung ist.

Ehe wir uns aber in diese Untersuchung einlassen, wollen wir uns eine andere Gleichung verschaffen, welche die Stelle der Gleichung (I) vertreten kann, und welche das Funktionalzeichen nicht enthält. Diese Verwandlung der gedachten Gleichung (I) läßt sich mittelst partieller Differenzialien sehr leicht bewerkstelligen.

Da nämlich:

$$\left(\frac{dx}{d\alpha}\right) = \varphi' \left[t + \alpha z_1 + \alpha^2 z_2 + \dots \right];$$

und

$$\left(\frac{dx}{d\alpha}\right) = \left[z_1 + 2\alpha \cdot z_2 + 3\alpha^2 \cdot z_3 + \dots \right] \cdot \varphi' \left[t + \alpha z_1 + \alpha^2 z_2 + \dots \right];$$

so gibt die Eliminirung der Funktion φ' aus diesen zwei Gleichungen:

$$\left(\frac{d x}{d \alpha}\right) =$$

$$\left[z_1 + 2 \alpha . z_2 + 3 \alpha^2 . z_3 + \dots\right] . \left(\frac{d x}{d u}\right); \dots (2)$$

und dieser Gleichung kann man sich ebenso, wie der Gleichung (1), von welcher sie das Integral ist, bedienen.

7. Weil u eine gegebene Funktion von x ist, welche wir in eine von α und t verwandeln sollen; so läßt sich u , mit Rücksicht auf die Gl. (1) oder (2) des vorigen Art. als eine solche betrachten. Da nun unter dieser Voraussetzung:

$$\left(\frac{d u}{d \alpha}\right) = \left(\frac{d u}{d x}\right) \left(\frac{d x}{d \alpha}\right),$$

oder, wenn man die Entwicklung von $\left(\frac{d x}{d \alpha}\right)$ aus Gl. (2) gebraucht, da:

$$\left(\frac{d u}{d \alpha}\right) =$$

$$\left[z_1 + 2 \alpha z_2 + 3 \alpha^2 . z_3 + \dots\right] . \left(\frac{d u}{d x}\right) \left(\frac{d x}{d t}\right);$$

so erhält man hieraus wegen:

$$\left(\frac{d u}{d x}\right) \left(\frac{d x}{d t}\right) = \left(\frac{d u}{d t}\right),$$

die Gleichung:

$$\left(\frac{d u}{d \alpha}\right) = \left[z_1 + 2 \alpha . z_2 + 3 \alpha^2 . z_3 + \dots \right] \cdot \left(\frac{d u}{d t}\right).$$

Man bemerke hier, daß, weil man $\left(\frac{d u}{d t}\right)$ bloß in Rücksicht auf die von α unabhängige GröÙe t zu nehmen habe, und weil $z_1 z_2 z_3 \dots$ Funktionen nur von x ohne t sind; für $z_1 \cdot \left(\frac{d u}{d t}\right)$; $z_2 \cdot \left(\frac{d u}{d t}\right)$; u. s. w. geschrieben werden könne: $\left(\frac{z_1 \cdot d u}{d t}\right)$, $\left(\frac{z_2 \cdot d u}{d t}\right)$; und man wird an der Stelle der letzten Gleichung folgende haben:

$$\left(\frac{d u}{d \alpha}\right) = \left[\left(\frac{z_1 \cdot d u}{d t}\right) + 2 \alpha \cdot \left(\frac{z_2 \cdot d u}{d t}\right) + 3 \alpha^2 \cdot \left(\frac{z_3 \cdot d u}{d t}\right) + \dots \right],$$

oder endlich, wenn man, um abzukürzen, schreibt:

$$\left(\frac{d u}{d t}\right) = v;$$

die nachstehende:

$$\left(\frac{d u}{d \alpha}\right) = \left[(z_1 \cdot v) + 2 \alpha \cdot (z_2 \cdot v) + 3 \alpha^2 \cdot (z_3 \cdot v) + \dots \right]$$

Wir wollen uns im Verfolge dieser Abhandlung, um die Rechnung mit größerer Leichtigkeit überblicken zu können, folgender Schreibart bedienen:

$$(z_p \cdot v) = (p); \dots (a)$$

Unter dieser Voraussetzung wird nun die letzte Gleichung auf folgende Art geschrieben werden können:

$$\left(\frac{d u}{d \alpha} \right) = \left\{ (1) + 2 \alpha \cdot (2) + 3 \alpha^2 \cdot (3) + \dots \right\}; (A)$$

Da dieser Gleichung die Voraussetzung zu Grunde liegt, daß α eine Funktion von x ist, ohne daß die Form dieser Funktion näher angegeben sey; so ist sie auf jede Funktion, die statt u gesetzt wird, anwendbar.

8. Differenziert man jetzt die Gleichung (A) nach α ; so wird man zunächst folgende erhalten:

$$\left(\frac{d^2 u}{d \alpha^2} \right) = \left\{ \begin{aligned} & \left[\left(\frac{d(1)}{d \alpha} \right) + 2 \alpha \cdot \left(\frac{d(2)}{d \alpha} \right) + 3 \alpha^2 \cdot \left(\frac{d(3)}{d \alpha} \right) + \dots \right] \\ & \left[2(2) + 2 \cdot 3 \alpha (3) + 3 \cdot 4 \cdot \alpha^2 \cdot (4) + \dots \right] \end{aligned} \right\}$$

In diesem Ausdrucke kommen Glieder von der Form:

$$\left(\frac{d(p)}{d \alpha} \right)$$

vor, welche wir weiter entwickeln wollen. In dieser Absicht bemerke ich, daß:

$$\left(\frac{d(I)}{d\alpha}\right) = \left(\frac{d \cdot (z_I \cdot v)}{d\alpha}\right) = \left(\frac{d(z_I \cdot du)}{d\alpha \cdot dt}\right) \text{ sey.}$$

Die Entwicklung dieses Gliedes läßt sich unmittelbar aus der Gleichung (A) entnehmen, indem dieselbe, wie schon bemerkt worden ist, für jede Funktion Statt hat, die man an die Stelle von u bringt, und welche also, in dem gegenwärtigen Falle, wo nur $z_I \cdot v$ anstatt u , also $z_I \cdot du$ anstatt du zu setzen ist, (wobei die Differenzirung bloß in Rücksicht auf t zu geschehen hat), geben wird:

$$\left(\frac{d(I)}{d\alpha}\right) = \left\{ \left(\frac{z_I \cdot d(z_I \cdot v)}{dt}\right) + 2\alpha \left(\frac{z_2 \cdot d(z_I \cdot v)}{dt}\right) + 3\alpha^2 \cdot \left(\frac{z_3 \cdot d(z_I \cdot v)}{dt}\right) + \dots \right\};$$

und da man aus einem gleichen Grunde, wie vorher für

$$\left(\frac{z_I \cdot d(z_I \cdot v)}{dt}\right) \text{ schreiben kann } \left(\frac{d \cdot (z_I^2 \cdot v)}{dt}\right);$$

u. s. f. weil sich die Differentiation nur auf die Veränderliche t erstreckt, welche in v enthalten ist; so wird man, wenn man alle Glieder dieser Reihe reduzirt, erhalten:

$$\left[\left(\frac{d(I)}{d\alpha}\right) = \left[\left(\frac{d(z_I^2 \cdot v)}{dt}\right) + 2\alpha \cdot \left(\frac{d(z_I \cdot z_2 \cdot v)}{dt}\right) + 3\alpha^2 \cdot \left(\frac{d(z_I \cdot z_3 \cdot v)}{dt}\right) \dots \right] \right]$$

Schreibt man wieder abkürzend :

$$\left(\frac{d(z_p \cdot z_q \cdot v)}{d t} \right) = (p, q); \dots (b)$$

so wird man die vorhergehende Reihe so ausdrücken können :

$$\left(\frac{d (1)}{d \alpha} \right) =$$

$$\{(1, 1) + 2\alpha \cdot (1, 2) + 3\alpha^2 \cdot (1, 3) + 4\alpha^3 \cdot (1, 4) \dots\}$$

Durch ähnliche Schlüsse findet man :

$$\left(\frac{d (2)}{d \alpha} \right) =$$

$$\{(2, 1) + 2\alpha \cdot (2, 2) + 3\alpha^2 \cdot (2, 3) + 4\alpha^3 \cdot (2, 4) \dots\}$$

$$\left(\frac{d (3)}{d \alpha} \right) =$$

$$\{(3, 1) + 2\alpha \cdot (3, 2) + 3\alpha^2 \cdot (3, 3) + 4\alpha^3 \cdot (3, 4) \dots\}$$

und überhaupt hat man :

$$\left(\frac{d (p)}{d \alpha} \right) =$$

$$\{(p, 1) + 2\alpha \cdot (p, 2) + 3\alpha^2 \cdot (p, 3) + 4\alpha^3 \cdot (p, 4) \dots\},$$

in welcher Reihe das Gesetz ihrer Glieder an sich klar ist. Bringt man jetzt diese Entwicklungen in

den obigen Ausdruck für $\left(\frac{d^2 u}{d \alpha^2} \right)$; so wird man er-

halten:

$$\left(\frac{d^2 u}{d \alpha^2}\right) =$$

$$(1,1) + 2 \alpha \cdot (1,2) + 3 \alpha^2 \cdot (1,3) + 4 \alpha^3 \cdot (1,4) + \dots$$

$$+ 2 \alpha \cdot (2,1) + 4 \alpha^2 \cdot (2,2) + 6 \alpha^3 \cdot (2,3) + \dots$$

$$+ 3 \alpha^2 \cdot (3,1) + 6 \alpha^3 \cdot (3,2) + \dots$$

$$+ 4 \alpha^3 \cdot (4,1) + \dots$$

$$+ \dots$$

$$+ 2 (2) + 6 \alpha (3) + 12 \alpha^2 (4) + 20 \alpha^3 (5) + \dots$$

und nach Vereinigung der gleichartigen Glieder dieser Reihe ergibt sich endlich:

$$\left(\frac{d^2 u}{d \alpha^2}\right) =$$

$$\left\{ (1,1) + 2 (2) \right\}$$

$$+ \alpha \cdot \left\{ 4 (1,2) + 6 (3) \right\}$$

$$+ \alpha^2 \cdot \left\{ 6 (1,3) + 4 (2,2) + 12 (4) \right\}$$

$$+ \alpha^3 \cdot \left\{ 8 (1,4) + 12 (2,3) + 20 (5) \right\}$$

$$+ \alpha^4 \cdot \left\{ 10 (1,5) + 8 (2,4) + 9 (3,3) + 30 (6) \right\}$$

$$+ \dots$$

wofür abkürzungsweise gesetzt werden soll:

$$\left(\frac{d^2 u}{d \alpha^2}\right) =$$

$$\left\{ \sum_2 + \alpha \cdot \sum_3 + \alpha^2 \cdot \sum_4 + \dots \alpha^\lambda \cdot \sum_{\lambda+2} + \dots \right\} (B).$$

in welcher Reihe durch das Symbol $\sum_{\lambda+2}^2$ überhaupt die Summe aller Glieder angezeigt wird, welche den Coefficienten von α^λ in der Entwicklung $\left(\frac{d^2 u}{d\alpha^2}\right)$ ausmachen.

Obgleich hier vorausgesetzt wurde, daß die Funktionen u, z_1, z_2, z_3, \dots die Größe t nicht enthalten, sondern bloße Funktionen von x sind, welche aber insofern erst Funktionen von t werden, inwiefern x eine Funktion von t wird; so kann man größerer Allgemeinheit wegen doch auch annehmen, daß u und z die Veränderliche t auch in sich schließen. In diesem Falle muß man aber die Größe t bei den vorkommenden Differenzirungen, welche in der Absicht zu geschehen haben, um die in den Größen $\sum_2^2, \sum_3^2, \dots$ enthaltene Glieder zu bestimmen, als beständig ansehen; in welcher Absicht man sie vor der Differenzirung mit t_0 bezeichnen könnte, um sie von dem ersten Gliede t der gegebenen Funktionalgleichung zu unterscheiden, und nach diesen Operationen hat man wieder t an die Stelle von t_0 zu setzen.

Die Glieder, aus welchen die Coefficienten $\sum_2^2, \sum_3^2, \dots$ der Potenzen von α in der Reihe (B) zusammengesetzt sind, lassen sich nach einem einfachen Gesetze sehr leicht finden. Jedes Glied (p) dieser Entwicklungsreihe hat den Coefficienten $p \cdot (p-1)$ vor sich, wie dies aus der Art der Ableitung (B) aus (A) leicht begreiflich ist; jedes Glied (p, q),

worin p und q zwei von einander verschiedene Zahlen sind, hat den Coefficienten $2pq$ vor sich. Ein Glied endlich von der Form (p, p) , wofür wir kürzer $(\overset{2}{p})$ schreiben wollen, hat p^2 zum Coefficienten. Uebrigens zeigt die Art und Weise der Entwicklung der Reihe ganz deutlich, daß ein jedes Glied eines Coefficienten, wie z. B. α^μ , wenn es von der Form (p, q) ist, die Beschaffenheit habe, daß

$$p + q = \mu + 2.$$

Ich werde ein Glied, wie (p) , eine Funktion der ersten, so wie eines von der Form (p, q) oder $(\overset{2}{p})$ eine der zweiten Klasse heißen; und im ersten Falle werde ich die Funktion (p) eine des p ten Grades, im andern aber die Funktion (p, q) eine vom $(p+q)$ ten Grade nennen. Den zu einem solchen Gliede, wie (p) oder (p, q) gehörigen Coefficienten will ich endlich mit $\overset{2}{N}(p)$ oder $\overset{2}{N}(p, q)$ für die Entwicklung der Funktion $\left(\frac{d^2u}{d\alpha^2}\right)$ bezeichnen.

Es ist nun klar, daß der Faktor von α^μ in der Entwicklung $\left(\frac{d^2u}{d\alpha^2}\right)$ ein Aggregat von Gliedern seyn werde, die außer dem Gliede $(\mu + 2)$ sämtlich zur zweiten Klasse gehören, und vom $(\mu + 2)$ ten Grade sind.

Uebrigens bemerke ich noch, daß, so wie die Entwicklung $\left(\frac{du}{d\alpha}\right)$ keine andern Funktionen, als solche, die zur ersten Klasse gehören, enthält, ebenso die Entwicklung $\left(\frac{d^2u}{d\alpha^2}\right)$ keine andern, als nur Funktionen der ersten und der zweiten Klasse enthalten könne. In der Entwicklung von $\left(\frac{d^2u}{d\alpha^2}\right)$ ist der zweite Grad der Funktionen zugleich der niedrigste.

Aus der Ableitungsart der Gleichung (B) aus der Gleichung (A) geht hervor, daß ein jedes Glied, wie (p, q) , nur auf eine zweifache Art aus Gliedern der Entwicklung $\left(\frac{du}{d\alpha}\right)$ entstehen könne; nämlich aus (p) , oder aus (q) .

Diesem zu Folge hat man:

$$\overset{2}{N}(p, q) = \left\{ p \cdot \overset{2}{N}(q) + q \cdot \overset{2}{N}(p) \right\},$$

also wegen $\overset{2}{N}(p) = p$,

auch: $\overset{2}{N}(p, q) = 2 \cdot p \cdot q$.

Sind p und q einander gleich; so ist das Produkt $2pq$ noch durch $1 \cdot 2$ zu dividiren, um den Coefficienten des Gliedes $\overset{2}{(p)}$ zu erhalten; so daß

$$\overset{2}{N}(\overset{2}{p}) = p^2,$$

wovon der Grund aus dem Bildungsgesetze der Reihe einleuchtet, wie weiter unten gezeigt werden wird.

9. Differenziiert man jetzt die zuletzt gefundene Gleichung (B) in Bezug auf die GröÙe α ; so erhält man:

$$\left(\frac{d^3 u}{d \alpha^3} \right) = \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{d^2 \sum_2}{d \alpha} \right) + \alpha \cdot \left(\frac{d^2 \sum_3}{d \alpha} \right) + \alpha^2 \cdot \left(\frac{d^2 \sum_4}{d \alpha} \right) + \dots \\ & + \sum_3 + 2 \alpha \cdot \sum_4 + 3 \alpha^2 \cdot \sum_5 + \dots \end{aligned} \right\}$$

Die unentwickelten Theile dieses Ausdruckes führen auf Glieder von der Form:

$$\left(\frac{d(p, q)}{d \alpha} \right).$$

Diese Glieder sind wieder nach den früher aufgestellten Grundsätzen zu entwickeln. Da man nun überhaupt hat:

$$\left(\frac{d(p, q)}{d \alpha} \right) = \left(\frac{d^2(z_p, z_q, v)}{d \alpha \cdot d t} \right);$$

so wird man diese Glieder nach der Gleichung (A) entwickeln können, wenn man nur wieder in derselben $z_p \cdot z_q \cdot v$ an die Stelle von u bringt, und also $z_p \cdot z_q \cdot du$ anstatt du setzt; alsdann erhält man unmittelbar:

$$\left(\frac{d(z_p, z_q, v)}{d \alpha} \right) =$$

$$\left\{ z_1 \cdot \left(\frac{d(z_p \cdot z_q \cdot v)}{d t} \right) + 2 \alpha z_2 \cdot \left(\frac{d(z_p \cdot z_q \cdot v)}{d t} \right) \right. \\ \left. + 3 \alpha^2 z_3 \cdot \left(\frac{d(z_p \cdot z_q \cdot v)}{d t} \right) + \dots \right\},$$

und wenn man dieser Gleichung in Bezug auf t differenziert, so wird man haben:

$$\left(\frac{d^2 (z_p \cdot z_q \cdot v)}{d \alpha \cdot d t} \right) = \\ \left\{ z_1 \cdot \left(\frac{d^2 (z_p \cdot z_q \cdot v)}{d t^2} \right) + 2 \alpha z_2 \cdot \left(\frac{d^2 (z_p \cdot z_q \cdot v)}{d t^2} \right) \right. \\ \left. + 3 \alpha^2 z_3 \cdot \left(\frac{d^2 (z_p \cdot z_q \cdot v)}{d t^2} \right) + \dots \right\} = \\ \left\{ \left(\frac{d^2 (z_1 \cdot z_p \cdot z_q \cdot v)}{d t^2} \right) + 2 \alpha \cdot \left(\frac{d^2 (z_2 \cdot z_p \cdot z_q \cdot v)}{d t} \right) \right. \\ \left. + 3 \alpha^2 \cdot \left(\frac{d^2 (z_3 \cdot z_p \cdot z_q \cdot v)}{d t^2} \right) + \dots \right\}.$$

Schreibt man, den vorhergehenden Bezeichnungen analog:

$$\left(\frac{d^2 (z_p \cdot z_q \cdot z_r \cdot v)}{d t^2} \right) = (p, q, r), \dots (c)$$

welche wir eine Funktion der dritten Klasse und vom Grade $(p+q+r)$ nennen; so hat man überhaupt:

$$\left(\frac{d(p, q)}{d \alpha} \right) =$$

$$\{(p, q, 1) + 2 \alpha \cdot (p, q, 2) + 3 \alpha^2 \cdot (p, q, 3) + \dots\}.$$

Die Entwicklung der Glieder der Faktoren $\left(\frac{d \sum_2}{d \alpha}\right)$, $\left(\frac{d \sum_3}{d \alpha}\right)$, unterliegt nun weiter keinen Schwierigkeiten mehr, und sie gibt uns folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} & \{(1, 1, 1) + 6(1, 2) + 6(3)\} \\ & + \alpha \cdot \{6(1, 1, 2) + 12(2, 2) + 18(3, 1) + 24(4)\} \\ & + \alpha^2 \cdot \{9(1, 1, 3) + 12(1, 2, 2) + 54(2, 3) \\ & \quad + 36(1, 4) + 60(5)\} \\ & + \alpha^3 \cdot \{12(1, 1, 4) + 36(1, 2, 3) + 8(2, 2, 2) \\ & \quad + 96(2, 4) + 54(3, 3) + 60(1, 5) \\ & \quad + 120(6)\} \\ & + \alpha^4 \cdot \{15(1, 1, 5) + 48(1, 2, 4) + 27(1, 3, 3) \\ & \quad + 36(2, 2, 3) + 90(1, 6) + 150(2, 5) \\ & \quad + 180(3, 4) + 210(7)\} \\ & + \dots \end{aligned}$$

für diese Reihe wollen wir abkürzungsweise wieder setzen:

$$\left(\frac{d^3 u}{d \alpha^3}\right) = \left\{ \sum_3 + \alpha \cdot \sum_4 + \alpha^2 \cdot \sum_5 + \dots + \alpha^\mu \cdot \sum_{\mu+3} \dots \right\} (C).$$

Wenn man die Glieder, aus welchen ein jeder von den Coefficienten der verschiedenen Potenzen von α zusammengesetzt ist, überblickt; so wird man inne,

daß jeder von ihnen Funktionen der ersten, der zweiten und der dritten Klasse enthalte; daß sämtliche Glieder eines und desselben Coefficienten der Potenz von α einerlei Grad haben; daß überhaupt die Glieder des Coefficienten α^μ vom $(\mu + 3)$ ten Grade, und daß folglich die von α unabhängigen Glieder vom dritten Grade sind.

Bezeichnen wir mit ${}^3N(p)$; ${}^3N(p, q)$; ${}^3N(p, q, r)$ die Faktoren der Funktionen der verschiedenen Klassen (p) , (p, q) , (p, q, r) ; so dienen zur Fortsetzung der Reihe (C) nachstehende Formeln:

$${}^3N(p) = p(p-1)(p-2);$$

$${}^3N(p, q) = 3pq \cdot (p+q-2);$$

$${}^3N(p, q, r) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (p \cdot q \cdot r);$$

bei deren Gebrauch wieder zu erinnern kommt, daß, falls unter den drei Größen p, q, r zwei gleiche vorhanden wären, alsdann die durch die vorstehende Formel erhaltene Größe noch durch $1 \cdot 2$; und falls alle drei Größen p, q, r einander gleich seyn sollten, die gedachte Zahl noch durch $1 \cdot 2 \cdot 3$ zu dividiren käme.

Der Grund hievon ist leicht einzusehen, sobald man auf die Ableitung der Glieder der Reihe (C) aus denen der Reihe (B) Acht hat. Denn es ist klar, daß ein jedes Glied von der Form (p, q, r) oder (p, q) aus mehreren Gliedern der Reihe (B) entspringe, und daß insbesondere die Glieder (p, q) der Reihe (C)

aus den drei Gliedern (p) , (q) und (p, q) der Reihe (B) entspringen; und daß ebenso die Glieder der Form (p, q, r) aus den drei Gliedern (p, q) , (p, r) und (q, r) eben dieser Reihe (B) entstehen. Es wird auf diese Art leicht begreiflich seyn, daß:

$$\overset{3}{N}(p) = (p - 2) \cdot \overset{2}{N}(p);$$

$$\overset{3}{N}(p, q) =$$

$$[p \cdot \overset{2}{N}(q) + q \cdot \overset{2}{N}(p) + (p + q - 2) \cdot \overset{2}{N}(p, q)];$$

$$\overset{3}{N}(p, q, r) =$$

$$[p \cdot \overset{2}{N}(q, r) + q \cdot \overset{2}{N}(p, r) + r \cdot \overset{2}{N}(p, q)];$$

10. Um ferner die Entwicklung von $\left(\frac{d^4 u}{d\alpha^4}\right)$

zu finden, differenziire man abermals die Gleichung (C) in Rücksicht auf α ; und man erhält:

$$\left(\frac{d^4 u}{d\alpha^4}\right) =$$

$$\left\{ \left(\frac{d \overset{3}{\Sigma}_3}{d\alpha}\right) + \alpha \cdot \left(\frac{d \overset{3}{\Sigma}_4}{d\alpha}\right) + \alpha^2 \cdot \left(\frac{d \overset{3}{\Sigma}_5}{d\alpha}\right) + \dots \right\}$$

$$\left\{ + \overset{3}{\Sigma}_4 + 2 \alpha \cdot \overset{3}{\Sigma}_5 + 3 \alpha^2 \cdot \overset{3}{\Sigma}_6 + \dots \right\}$$

Die Entwicklung führet im Allgemeinen auf Glieder von der Form

$$\left(\frac{d(p, q, r)}{d\alpha}\right).$$

Aus dem gleichförmigen Gange dieser Rechnung ist es aber leicht zu entnehmen, daß, wenn man abkürzungsweise wieder schreibt:

$$\left(\frac{d^3 (z_p \cdot z_q \cdot z_r \cdot z_s \cdot v)}{d t^3} \right) = (p, q, r, s); \dots (d)$$

die Entwicklung des Gliedes

$$\left(\frac{d (p, q, r)}{d \alpha} \right)$$

seyn wird:

$$\{ (p, q, r, 1) + 2\alpha \cdot (p, q, r, 2) + 3\alpha^2 \cdot (p, q, r, 3) + \dots \}$$

Die vollständige Entwicklung der Funktion $\left(\frac{d^4 u}{d \alpha^4} \right)$ wird sonach geben:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^4 u}{d \alpha^4} \right) = \\ & \{ (1)^4 + 12 \cdot (1, 2)^2 + 24 \cdot (1, 3) + 12 (2)^2 + 24 (4) \} \\ & + \alpha \cdot \{ 8 (1, 2)^3 + 48 (1, 2)^2 + 36 (1, 3)^2 + 120 (2, 3) \\ & \quad + 96 (1, 4) + 120 (5) \} \\ & + \alpha^2 \cdot \left\{ \begin{aligned} & 12 (1, 3)^3 + 24 (1, 2)^2 + 216 (1, 2, 3) \\ & + 72 (1, 4)^2 + 48 (2)^3 + 180 (3)^2 + 336 (2, 4) \\ & + 240 (1, 5) + 360 (6) \end{aligned} \right\} \\ & + \dots \end{aligned}$$

wofür wir wieder schreiben wollen:

$$\left(\frac{d^4 u}{d\alpha^4}\right) =$$

$$\{\overset{4}{\Sigma}_4 + \alpha \cdot \overset{4}{\Sigma}_5 + \alpha^2 \cdot \overset{4}{\Sigma}_6 + \dots + \alpha^\mu \cdot \overset{4}{\Sigma}_{\mu+4} + \dots\} (D)$$

In dieser Entwicklung finden in Betreff der Coefficienten der verschiedenen Potenzen von α ähnliche Gesetze Statt, wie wir sie bei den drei vorhergehenden Entwicklungen, in den Reihen (A) (B) und (C) haben Statt finden sehen. Der Coefficient was immer für einer Potenz von α in dieser Reihe (D) findet sich aus Gliedern der ersten, zweiten, dritten und vierten Klasse zusammengesetzt, und alle Glieder eines und desselben Coefficienten sind von einerlei Grad; und zwar ist überhaupt der Grad eines Gliedes der Potenz α^μ in der Entwicklungsreihe (D) gleich $(\mu+4)$. Demnach sind alle Glieder des von α unabhängigen Theiles dieser Reihe vom vierten Grade.

Bezeichnet man ferner die Factoren, welche in der Entwicklung $\left(\frac{d^4 u}{d\alpha^4}\right)$ vor den Functionen (p) ; (p, q) ; (p, q, r) ; und (p, q, r, s) zu stehen kommen, oder mit ihnen multipliziert sind, durch $\overset{4}{N}(p)$; $\overset{4}{N}(p, q)$; $\overset{4}{N}(p, q, r)$ und $\overset{4}{N}(p, q, r, s)$; so hat man zu ihrer Bestimmung und zur Fortsetzung der Reihe (D) nachstehende Ausdrücke:

$$\overset{4}{N}(p) = (p-1)(p-2)(p-3);$$

$${}^4N(p, q) = pq \cdot [(p-1)(p-2) + (q-1)(q-2) + 3(p+q-2)(p+q-3)];$$

$${}^4N(p, q, r) = 12 \cdot p \cdot q \cdot r \cdot (p+q+r-3);$$

$${}^4N(p, q, r, s) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot pqrs;$$

welche Ausdrücke aber noch durch $1 \cdot 2$; oder $1 \cdot 2 \cdot 3$; oder $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ zu dividiren kämen, falls für eine Funktion von irgend einer Klasse unter den *constitutiven* Größen $p, q, r, s \dots$ entweder zwei, oder drei oder vier einander gleiche vorhanden seyn sollten.

Aus dem Bildungsgesetze der Reihe (D) ist es leicht begreiflich, daß ein jedes Glied von der Form (p, q) dieser Reihe aus drei Gliedern der vorhergehenden Reihe (C) entsprungen seyn könne, nämlich aus (p) , (p, q) , (p, q, r) ; daher man haben wird:

$${}^4N(p, q) = [p \cdot {}^3N(q) + q \cdot {}^3N(p) + (p+q-3) \cdot {}^3N(p, q)].$$

Ebenso kann ein Glied (p, q, r) der Reihe (D) aus vier Gliedern der Reihe (C) entsprungen seyn; daher man haben wird, weil diese vier Glieder keine andern seyn können, als (p, q) , (p, r) , (q, r) und (p, q, r) :

$${}^4N(p, q, r) = [p \cdot {}^3N(q, r) + q \cdot {}^3N(p, r) + r \cdot {}^3N(p, q) + (p+q+r-3) \cdot {}^3N(p, q, r)].$$

Endlich kann ein Glied der Reihe (D) wie (p, q, r, s) aus den vier Gliedern (q, r, s) , (p, r, s) , (p, q, s) und (p, q, r) der Reihe (C) entsprungen seyn, und man hat daher:

$${}^4N(p, q, r, s) = [p \cdot {}^3N(q, r, s) + q \cdot {}^3N(p, r, s) + r \cdot {}^3N(p, q, s) + s \cdot {}^3N(p, q, r)].$$

Die weiteren Entwicklungen dieser Gleichungen führen unmittelbar zu den vorangeführten Ausdrücken der Faktoren der Glieder (p, q) , (p, q, r) und (p, q, r, s) .

II. Differenziren wir jetzt die Gleichung (D) in Bezug auf die GröÙe α , so wird man $\left(\frac{d^5 u}{d\alpha^5}\right)$ erhalten. Weil nun ganz auf dieselbe Weise, wie vorher:

$$\left(\frac{d(p, q, r, s)}{d\alpha}\right) \{ (p, q, r, 1) + 2\alpha \cdot (p, q, r, 2) + 3\alpha^2 \cdot (p, q, r, 3) + \dots \};$$

so wird man, wenn man nach dieser Form alle Glieder der Gleichung:

$$\left(\frac{d^5 u}{d\alpha^5}\right) =$$

$$\left\{ \left(\frac{d^4 \Sigma_4}{d\alpha}\right) + \alpha \cdot \left(\frac{d^4 \Sigma_5}{d\alpha}\right) + \alpha^2 \cdot \left(\frac{d^4 \Sigma_6}{d\alpha}\right) + \dots \right\} \\ + [\Sigma_5 + 2\alpha \cdot \Sigma_6 + 3\alpha^2 \cdot \Sigma_7 + \dots]$$

gehörig entwickelt, und hierauf ordnet, nachstehendes Resultat erhalten:

$$\left(\frac{d^5 u}{d\alpha^5}\right) =$$

$$\{({}^5_1) + 20({}^3_1, 2) + 60({}^2_1, 3) + 60({}^2_1, 2) + 120(1, 4) \\ + 120(2, 3) + 120(5)\}.$$

$$+ \alpha \cdot \{10({}^4_1, 2) + 60({}^3_1, 3) + 120({}^2_1, {}^2_2) \\ + 600(1, 2, 3) + 240({}^2_1, 4) + 120({}^3_2) + 360({}^2_3) \\ + 720(2, 4) + 600(1, 5) + 720(6)\}.$$

$$+ \dots$$

wofür wir endlich wieder schreiben wollen:

$$\left(\frac{d^5 u}{d\alpha^5}\right) =$$

$$\{\Sigma_5 + \alpha \cdot \Sigma_6 + \alpha^2 \cdot \Sigma_7 + \dots + \alpha^\mu \Sigma_{\mu+5} + \dots\} \cdot (E).$$

In Rücksicht der verschiedenen Glieder dieser Reihe finden ähnliche Bemerkungen, wie bei den vorher-

gehenden vier Reihen Statt. Aus dem Bildungsgesetze der Glieder dieser letztern Reihe (E) ist es klar, daß sie keine andern Glieder enthält, als Funktionen der ersten, zweiten, dritten, vierten und fünften Klasse; daß alle Glieder eines und desselben Coefficienten von einerlei Grade sind, und zwar ist der Grad aller Funktionen, welche Glieder des Coefficienten der Potenz α'' sind, gleich $(\mu + 5)$. Die Entwicklungsreihe beginnt also mit Gliedern des fünften Grades. Werden die Faktoren der einzelnen Glieder in dieser Entwicklung auf eine der vorigen analoge Art gesucht, und bedient man sich der nämlichen Schlußreihen zu ihrer Bestimmung; so findet man, daß:

$${}^5N(p) = p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4);$$

$${}^3N(p, q) = pq.$$

$$\begin{aligned} &\times \{ [(p-1)(p-2)(p-3) + (q-1)(q-2)(q-3)] \\ &\quad + (p+q-4)[(p-1)(p-2) + (q-1)(q-3)] \\ &\quad + 3(p+q-2)(p+q-3)(p+q-4) \}; \end{aligned}$$

$${}^3N(p, q, r) = pqr.$$

$$\times \left\{ \begin{aligned} &2(p-1)(p-2) + 3(q+r-2)(q+r-3) \\ &+ 2(q-1)(q-2) + 3(p+r-2)(p+r-3) \\ &+ 2(r-1)(r-2) + 3(p+q-2)(p+q-3) \\ &+ 12.(p+q-r-3)(p+q+r-4) \end{aligned} \right\}$$

$$N(p, q, r, s) = 60 \cdot p q r s \cdot (p + q + r + s - 4);$$

$$N(p, q, r, s, w) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \times p q r s w.$$

In Rücksicht dieser Faktoren hat man wieder dieselbe Bemerkung beizufügen, daß, wenn von den constitutiven Zahlen p, q, r, \dots zwei, drei oder mehrere einander gleich wären; alsdann der nach den vorstehenden Formeln gefundene Faktor des Gliedes noch durch $1 \cdot 2$; oder $1 \cdot 2 \cdot 3$; oder $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$; u. zu dividiren, wie dies aus dem Vorhergehenden sehr leicht begreiflich ist.

12. Endlich wollen wir nochmals die Gleichung (E) nach α differenziiiren. Wenn man bei dieser Entwicklung denselben Schlüssen, die früher in Anwendung gezogen wurden, folgt; so wird man eine Reihe erhalten, welche von der Form ist:

$$\left(\frac{d^\sigma u}{d\alpha^\sigma} \right) =$$

$$\Sigma_\sigma + \alpha \cdot \Sigma_7 + \alpha^2 \cdot \Sigma_8 + \dots + \alpha'' \cdot \Sigma_{\mu+\sigma} + \dots \rfloor; \dots (F)$$

Von den Gliedern dieser Reihe will ich nur die von α unabhängigen darstellen, deren Summe hier mit Σ_σ bezeichnet wird. Man findet nach angestellter Berechnung:

$$\sum_6 = \{ (1) + 30 (1, 2) + 120 (1, 3) + 180 (1, 2) + 720 (1, 2, 3) + 360 (1, 4) + 120 (2) + 360 (3) + 720 (2, 4) + 720 (1, 5) + 720 (6) \}$$

Die Glieder in den übrigen Coefficienten der Potenzen von α häufen sich nun in eben dem Maße, als die Exponenten von α wachsen. Es gibt inzwischen ein allgemeines Gesetz, durch was wir in den Stand gesetzt werden, die Glieder einer jeden Entwicklung des Ausdruckes

$$\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n} \right)$$

zu finden, und insbesondere die von α unabhängigen Glieder der Entwicklung, welcher Glieder wir hier vornehmlich bedürfen, unmittelbar abzuleiten aus den gegebenen Functionen $z_1 z_2 z_3 \dots z_{(n)}$.

Wir wollen nun zur weiteren Auseinandersetzung dieses merkwürdigen Gesetzes, als des Hauptzweckes der gegenwärtigen Untersuchung, alsogleich schreiten.

13. Wenn man die in den vorhergehenden Art. entwickelten Reihen (A) (B) (C) . . . (F) zusammenstellt; so wird man finden, daß die Entwicklung des allgemeinen Ausdruckes:

$$\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right)$$

$$\left\{ \sum_n + \alpha \cdot \sum_{n+1} + \alpha^2 \cdot \sum_{n+2} + \dots + \alpha^\mu \cdot \sum_{n+\mu} + \dots \right\},$$

In Hinsicht welcher wir aus dem Vorhergehenden nachstehende Bestimmungen abstrahiren:

Erstens. Jeder der Coefficienten dieser Reihe

z. B. $\sum_{n+\mu}^n$ ist ein Aggregat von Gliedern, welche alle unter der allgemeinen Form:

$$\left(p \cdot v' + q \cdot v'' + r \cdot v''' + \dots \right)$$

begriffen seyn werden;

Zweitens. Alle Glieder des Coefficienten einer und derselben Potenz von α sind von dem nämlichen Grade, oder was dasselbe ist, die Summe:

$$\{ p \cdot v' + q \cdot v'' + r \cdot v''' + \dots \}$$

ist für alle Glieder, welche den Coefficienten irgend einer Potenz von α , z. B. der Potenz α^μ ausmachen, gleich $(n + \mu)$, welches zugleich der Grad der Glieder dieses Coefficienten ist.

Drittens. Jeder Coefficient, wie $\sum_{n+\mu}^n$ enthält Glieder von jeder Klasse, von der ersten anzu-
angen bis einschließlich zur n ten Klasse.

Viertens. Jeder Coefficient der Reihe enthält ferner in sich alle möglichen Glieder, die nur immer aus den Zusammensetzungsarten der Zahlen $(n + \mu)$ aus den Zahlen $pqr \dots$ und $v' v'' v''' \dots$ nach allen möglichen Verbindungen derselben entspringen können, so daß $(p \cdot v' + q \cdot v'' + r \cdot v''' \dots)$ beständig gleich $(n + \mu)$ werde, wenn nur die Summe $(v' + v'' + v''' \dots)$ die Zahl n nicht übersteigt.

Fünftens. Jedem dieser Glieder eines Coefficienten kommt ein gewisser Factor zu, der nach einem gewissen Gesetze, welches wir nachher suchen wollen, aus den Größen $pqr \dots$ und $v' v'' v''' \dots$ bestimmbar ist. Bezeichnet man mit $S_{\mu, m}$ die Summe aller Glieder der m ten Klasse des Coefficienten der Potenz α'' ; so wird der vorstehende Satz so ausgedrückt werden können:

$$\sum_{n+\mu} = \{ \overset{n}{S}_{\mu, 1} + \overset{n}{S}_{\mu, 2} + \overset{n}{S}_{\mu, 3} + \dots + \overset{n}{S}_{\mu, n} \}$$

In Betreff des von α unabhängigen Theiles $\overset{n}{\Sigma}$ der Reihe, welcher hier hauptsächlich in Betrachtung zu ziehen kommt, bemerke man Folgendes:

1) Alle Glieder desselben sind vom n ten Grade und er enthält Funktionen jeder Klasse, von der ersten bis zur n ten.

2) Die höchste, so wie die niedrigste Klasse enthalten beide nur eine Funktion, jene die Funktion ($\overset{n}{1}$), diese die Funktion (n).

3. Dieser Theil $\overset{n}{\Sigma}_n$ enthält alle möglichen Glieder, welche der Bedingungsgleichung:

$$(p.v' + q.v'' + r.v''' + \dots) = n$$

in Genüge leisten. Man wird daher umgekehrt alle diese möglichen Fälle sehr leicht dadurch auffinden, daß man eigentlich alle möglichen Arten der Zerlegung der Zahl n in die Theile 1, 2, 3, . . . bis n sucht, wobei ein und derselbe Theil auch mehreremalen hinterinander vorkommen kann.

Diese Zerlegung der Zahlen in aliquante Theile (*partitio numerorum*) gibt uns also ein sehr einfaches Mittel an die Hand alle Glieder des Theiles $\overset{n}{\Sigma}_n$ mit Sicherheit auffindig zu machen.

Diese Methode will ich durch einige Beispiele erleichtern.

I. Es sey $n = 5$; also der Theil $\overset{5}{\Sigma}_5$, der Entwicklung $\left(\frac{d^5 u}{d\alpha^5}\right)$ zu suchen. Da die möglichen Fälle der Theilung der Zahl 5 sind:

$$5; 4 + 1; 3 + 2; 3 + 1 + 1; 2 + 2 + 1; \\ 2 + 1 + 1 + 1; 1 + 1 + 1 + 1 + 1;$$

so werden die im Theile Σ_5 enthaltenen möglichen Glieder seyn:

$$(5); (4, 1); (3, 2); (3, \overset{2}{1}); (\overset{2}{2}, 1); \\ (2, \overset{3}{1}); (\overset{3}{1});$$

welche wir auch wirklich in der obigen Entwicklung (E) vorhanden sehen.

II. Es seyn $n = 6$; also die Glieder des Theiles Σ_6 der Entwicklung $\left(\frac{d^6 u}{a \alpha^6}\right)$ zu suchen. Da aber die Theilungen der Zahl 6 sind:

$$\begin{array}{l|l} 6 = 6; & 6 = 4 + 1 + 1; \\ 6 = 5 + 1; & 6 = 3 + 2 + 1; \\ 6 = 4 + 2; & 6 = 3 + 1 + 1 + 1; \\ 6 = 4 + 3; & 6 = 2 + 2 + 2; \end{array}$$

$$6 = 2 + 2 + 1 + 1;$$

$$6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1;$$

$$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1;$$

so geben dieselben die nachstehende Glieder von Σ_6 :

(6); (5, 1); (4, 2); (3); (4, 1); (3, 2, 1);
 (3, 1); (2); (2, 1); (2, 1); (1).

III. Es sey $n = 7$.

In diesem Falle findet man:

$$\begin{array}{l|l}
 7 = 7; & 7 = 4 + 2 + 1; \\
 7 = 6 + 1; & 7 = 4 + 1 + 1 + 1; \\
 7 = 5 + 2; & 7 = 3 + 3 + 1; \\
 7 = 5 + 1 + 1; & 7 = 3 + 2 + 2; \\
 7 = 4 + 3; & 7 = 3 + 2 + 1 + 1;
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 7 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1; \\
 7 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1; \\
 7 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1; \\
 7 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1; \\
 7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1;
 \end{array}$$

Hieraus bilden wir nachstehende Glieder des von α unabhängigen Theiles der Entwicklung $\left(\frac{d^7 u}{d\alpha^7}\right)$:

(7); (1, 6); (2, 5); (5, 1); (4, 3); (4, 2, 1);
 (4, 1); (3, 1); (3, 2); (3, 2, 1); (2, 1); (3, 1);
 (2, 1); (2, 1); (1).

IV. Für $n = 8$ sind nachstehende Theilungen möglich:

$8 = 8;$	$8 = 4 + 2 + 2;$
$8 = 7 + 1;$	$8 = 4 + 2 + 1 + 1;$
$8 = 6 + 2;$	$8 = 4 + 1 + 1 + 1 + 1;$
$8 = 6 + 1 + 1;$	$8 = 3 + 3 + 2;$
$8 = 5 + 3;$	$8 = 3 + 3 + 1 + 1;$
$8 = 5 + 2 + 1;$	$8 = 3 + 2 + 1 + 1 + 1;$
$8 = 5 + 1 + 1 + 1;$	$8 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1;$
$8 = 4 + 4;$	$8 = 2 + 2 + 2 + 2;$
$8 = 4 + 3 + 1;$	$8 = 2 + 2 + 2 + 1 + 1;$

$$8 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1;$$

$$8 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1;$$

$$8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1;$$

und hieraus wird man folgende Glieder des von α unabhängigen Theiles der Entwicklung $\left(\frac{d^8 u}{d\alpha^8}\right)$ erhalten:

$$(8); (7, 1); (6, 2); (6, \overset{2}{1}); (5, 3); (5, \overset{2}{2}, 1);$$

$$(5, \overset{3}{1}); (4, \overset{2}{2}); (4, 3, 1); (4, \overset{2}{2}); (4, \overset{2}{2}, \overset{2}{1}); (4, \overset{4}{1});$$

$$(3, \overset{2}{2}); (3, \overset{2}{1}, \overset{2}{2}); (3, \overset{2}{2}, 1); (3, \overset{3}{2}, \overset{2}{1}); (3, \overset{5}{1});$$

$$(2, \overset{4}{2}); (2, \overset{3}{1}, \overset{2}{2}); (2, \overset{2}{1}, \overset{4}{2}); (2, \overset{6}{1}); (1, \overset{8}{1}).$$

Nachdem man auf diese Weise zur Kenntniß aller derjenigen Glieder gelangt ist, welche den von α unabhängigen Theil irgend einer Entwicklung $\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right)$ zusammensetzen, bleibt nur noch übrig, das allgemeine Gesetz aufzusuchen, nach welchen man den zu jedem Gliede dieses Theiles gehörigen Faktor bestimmt.

In Betreff der Glieder, welche \sum_n^n enthält, füge ich schließlich noch die Bemerkung bei, daß sie sämtlich in der vollständigen Entwicklung der Potenz:

$$(1 + \alpha \cdot z_1 + \alpha^2 \cdot z_2 + \alpha^3 \cdot z_3 + \dots)^n$$

im Coefficienten von α^n erscheinen, worin uns also ein zweites Mittel dargeboten wird, diese Funktionen zu erhalten.

14. Die Herleitungsart der Glieder der Entwicklungssreihe für $\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right)$ aus denen der nächst vorhergehenden Funktion $\left(\frac{d^{n-1} u}{d\alpha^{n-1}}\right)$ gibt zu erkennen, daß jedes Glied jener Entwicklung aus zwei oder mehreren Gliedern von dieser entspringe und hieraus bestimmbar sey. Es wird sonach jeder Faktor irgend eines Gliedes der Entwicklung $\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right)$ aus gewissen Faktoren der Glieder der nächst vorhergehenden Entwicklung bestehen, wie wir dies in einigen besonderen Fällen schon zu bemerken Gelegenheit hatten.

Wir wollen die Coefficienten der Funktionen (p) , (p, q) , rc. in der Entwicklung von $\left(\frac{d^n u}{d x^n}\right)$ mit ${}^nN(p)$; ${}^nN(p, q)$; rc. bezeichnen. Im Allgemeinen wird man nun haben:

$${}^nN(p) = (p - n + 1) \cdot {}^{n-1}N(p); \dots\dots\dots (1)$$

$${}^nN(p, q) = \left\{ \left[p \cdot {}^{n-1}N(q) + q \cdot {}^{n-1}N(p) \right] + (p+q-n+1) \cdot {}^{n-1}N(p, q) \right\}; (2)$$

$${}^nN(p, q, r) = \left\{ \left[p \cdot {}^{n-1}N(q, r) + q \cdot {}^{n-1}N(p, r) + r \cdot {}^{n-1}N(p, q) \right] + (p+q+r-n+1) \cdot {}^{n-1}N(p, q, r) \right\}; (3)$$

$${}^nN(p, q, r, s) = \left\{ \left[p \cdot {}^{n-1}N(q, r, s) + q \cdot {}^{n-1}N(p, r, s) + r \cdot {}^{n-1}N(p, q, s) + s \cdot {}^{n-1}N(p, q, r) \right] + (p+q+r+s-n+1) \cdot {}^{n-1}N(p, q, r, s) \right\}; (4)$$

u. s. w.

Ueberhaupt ist, wenn ${}^{n-1}N_p$ den Coefficienten von (q, r, s) ohne daß p bedeutet:

$${}^nN(p, q, r, s, \dots) = \left\{ \left[p \cdot {}^{n-1}N_p + q \cdot {}^{n-1}N_q + r \cdot {}^{n-1}N_r + \dots \right] + \lambda \cdot {}^{n-1}N(p, q, r, s, \dots) \right\}, (k)$$

worin:

$$\lambda = (p + q + r + \dots - n + 1).$$

Diese sind nun zugleich die Bedingungsgleichungen, welche zwischen den Coefficienten der Glieder dieser Entwicklungen Statt finden, und aus welchen wir die allgemeinen Ausdrücke der Faktoren der Glieder (p, q, r, s, \dots) zu entwickeln haben. Nur muß ich bemerken, daß die Zahlen p, q, r, s, \dots von einander verschieden vorausgesetzt werden, und daß, im Falle zwei oder mehrere derselben einander gleich wären, bei Anwendung jener allgemeinen Formeln zur Bestimmung ihrer Faktoren der gefundene Ausdruck noch durch 1.2; oder 1.2.3, u. zu dividiren sey.

15. Die weitere Entwicklung der Gleichung (1) des vorigen Art. gibt uns:

$${}^nN(p) = p(p-1)(p-2)(p-3)\dots(p-n+1).$$

Für den besondern Fall, da $p = n$, in welchem die Funktion (p) ein Glied in dem von α unabhängigen Theile \sum_n^n ist, hat man:

$${}^nN(p) = 1.2.3.4.\dots p.$$

Da die Entwicklung dieses Faktors keine Schwierigkeit hat; so wollen wir die des Faktors ${}^nN(p, q)$ vornehmen, und in der Absicht aus der Gleichung

(2) des vorigen Art. die nachstehenden herleiten, in welchen

$$\lambda = (p + q - n)$$

abkürzungsweise gesetzt wird:

$$N^n(p, q) =$$

$$p \cdot N^{n-1}(q) + q \cdot N^{n-1}(p) + (\lambda + 1) \cdot N^{n-1}(p, q);$$

$$N^{n-1}(p, q) =$$

$$p \cdot N^{n-2}(q) + q \cdot N^{n-2}(p) + (\lambda + 2) \cdot N^{n-2}(p, q);$$

$$N^{n-2}(p, q) =$$

$$p \cdot N^{n-3}(q) + q \cdot N^{n-3}(p) + (\lambda + 3) \cdot N^{n-3}(p, q);$$

$$N^{n-3}(p, q) =$$

$$p \cdot N^{n-4}(q) + q \cdot N^{n-4}(p) + (\lambda + 4) \cdot N^{n-4}(p, q);$$

$$N^{n-k}(p, q) =$$

$$p \cdot N^{n-k-1}(q) + q \cdot N^{n-k-1}(p) + (\lambda + k + 1) \cdot N^{n-k-1}(p, q).$$

Multipliziert man von diesen Gleichungen

die zweite mit $(\lambda + 1)$;

die dritte $\dots (\lambda + 1)(\lambda + 2)$;

die vierte mit $(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)$;

die letzte mit $(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) \dots (\lambda + k)$;

und bringt sie in eine Summe; so wird man erhalten:

$${}^n N(p, q) =$$

$$\begin{aligned} & \left\{ p \cdot \left[{}^{n-1} N(q) + (\lambda + 1) \cdot {}^{n-2} N(q) + (\lambda + 1)(\lambda + 2) \cdot {}^{n-3} N(q) + \dots \right. \right. \\ & \quad \left. \dots + (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) \dots (\lambda + k) \cdot {}^{n-k-1} N(q) \right] \\ & + q \cdot \left[{}^{n-1} N(p) + (\lambda + 1) \cdot {}^{n-2} N(p) + (\lambda + 1)(\lambda + 2) \cdot {}^{n-3} N(p) + \dots \right. \\ & \quad \left. \dots + (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) \dots (\lambda + k) \cdot {}^{n-k-1} N(p) \right] \\ & + (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) \dots (\lambda + k + 1) \cdot {}^{n-k-1} N(p, q) \left. \right\} \end{aligned}$$

Wenn man von den vorhergehenden Entwicklungen der Faktoren ${}^{n-1} N(p)$, ${}^{n-2} N(p)$, \dots und ${}^{n-1} N(q)$, ${}^{n-2} N(q)$ u. zu Reduktionen des vorstehenden Ausdruckes des Faktors ${}^n N(p, q)$ Gebrauch macht; so wird man erhalten:

$${}^n N(p, q) =$$

$$\begin{aligned} & pq \cdot \left[(p-1)(p-2)(p-3) \dots (p-n+2) + \right. \\ & \quad \left. + (q-1)(q-2)(q-3) \dots (q-n+2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + pq(\lambda + 1). \\
\left\{ \begin{array}{l} (p-1)(p-2)(p-3)\dots(p-n+3) \\ + (q-1)(q-2)(q-3)\dots(q-n+3) \end{array} \right\} \\
& + pq(\lambda + 1)(\lambda + 2). \\
\left\{ \begin{array}{l} (p-1)(p-2)(p-3)\dots(p-n+4) \\ + (q-1)(q-2)(q-3)\dots(q-n+4) \end{array} \right\} \\
& + pq(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3). \\
\left\{ \begin{array}{l} (p-1)(p-2)(p-3)\dots(p-n+5) \\ + (q-1)(q-2)(q-3)\dots(q-n+5) \end{array} \right\} \\
\vdots \\
& + pq(\lambda + 1)(\lambda + 2)\dots(\lambda + k). \\
\left\{ \begin{array}{l} (p-1)(p-2)\dots(p-n+k+2) \\ + (q-1)(q-2)\dots(q-n+k+2) \end{array} \right\} \\
& + (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)\dots(\lambda + k+1) \cdot N_{n-k-1}(p, q).
\end{aligned}$$

Nimmt man in dieser Entwicklung

$$k = n - 3$$

an; so werden die beiden letzten Glieder derselben in nachstehende übergehen:

$$\begin{aligned}
& + (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)\dots \\
& \dots(\lambda + n - 3) \cdot pq \cdot [(p-1) + (q-1)] \\
& + (\lambda + 1)(\lambda + 2)\dots(\lambda + n - 2) \cdot 2pq.
\end{aligned}$$

Wenn man die Glieder dieser Reihe in umgekehrter Ordnung schreibt, und durch pq dividirt; so wird man erhalten:

$$\left\{ \frac{N(p, q)}{p \cdot q} \right\} =$$

$$(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)\dots(\lambda+n-2)$$

$$+ (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)\dots(\lambda+n-3)[(p-1)+(q-1)]$$

$$+ (\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n-4) \cdot [(p-1)(p-2) + (q-1)(q-2)]$$

$$+ (\lambda+1)(\lambda+2) \dots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (p-1)(p-2)(p-3)\dots(p-n+4) \\ + (q-1)(q-2)(q-3)\dots(q-n+4) \end{array} \right\}$$

$$+ (\lambda+1) \dots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (p-1)(p-2)(p-3)\dots(p-n+3) \\ + (q-1)(q-2)(q-3)\dots(q-n+3) \end{array} \right\}$$

$$+ 1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (p-1)(p-2)(p-3)\dots(p-n+2) \\ + (q-1)(q-2)(q-3)\dots(q-n+2) \end{array} \right\}$$

Deutet man durch

$$P_n$$

um abzukürzen, die Summe der folgenden Reihe an:

$$\left\{ 1 + \frac{p-1}{\lambda+n-2} + \frac{(p-1)(p-2)}{(\lambda+n-2)(\lambda+n-3)} \right. \\ + \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{(\lambda+n-2)(\lambda+n-3)(\lambda+n-4)} + \dots \\ \left. \dots + \frac{(p-1)(p-2)(p-3)\dots(p-n+2)}{(\lambda+n-2)(\lambda+n-3)(\lambda+n-4)\dots(\lambda+1)} \right\}$$

und bezeichnet man mit Q_λ^n die Summe einer ähnlichen, durch Verwechslung von p und q entspringenden Reihe; so wird man, mit Hilfe dieser Summen, den vorhergehenden Ausdruck unter folgender Gestalt darstellen können:

$$N(p, q) =$$

$$pq.(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)\dots(\lambda+n-2). \{P_\lambda^n + Q_\lambda^n\}.$$

Die Reihen, welche wir hier mit P_λ^n und Q_λ^n bezeichnen, und auf deren Summierung die endliche Bestimmung des Faktors von $p.q$ zurückgeführt wird; besitzen die von Gauß entdeckte sehr merkwürdige Eigenschaft, daß, wenn man sie bis zu dem Gliede fortsetzt, bei welchem sie abbrechen, ihre Summen in Gestalt einer Faktoren-Folge darstellbar sind. Diese Bedingung wird in allen jenen Fällen erfüllt, in welchen p und q kleiner als n sind. Der merkwürdigste Fall ist derjenige, in welchem:

$$p + q = n \text{ oder } \lambda = 0$$

ist, und in diesem Falle drückt $N(p, q)$ den Factor eines Gliedes (p, q) in der Entwicklung Σ_n aus. Da eben dieser Fall zugleich der wichtigere ist, dessen Betrachtung uns vor allen andern obliegt, indem wir uns mit der Gliederbestimmung vorzüglich dieses von α unabhängigen Theiles der Entwicklung $\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right)$ zu befassen haben; so wollen wir den weitem Folgerungen nachgehen. Da nun:

$$P_o =$$

$$\left[1 + \frac{p-1}{n-2} + \frac{(p-1)(p-2)}{(n-2)(n-3)} + \dots + \frac{(p-1)(p-2) \dots (p-n+2)}{(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} \right]$$

und

$$P_o = \frac{n-1}{n-p} = \frac{n-1}{q};$$

o wie

$$Q_o = \frac{n-1}{n-q} = \frac{n-1}{p};$$

welche Werthe man auch den Größen p, q beilegt, denn nur $p + q = n$; so ist:

Q

$$P. + Q. =$$

$$(n-1) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = \frac{n(n-1)}{p \cdot q}$$

Man hat daher:

$${}^nN(p, q) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n.$$

Wäre $p = q$; so hätte man:

$${}^nN(p) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 2}$$

16. Entwickelt man durch ähnliche Schlüsse den Ausdruck für ${}^nN(p, q, r)$, wobei $p + q + r = n$ gesetzt wird; so findet man:

$${}^nN(p, q, r) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n.$$

Wären die konstitutiven Größen einander gleich; dann müßte man, früheren Bemerkungen gemäß, das Produkt noch durch $1 \cdot 2 \cdot 3$ dividiren. Das Gesetz, welches nun hieraus zur Bestimmung der Faktoren der Glieder in dem von α unabhängigen Theile der Entwicklung $\left(\frac{d^nu}{d\alpha^n} \right)$ hervorgeht, ist nun klar, und es läßt sich dasselbe im Allgemeinen auf folgende Art ausdrücken:

$$N \binom{n}{p, q, r, \dots} =$$

$$1.2.3.4. \dots n$$

$$1.2.3. \dots p' \times 1.2.3. \dots p'' \times 1.2. \dots p''' \times \dots$$

Es ist bemerkenswerth, daß zugleich durch diese Formel die Zahl der Permutationen von n Elementen ausgedrückt wird, unter welchen das erste Element p' mal, das zweite p'' mal, das dritte p''' mal, u. s. w. vorkommt.

17. Da wir nun das Gesetz kennen, nach welchem die Glieder, woraus der von α unabhängige Theil \sum_n der Entwicklung $\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right)$ besteht, gefunden werden können; so wollen wir die weiteren Bestimmungen dem im Eingange dieser Abhandlung aufgestellten Grundsatz gemäß unternehmen. Deutet man durch das Symbol:

$$\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right)_0$$

Den Werth der Funktion von $\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right)$ für $\alpha = 0$,
h. den von α unabhängigen Theil dieser Entwicklung; so daß:

$$\sum_n = \left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right)_0 ;$$

so wird man, weil zu gleicher Zeit, als $\alpha = 0$ wird, x in $\varphi(t)$ übergeht, diesen Werth von x in den Funktionen $z_1 z_2 z_3 \dots$ und u der verschiedenen Glieder von \sum_n substituiren müssen. Wir werden annehmen, daß diese Funktionen respektive in $Z_1 Z_2 Z_3 \dots$ und U ; so wie, daß $\frac{du}{dt} = v$, in V übergehen. Da nun der Coefficient von α^n in der Reihe für u , den wir oben mit $\chi_n(t)$ bezeichnet haben, ist:

$$\chi_n(t) = \frac{\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right)_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n},$$

und da $\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right)_0$ ein Aggregat von Gliedern von der Form:

$$\begin{pmatrix} v' & v'' & v''' & \dots \end{pmatrix}_{(p, q, r, \dots)}$$

ist, worin:

$$p \cdot v' + q \cdot v'' + r \cdot v''' + \dots = n;$$

und da der Faktor eines jeden Gliedes ist:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots v' \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots v'' \times 1 \cdot 2 \cdot 4 \dots v''' \times \dots}$$

so schließen wir, daß der Coefficient $\chi_n(t)$ ein Aggregat von Gliedern ist, die alle die Form:

$$\left(\frac{d^{\lambda} \cdot \left(\overset{v'}{z} \cdot \overset{v''}{z} \cdot \overset{v'''}{z} \cdot \dots \cdot v \right)}{1.2 \dots v' \times 1.2 \dots v'' \times 2.2 \dots v''' \times \dots dt^{\lambda}} \right)$$

haben, worin:

$$\lambda = (v' + v'' + v''' + \dots - 1)$$

gesetzt worden ist. Deutet man die Summe mehrerer nach einem gleichlautenden Gesetze abgeleiteter Funktionen durch das dem allgemeinen Gliede vorgesezte Summenzeichen Σ an; und setzt an die Stelle z und v die Buchstaben Z und V ; so hat man:

$$\chi_n(t) =$$

$$\Sigma \left\{ \frac{d^{v'+v''+v'''+\dots-1} \left(\overset{v'}{Z_p} \cdot \overset{v''}{Z_q} \cdot \overset{v'''}{Z_r} \dots V \right)}{1.2.3 \dots v' \times 1.2.3 \dots v'' \times 1.2.3 \dots v''' \dots dt^{v'+v''+v''' \dots}} \right\}$$

worin $pqr \dots v' v'' v''' \dots$ alle möglichen Werthe bedeuten, so daß:

$$(p.v' + q.v'' + r.v''' + \dots) = n.$$

Es ist daher:

$$\chi(t) = \psi(\varphi t);$$

$$\chi_1(t) = (Z_1, V);$$

$$\chi_2(t) = \left(\frac{d \cdot \overset{2}{Z_1} V}{1.2 \cdot dt} \right) + (Z_2, V);$$

$$\chi_3(t) =$$

$$\left(\frac{d^2 \cdot Z_1^3 V}{1.2.3. dt^2} \right) + \left(\frac{d \cdot Z_1 Z_2 V}{1.1. dt} \right) + (Z_3 V);$$

$$\chi_4(t) =$$

$$\left(\frac{d^3 \cdot Z_1^4 V}{1.2.3.4. dt^3} \right) + \left(\frac{d^2 \cdot Z_1^2 Z_2 V}{1.2. dt^2} \right) + \left(\frac{d \cdot Z_2^2 V}{1.2. dt} \right) + \left(\frac{d \cdot Z_1 Z_3 V}{1.1. dt} \right) + (Z_4 V);$$

$$\chi_5(t) =$$

$$\left(\frac{d^4 \cdot Z_1^5 V}{1.2.3.4.5. dt^4} \right) + \left(\frac{d^3 \cdot Z_1^3 Z_2 V}{1.2.3.1. dt^3} \right) + \left(\frac{d^2 \cdot Z_1^2 Z_3 V}{1.2.1. dt^2} \right) + \left(\frac{d^2 \cdot Z_1 Z_2^2 V}{1.2.1. dt^2} \right) + \left(\frac{d^2 \cdot Z_1^2 Z_4 V}{1.2. dt^2} \right) + \left(\frac{d \cdot Z_2 Z_3 V}{1.1. dt} \right) + (Z_5 V);$$

$$\chi_6(t) =$$

$$\left(\frac{d^5 \cdot Z_1^6 V}{1.2...6. dt^5} \right) + \left(\frac{d^4 \cdot Z_1^4 Z_2 V}{1.2.3.4.1 dt^4} \right) + \left(\frac{d^3 \cdot Z_1^3 Z_3 V}{1.2.3.1. dt^3} \right) + \left(\frac{d^3 \cdot Z_1^2 Z_2^2 V}{1.2.1.2. dt^3} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{d^2 \cdot Z_1 Z_2 Z_3 V}{1.1.1. dt^2} \right) + \left(\frac{d^2 \cdot Z_1^2 Z_4 V}{1.2.1. dt^2} \right) \\
& + \left(\frac{d^2 \cdot Z_2^3 V}{1.2.3. dt^2} \right) + \left(\frac{d \cdot Z_3^2 V}{1.2. dt} \right) \\
& + \left(\frac{d \cdot Z_2 Z_4 V}{1.1. dt} \right) + \left(\frac{d \cdot Z_1 Z_5 V}{1.1. dt} \right) = \\
& + (Z_6 V);
\end{aligned}$$

$$\chi_7(t) =$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{d^5 \cdot Z_1^7 V}{1.2..7. dt^7} \right) + \left(\frac{d^5 \cdot Z_1^5 Z_2 V}{1.2..5.1. dt^5} \right) \\
& + \left(\frac{d^4 \cdot Z_1^3 Z_2^2 V}{1.2.3.1.2. dt^4} \right) + \left(\frac{d^3 Z_1 Z_2^3 V}{1.1.2.3. dt^3} \right) \\
& + \left(\frac{d^4 \cdot Z_1^4 Z_3 V}{1.2.3.4.1. dt^4} \right) + \left(\frac{d^3 \cdot Z_1^2 Z_2 Z_3}{1.2.1.1. dt^3} \right) \\
& + \left(\frac{d^3 Z_1^3 Z_4 V}{1.2.3.1. dt^3} \right) + \left(\frac{d^2 Z_1 Z_3^2}{1.1.2. dt^2} \right) \\
& + \left(\frac{d^2 Z_2^2 Z_3 V}{1.2.1. dt^2} \right) + \left(\frac{d^2 \cdot Z_1 Z_2 Z_4 V}{1.1. dt} \right) \\
& + \left(\frac{d^2 \cdot Z_1^2 Z_5 V}{1.2.1. dt^2} \right) + \left(\frac{d \cdot Z_3 Z_4 V}{1.1. dt} \right)
\end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{d \cdot Z_2 Z_3 V}{1 \cdot 1 \cdot dt} \right) + \left(\frac{d \cdot Z_1 Z_0 V}{1 \cdot 1 \cdot dt} \right) \\ + (Z_7 V);$$

u. f. w.

18. Der Fall, in welchem die Funktionen $z_2 = 0$, $z_3 = 0$; $z_4 = 0$, ... gesetzt werden, verdient eine besondere Betrachtung. Ist also die Funktionalgleichung:

$$x = \varphi(t + \alpha \cdot z_1)$$

gegeben, und man sucht die Entwicklung der Funktion $u = \psi(x)$ in einer nach Potenzen fortschreitenden Reihe; so findet man:

$$u = \\ \left\{ \psi(\varphi t) + \alpha \cdot (Z_1 V) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{d \cdot Z_1^2 V}{dt} \right) \right. \\ + \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{d^2 \cdot Z_1^3 V}{dt} \right) + \frac{\alpha^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \left(\frac{d^3 \cdot Z_1^4 V}{dt^3} \right) \\ \left. + \dots + \frac{\alpha^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \left(\frac{d^{n-1} \cdot Z_1^n V}{dt^{n-1}} \right) + \dots \right\}$$

Dieser Satz ist unter dem Namen der Lagrange'schen Reversions-Formel bekannt, und sie ist, wie man sieht, ein besonderer Fall unseres oben entdeckten Gesetzes.

Wenn man bemerkt, daß:

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right) \left(\frac{dx}{d\alpha}\right) =$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right) \cdot z_1 \cdot \varphi'(t + \alpha z) = z_1 \left(\frac{du}{dx}\right) \left(\frac{dx}{dt}\right)$$

so:

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = z_1 \left(\frac{du}{dt}\right);$$

und wenn man anstatt z_1 und u setzt Z_1^n und U , oder anstatt $\left(\frac{dU}{dt}\right)$ schreibt V ; so wird man $Z_1^n V$ erhalten; und man erkennt hieraus, daß die Funktion

$$\left(\frac{d^2 u}{d\alpha^2}\right) \text{ aus } \left(\frac{d^{n-1} \cdot \left(\frac{du}{d\alpha}\right)}{dt^{n-1}}\right) \text{ erhalten werde, wenn}$$

man in der Funktion $\left(\frac{du}{d\alpha}\right)$ nur z_1 und u in Z_1^n und U verwandelt; oder der Coefficient von α^n in jener Entwicklungsreihe für u ist gleich der Funktion

$$\left(\frac{d^{n-1} \cdot \left(\frac{du}{d\alpha}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n dt^{n-1}}\right), \text{ wenn man in } \left(\frac{du}{d\alpha}\right) \text{ die Grö-}$$

ßen z_1 und u in Z_1^n und U verwandelt, und $\alpha = 0$ setzt.

Auf eben diese Art kann auch das allgemeinere Gesetz, in dem Falle, da $z_2 z_3 z_4 \dots$ nicht Null sind, ausgedrückt werden, und man kann die Funktion $X_n(t)$ durch folgende Form darstellen:

$$\Sigma \left\{ \frac{d^{v' + v'' + v''' \dots} \left(\frac{du}{d\alpha} \right)}{1.2 \dots v' \times 1.2 \dots v'' \times 1.2 \dots v''' \dots c. dt^{v' + v'' + v''' \dots - 1}} \right\},$$

dadurch wird eine Summe von Gliedern angedeutet, die nach und nach aus $\left(\frac{du}{d\alpha} \right)$ entwickelt wird, wenn man darin $\alpha = 0$ setzt, und z_i in Funktionen von der Form:

$$\frac{(Z_p. Z_q. Z_r \dots)}{1.2 \dots v' \times 1.2 \dots v'' \times 1.2 \dots v''' \dots c.}$$

so wie zu gleicher Zeit u in U verwandelt. Man wird alle diese Funktionen, die man für z_i zu setzen hat, erhalten, wenn man für $pqr \dots$ und $v' v'' v''' \dots$ alle möglichen Zahlen sucht, welche der Gleichung:

$$p.v' + q.v'' + r.v''' \dots = n$$

ein Genüge leisten.

19. Wir wollen jetzt den allgemeineren Fall betrachten, wo u eine Funktion der zwei Veränderlichen x und x' ist, die durch die Gleichungen:

$$x = \varphi(t + \alpha.z) \text{ und } x' = \varphi_1(t_1 + \alpha, z_1)$$

in Funktionen von α und α , gegeben sind, indem $z z_1$ gleichfalls Funktionen von xx' sind, von welchen

wir annehmen wollen, daß sie für $x = \varphi(t)$ und $t = \varphi_1(t_1)$ in ZZ_1 übergehen.

Die Funktion kann in eine nach Potenzen und Produkten von Potenzen der von einander unabhängigen Größen α, α_1 verwandelt werden. Bezeichnet man die Coefficienten von $\alpha^n \cdot \alpha_1^{n_1}$ mit $\chi_{n,n_1}(t, t_1)$; so ist dieser dem im Eingange dieser Abhandlung aufgestellten Grundsätze gemäß der Werth der Funktion:

$$\frac{\left(\frac{d^{n+n_1} u}{d\alpha^n d\alpha_1^{n_1}} \right)}{1.2 \dots n. 1.2.3 \dots n_1}$$

wenn man auch den Differenziationen $\alpha = 0$ und $\alpha_1 = 0$ setzt. Wir wollen nun diese Funktion zu entwickeln suchen. Da zu Folge des vorhergehenden Art.

$$\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n} \right) = \left(\frac{d^{n-1} \cdot \left(\frac{du}{d\alpha} \right)}{dt^{n-1}} \right), \dots (1)$$

wenn man nur in $\left(\frac{du}{d\alpha} \right)$, $\alpha = 0$ setzt, und hierauf α und u in Z^n und U verwandelt; und eben so:

$$\left(\frac{d^{n_1} u}{d\alpha_1^{n_1}} \right) = \left(\frac{d^{n_1-1} \cdot \left(\frac{du}{d\alpha_1} \right)}{dt_1^{n_1-1}} \right), \dots (2)$$

wenn man nur in $\left(\frac{du}{d\alpha_1} \right)$, $\alpha_1 = 0$ setzt, und hierauf

z_1 und u in $Z_1^{n_1}$ und U verwandelt; so erhält man, wenn im Ausdrucke (1) die Funktion $\left(\frac{d^{n_1} u}{d\alpha, n_1}\right)$ aus (2) anstatt u gesetzt wird:

$$\left(\frac{d^{n+n_1} u}{d\alpha^n \cdot d\alpha, n_1}\right) = \left\{ \frac{d^{n-1} \left[\frac{d \left(\frac{d^{n_1} u}{d\alpha, n_1} \right)}{d\alpha} \right]}{dt^{n-1}} \right\} = \left\{ \frac{d^{n+n_1-2} \left(\frac{d^2 u}{d\alpha \cdot d\alpha,} \right)}{dt^{n-1} \cdot dt, n_1-1} \right\}$$

wenn man nur $\alpha = 0$ und $\alpha_1 = 0$ setzt, und die Funktionen z, z_1, u in $Z^n, Z_1^{n_1}$ und U verwandelt. Das partielle Differenzial $\left(\frac{d^2 u}{d\alpha \cdot d\alpha,}\right)$, in welchem diese Größen zu setzen sind, wird man leicht auf folgende Art entwickeln.

Da

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = z \left(\frac{du}{dt}\right);$$

so wird man, wenn diese Gleichung in Bezug auf α_1 differenziert wird, erhalten:

$$\left(\frac{d^2 u}{d\alpha \cdot d\alpha,}\right) = \left(\frac{dz}{d\alpha,}\right) \left(\frac{du}{dt}\right) + z \cdot \left(\frac{d^2 u}{d\alpha, \cdot dt}\right).$$

Bemerkt man, daß:

$$\left(\frac{du}{d\alpha_1}\right) = z_1 \cdot \left(\frac{du}{dt_1}\right),$$

und insbesondere, daß:

$$\left(\frac{dz}{d\alpha_1}\right) = z_1 \cdot \left(\frac{dz}{dt_1}\right);$$

wird die vorhergehende Gleichung werden:

$$\left(\frac{d^2u}{d\alpha_1 \cdot d\alpha_1}\right) =$$

$$\left\{ z_1 \cdot \left(\frac{dz}{dt_1}\right) \left(\frac{du}{dt_1}\right) + z_1 \cdot \left(\frac{d \cdot z_1 \cdot \left(\frac{du}{dt_1}\right)}{dt_1}\right) \right\}$$

oder:

$$\left(\frac{d^2u}{d\alpha_1 \cdot d\alpha_1}\right) =$$

$$\left\{ z \cdot z_1 \cdot \left(\frac{d^2u}{dt_1 \cdot dt_1}\right) + z_1 \cdot \left(\frac{dz_1}{dt_1}\right) \left(\frac{du}{dt_1}\right) + z_1 \cdot \left(\frac{dz}{dt_1}\right) \left(\frac{du}{dt_1}\right) \right\}.$$

Verwandelt man jetzt in diesem Ausdrucke z in Z^n , z_1 in $Z_1^{n_1}$ und U ; und setzt, um abzu-
kürzen:

$$T = \left\{ Z^n \cdot Z_1^{n_1} \cdot \left(\frac{d_2 U}{dt \cdot dt_1} \right) + Z^n \cdot \left(\frac{dZ_1}{dt} \right) \left(\frac{dU}{dt_1} \right) + Z_1^{n_1} \cdot \left(\frac{dZ}{dt_1} \right) \left(\frac{dU}{dt} \right) \right\};$$

so ist der Coefficient des Gliedes $\alpha^{n_1} \cdot \alpha^{n_1}$ in der Entwicklungreihe für u :

$$\left\{ \frac{\left(\frac{d^{n+n_1-2} T}{dt^{n-1} \cdot dt_1^{n_1-1}} \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n_1} \right\}$$

20. Wenn u eine Funktion der drei Veränderlichen $x' x'' x'''$ ist, welche durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \varphi_1 (t, + \alpha, z_1); \\ x'' &= \varphi_2 (t_1, + \alpha_1, z_2); \\ x''' &= \varphi_3 (t_{11}, + \alpha_{11}, z_3); \end{aligned} \right\}$$

gegeben sind, worin $z_1 z_2 z_3$ gegebene Funktionen von $x' x'' x'''$ bedeuten; so läßt sich u in eine Reihe verwandeln, welche nach Potenzen und Produkten der von einander unabhängigen Größen $\alpha, \alpha_1, \alpha_{11}$ fortschreitet. Wir wollen nun das allgemeine Glied dieser Reihe, oder den Coefficienten des Produktes:

$$\left(\alpha^{n_1} \cdot \alpha_1^{n_2} \cdot \alpha_{11}^{n_3} \right)$$

stimmen. In der Absicht differenziren wir den
 in vorhergehenden Artikel gefundenen Ausdruck für
 $\left(\frac{d^2 u}{d\alpha_1 \cdot d\alpha_{11}}\right)$ so wird man haben:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^3 u}{d\alpha_1 \cdot d\alpha_{11} \cdot d\alpha_{111}}\right) = \\ & z_1 \cdot \left(\frac{dz_2}{d\alpha_{111}}\right) \left(\frac{d^2 u}{dt_1 \cdot dt_{11}}\right) + z_2 \cdot \left(\frac{dz_1}{d\alpha_{111}}\right) \left(\frac{d^2 u}{dt_1 \cdot dt_{11}}\right) \\ & z_1 \cdot \left(\frac{dz_2}{dt_1}\right) \left(\frac{d^2 u}{dt_{11} \cdot d\alpha_{111}}\right) + z_1 \cdot \left(\frac{d^2 z_2}{dt_1 \cdot d\alpha_{111}}\right) \left(\frac{du}{dt_{11}}\right) \\ & z_2 \cdot \left(\frac{dz_1}{dt_{11}}\right) \left(\frac{d^2 u}{dt_1 \cdot d\alpha_{111}}\right) + z_2 \cdot \left(\frac{du}{dt_1}\right) \left(\frac{d^2 z_1}{dt_{11} \cdot d\alpha_{111}}\right) \\ & + \left(\frac{dz_2}{dt_1}\right) \left(\frac{du}{dt_{11}}\right) \left(\frac{dz_1}{d\alpha_{111}}\right) \\ & + \left(\frac{dz_1}{dt_{11}}\right) \left(\frac{du}{dt_1}\right) \left(\frac{dz_2}{d\alpha_{111}}\right) \\ & z_1 \cdot z_2 \cdot \left(\frac{d^3 u}{dt_1 \cdot dt_{11} \cdot d\alpha_{111}}\right) \end{aligned}$$

Nun ist, dem Vorhergehenden zu Folge:

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\alpha_{111}}\right) &= z_3 \cdot \left(\frac{du}{dt_{111}}\right); \\ \left(\frac{dz_1}{d\alpha_{111}}\right) &= z_3 \cdot \left(\frac{dz_1}{dt_{111}}\right); \quad \left(\frac{dz_2}{d\alpha_{111}}\right) = z_3 \cdot \left(\frac{dz_3}{dt_{111}}\right); \end{aligned}$$

Bringt man diese Werthe in die vorhergehende Entwicklung des partiellen Differenzials $\left(\frac{d^4 u}{d\alpha_1 d\alpha_{II} d\alpha_{III}} \right)$ so erhält man dafür nachstehenden Ausdruck:

$$+ z_1 \cdot \left(\frac{dz_2}{dt_1} \right) \left(\frac{d \cdot z_3 \cdot \left(\frac{du}{dt_{III}} \right)}{dt_{II}} \right)$$

$$+ z_I \cdot \left(\frac{du}{dt_{II}} \right) \left(\frac{d \cdot z_3 \cdot \left(\frac{dz_2}{dt_{III}} \right)}{dt_1} \right)$$

$$+ z_2 \cdot \left(\frac{dz_I}{dt_{II}} \right) \left(\frac{d \cdot z_3 \cdot \left(\frac{du}{dt_{III}} \right)}{dt_1} \right)$$

$$+ z_2 \cdot \left(\frac{dz_I}{dt_1} \right) \left(\frac{d \cdot z_3 \cdot \left(\frac{dz_1}{dt_{III}} \right)}{dt_{II}} \right)$$

$$+ z_3 \cdot \left(\frac{du}{dt_{II}} \right) \left(\frac{dz_I}{dt_{III}} \right) \left(\frac{dz_2}{dt_1} \right)$$

$$+ z_3 \cdot \left(\frac{dz_I}{dt_{II}} \right) \left(\frac{du}{dt_1} \right) \left(\frac{dz_2}{dt_{III}} \right)$$

$$z_I \cdot z_2 \cdot \left(\frac{d^2 \cdot z_3 \cdot \left(\frac{du}{dt_{III}} \right)}{dt_1 \cdot dt_{II}} \right)$$

$$+ z_1 \cdot z_3 \cdot \left(\frac{d^2 u}{dt, dt_{,,}} \right) \left(\frac{dz_2}{dt_{,,,}} \right)$$

$$+ z_2 \cdot z_3 \cdot \left(\frac{d^2 u}{dt, dt_{,,}} \right) \left(\frac{dz_1}{dt_{,,,}} \right)$$

Werden alle Glieder dieses Ausdruckes noch weiter entwickelt; so wird man erhalten:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \left(\frac{d^3 u}{dt, dt_{,,} dt_{,,,}} \right) +$$

$$z_2 \cdot z_3 \cdot \left[\left(\frac{du}{dt,} \right) \left(\frac{d^2 z_1}{dt_{,,} dt_{,,,}} \right) + \left(\frac{dz_1}{dt_{,,,}} \right) \left(\frac{d^2 u}{dt, dt_{,,}} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{dz_1}{dt_{,,}} \right) \left(\frac{d^2 u}{dt, dt_{,,}} \right) \right]$$

$$z_1 \cdot z_3 \cdot \left[\left(\frac{du}{dt_{,,}} \right) \left(\frac{d^2 z_2}{dt, dt_{,,,}} \right) + \left(\frac{dz_2}{dt,} \right) \left(\frac{d^2 u}{dt_{,,} dt_{,,,}} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{dz_2}{dt_{,,,}} \right) \left(\frac{d^2 u}{dt, dt_{,,}} \right) \right]$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \left[\left(\frac{du}{dt_{,,,}} \right) \left(\frac{d^2 z_3}{dt, dt_{,,}} \right) + \left(\frac{dz_3}{dt_{,,}} \right) \left(\frac{d^2 u}{dt, dt_{,,}} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{dz_3}{dt,} \right) \left(\frac{d^2 u}{dt_{,,} dt_{,,,}} \right) \right]$$

$$z_1 \cdot \left[\left(\frac{du}{dt_{,,}} \right) \left(\frac{dz_3}{dt,} \right) \left(\frac{dz_2}{dt_{,,,}} \right) + \left(\frac{du}{dt_{,,,}} \right) \left(\frac{dz_2}{dt,} \right) \left(\frac{dz_3}{dt_{,,}} \right) \right]$$

$$z_2 \cdot \left[\left(\frac{du}{dt_{,,,}} \right) \left(\frac{dz_1}{dt_{,,}} \right) \left(\frac{dz_3}{dt,} \right) + \left(\frac{du}{dt,} \right) \left(\frac{dz_1}{dt_{,,,}} \right) \left(\frac{dz_3}{dt_{,,}} \right) \right]$$

$$+z_3 \cdot \left[\left(\frac{du}{dt_1} \right) \left(\frac{dz_1}{dt_{11}} \right) \left(\frac{dz_2}{dt_{111}} \right) + \left(\frac{du}{dt_{11}} \right) \left(\frac{dz_1}{dt_{111}} \right) \left(\frac{dz_2}{dt_1} \right) \right]$$

Diese ist nun die vollständige Entwicklung des partiellen Differenzials $\left(\frac{d^3 u}{d\alpha_1 \cdot d\alpha_{11} \cdot d\alpha_{111}} \right)$, worin man $\alpha_1 = 0$; $\alpha_{11} = 0$; $\alpha_{111} = 0$ zu setzen, und $z_1 z_2 z_3$ in $Z_1 Z_2 Z_3 U$ zu verwandeln hat. Setzt man also

$$\begin{aligned} T = & Z_1^{n_1} \cdot Z_2^{n_{11}} \cdot Z_3^{n_{111}} \cdot \left(\frac{d^3 U}{dt_1 \cdot dt_{11} \cdot dt_{111}} \right) \\ & + Z_2^{n_{11}} \cdot Z_3^{n_{111}} \cdot \left[\left(\frac{dU}{dt_1} \right) \left(\frac{d^2 Z_1}{dt_{11} dt_{111}} \right) \right. \\ & \quad + \left(\frac{dZ_1}{dt_{11}} \right) \left(\frac{d^2 U}{dt_{11} dt_{111}} \right) \\ & \quad \left. + \left(\frac{dZ_1}{dt_1} \right) \left(\frac{d^2 U}{dt_{11} dt_{111}} \right) \right] \\ & + Z_1^{n_1} \cdot Z_3^{n_{111}} \cdot \left[\left(\frac{dU}{dt_{11}} \right) \left(\frac{d^2 Z_2}{dt_1 dt_{111}} \right) \right. \\ & \quad + \left(\frac{dZ_2}{dt_1} \right) \left(\frac{d^2 U}{dt_{11} dt_{111}} \right) \\ & \quad \left. + \left(\frac{dZ_2}{dt_{11}} \right) \left(\frac{d^2 U}{dt_1 dt_{111}} \right) \right] \\ & + Z_1^{n_1} \cdot Z_2^{n_{11}} \cdot \left[\left(\frac{dU}{dt_{111}} \right) \left(\frac{d^2 Z_3}{dt_1 dt_{11}} \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{dZ_3}{dt_{II}} \right) \left(\frac{d^2 U}{dt, dt_{III}} \right) \\
& + \left(\frac{dZ_3}{dt_I} \right) \left(\frac{d^2 U}{dt_{II}, dt_{III}} \right)] \\
& + Z_1^{n_I} \cdot \left[\left(\frac{dU}{dt_{II}} \right) \left(\frac{dZ_3}{dt_I} \right) \left(\frac{dZ_2}{dt_{III}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{dU}{dt_{III}} \right) \left(\frac{dZ_2}{dt_I} \right) \left(\frac{dZ_3}{dt_{II}} \right) \right] \\
& + Z_2^{n_{II}} \cdot \left[\left(\frac{dU}{dt_{III}} \right) \left(\frac{dZ_I}{dt_{II}} \right) \left(\frac{dZ_3}{dt_I} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{dU}{dt_I} \right) \left(\frac{dZ_I}{dt_{III}} \right) \left(\frac{dZ_3}{dt_{II}} \right) \right] \\
& + Z_3^{n_{III}} \cdot \left[\left(\frac{dU}{dt_I} \right) \left(\frac{dZ_I}{dt_{II}} \right) \left(\frac{dZ_2}{dt_{III}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{dU}{dt_{II}} \right) \left(\frac{dZ_I}{dt_{III}} \right) \left(\frac{dZ_2}{dt_I} \right) \right] ;
\end{aligned}$$

wird der Faktor von $(\alpha_1^{n_I} \cdot \alpha_{II}^{n_{II}} \cdot \alpha_{III}^{n_{III}})$ seyn :

$$\left\{ \frac{d^{n_I + n_{II} + n_{III} - 3} T}{dt_1^{n_I - 1} \cdot dt_{II}^{n_{II} - 1} \cdot dt_{III}^{n_{III} - 1}} \right\} \cdot 2 \cdot 3 \dots n_I \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n_{II} \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n_{III}$$

21. Man wird sich leicht versichern können, daß man das partielle Differenzial $\left(\frac{d^2 u}{d\alpha . d\alpha ,} \right)$ im Artikel 18 dadurch erhalten kann, wenn man $\left(\frac{d^2 . z z , u}{d . dt ,} \right)$ entwickelt, und die Glieder, welche enthalten, wegläßt.

Ebenso wird man die vollständige Entwicklung des im vorhergehenden Art. betrachteten partiellen Differenzials $\left(\frac{d^3 u}{d\alpha , . d\alpha ,, . d\alpha ,,,} \right)$ durch die des Differenzials $\left(\frac{d^3 . (z_1 z_2 z_3 u)}{dt , . dt ,, . dt ,,,} \right)$ finden, wenn man bei dieser Entwicklung darauf Acht hat, daß man in Bezug auf $t ,$; z_2 in Bezug auf $t ,,$ und z_3 in Bezug auf $t ,,,$ wie beständig betrachtet, und nach der vollständigen unter dieser Voraussetzung gemachten Entwicklung dieses Differenzials die Glieder, welche die Factoren u und $z_1 . \left(\frac{du}{dt ,} \right)$; $z_2 . \left(\frac{du}{dt ,,} \right)$; $z_3 . \left(\frac{du}{dt ,,,} \right)$ enthalten, wegläßt.

Verfolgt man diese Untersuchungen weiter; so wird man sich leicht im Allgemeinen versichern, daß wenn $x' x'' x''' \dots x^{(m)}$, m von einander unabhängige Größen sind, welche durch die m Gleichungen:

$$x' = \varphi_1 (t_1 + \alpha_1 \cdot z_1)$$

$$x'' = \varphi_2 (t_2 + \alpha_2 \cdot z_2)$$

$$x''' = \varphi_3 (t_3 + \alpha_3 \cdot z_3)$$

$$x^{(m)} = \varphi_m (t_m + \alpha_m \cdot z_m)$$

gegeben werden; in welchen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ gleichfalls m von einander völlig unabhängige Größen, und $z_1, z_2, z_3, \dots, z_m$ gegebene Funktionen von $x', x'', x''', \dots, x^{(m)}$ sind; und wenn ferner u eine gegebene Funktion von $x', x'', x''', \dots, x^{(m)}$ ist; so wird sich dieselbe in eine nach Potenzen und Produkten von Potenzen der Größen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ fortschreitende Reihe entwickeln lassen; und wenn man mit T die Funktion der Größen t, t_1, t_2, \dots, t_m bezeichnet, so findet man, wenn man das partielle Differenzial:

$$\left(\frac{d^m \cdot (z_1 z_2 z_3 \dots z_m \cdot u)}{dt, dt_1, dt_2, \dots, dt_m} \right)$$

entwickelt, bei welcher Entwicklung man z_1 in Bezug auf t_1 ; z_2 in Bezug auf t_2 ; u. und überhaupt z_m in Bezug auf t_m wie eine Beständige betrachtet, und nach der unter dieser Voraussetzung erhaltenen Entwicklung dieses partiellen Differenzials die mit u oder mit den gleichzeitigen Faktoren $z_1 \cdot \left(\frac{du}{dt} \right)$;

$z_2 \cdot \left(\frac{du}{dt''}\right); z_3 \cdot \left(\frac{du}{dt'''}\right) \text{ u. } z_m \left(\frac{du}{dt_m}\right)$ behaftet
 Glieder wegläßt; endlich $z_1 z_2 z_3 \dots z_m$ und u
 $Z_1^{n_1} Z_2^{n_2} Z_3^{n_3} \dots Z_m^{n_m}$ und U verwandelt, oder ansto
 $x' x'' x''' \dots x^{(m)}$ respektive setzt: $\varphi_1(t_1); \varphi_2(t_2)$
 $\varphi_3(t_3)$ u. $\varphi_m(t_m)$; so wird der Coefficient d
 Produktes $\{\alpha_1^{n_1} \cdot \alpha_2^{n_2} \cdot \alpha_3^{n_3} \dots \alpha_m^{n_m}\}$ seyn:

$$\left\{ \frac{d^{\lambda-m} \cdot T}{dt_1^{n_1-1} \cdot dt_2^{n_2-1} \cdot dt_3^{n_3-1} \dots dt_m^{n_m-1}} \right\} \frac{1.2.3 \dots n_1 \times 1.2.3 \dots n_2 \times 1.2 \dots n_3 \text{ u. } 1.2.3 \dots n_m}{1.2.3 \dots n_1 \times 1.2.3 \dots n_2 \times 1.2 \dots n_3 \text{ u. } 1.2.3 \dots n_m}$$

worin

$$\lambda = (n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_m).$$

Dieser Satz läßt sich, wenn man die Art.
 angewandten Schlüsse weiter fortsetzt, sich noch
 folgende Art ausdrücken: der Coefficient des P
 duktes:

$$\alpha_1^{n_1} \cdot \alpha_2^{n_2} \cdot \alpha_3^{n_3} \dots \alpha_m^{n_m}$$

ist:

$$\left\{ \frac{d^{\lambda-m} \cdot \left(\frac{d^m u}{d\alpha_1 \cdot d\alpha_2 \cdot d\alpha_3 \dots d\alpha_m} \right)}{1.2.3 \dots n_1 \times 1.2 \dots n_2 \times dt_1^{n_1-1} \cdot dt_2^{n_2-1} \text{ u. } dt_m^{n_m-1}} \right\}$$

sofern man nur im entwickelten partiellen Differenzial:

$$\left(\frac{d^m u}{d\alpha_1 d\alpha_{II} d\alpha_{III} \dots d\alpha_m} \right)$$

das man sehr leicht aus den gegebenen Funktionalgleichungen ableiten wird, indem man nur in u die dortigen Werthe für $x' x'' x''' \dots x^{(m)}$ substituirt, und die Größen $z_1 z_2 z_3 \dots z_m u$ in $Z_1^{n_1}; Z_2^{n_2}; Z_3^{n_3}; \dots$ und U verwandelt, und $\alpha_1 = 0, \alpha_{II} = 0, \alpha_{III} = 0, \dots$ setzt.

$$I = \varphi_1(t_1 + \alpha_1 z_{1,1} + \alpha_1^2 z_{1,2} + \alpha_1^3 z_{1,3} + \dots)$$

$$II = \varphi_2(t_{II} + \alpha_{II} z_{2,1} + \alpha_{II}^2 z_{2,2} + \alpha_{II}^3 z_{2,3} + \dots)$$

$$III = \varphi_3(t_{III} + \alpha_{III} z_{3,1} + \alpha_{III}^2 z_{3,2} + \alpha_{III}^3 z_{3,3} + \dots)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$I^{(m)} = \varphi_m(t_m + \alpha_m z_{m,1} + \alpha_m^2 z_{m,2} + \alpha_m^3 z_{m,3} + \dots)$$

worin $z \dots$ gegebene Funktionen von $x' x'' x''' \dots x^{(m)}$ sind, wird man die Funktion $u = \psi[x', x'', x''', \dots x^{(m)}]$ eine nach Potenzen und Produkten von Potenzen der Größen $\alpha, \alpha_{II}, \alpha_{III} \dots \alpha_m$ entwickeln können.

Betrachten wir bloß die erste der gegebenen Funktionalgleichungen; so wird der Coefficient der Po-

tenz α, n in der Entwicklungsreihe für u ein Aggregat von Gliedern von der Form:

$$\left\{ \frac{d\lambda_1 \cdot \left(\frac{\nu_1' \cdot \nu_1'' \cdot \nu_1''' \cdot \nu_1^{(m)} \left(\frac{du}{dt_1} \right)}{z_{1,1} \cdot z_{1,2} \cdot z_{1,3} \cdot \dots \cdot z_{1,m}} \right)}{I.2 \dots \nu_1' \times I.2 \dots \nu_1'' \times I.2 \dots \nu_1''' \times c. I.2 \dots \nu_1^{(m)} \cdot dt_1^{\lambda_1}} \right\}$$

für welche Glieder:

$$\nu_1' + \nu_1'' + \nu_1''' + \dots + \nu_1^{(m)} = \lambda_1 \text{ und}$$

$$\nu_1' + 2 \cdot \nu_1'' + 3 \nu_1''' + \dots + m \nu_1^{(m)} = n,$$

ist. Ich werde, der Kürze wegen, ein jedes solches Glied mit:

$$\left(\frac{\lambda_1 \cdot r_1 \left(\frac{du}{dt_1} \right)}{d \cdot z \cdot dt_1^{\lambda_1}} \right)$$

bezeichnen, so daß ϱ , das Produkt:

$$[I.2 \dots \nu_1' \times I.2 \dots \nu_1'' \times I.2 \dots \nu_1''' \times c. I.2 \dots \nu_1^{(m)}]$$

und z das Produkt:

$$z_{1,1} \cdot z_{1,2} \cdot z_{1,3} \cdot \dots \cdot z_{1,m}$$

andeutet. Man wird nun nach der im Vorhergehenden gegebenen Anleitung den Innbegriff aller dieser Glieder für jedes n , leicht auffinden können.

Da $\left(\frac{du}{d\alpha_1}\right)$ für $\alpha_1 = 0$, gleich ist $z_{1,1} \cdot \left(\frac{du}{dt_1}\right)$;
 sieht man, daß jedes Glied der Entwicklung
 $\left(\frac{d^{n_1} u}{d\alpha_1^{n_1}}\right)$ aus $\left(\frac{du}{d\alpha_1}\right)$ abgeleitet werden könne,
 wenn man nur in diesem partiellen Differenzial $\frac{r_1}{\varrho_1}$ an-
 statt $z_{1,1}$ und $\alpha_1 = 0$ setzt.

Es ist also :

$$\sum_{n_1} \left(\frac{d^{\lambda_1} \cdot \left(\frac{du}{d\alpha_1}\right)}{dt_1^{\lambda_1}} \right) =$$

$$n_1 \left(\frac{d^{\lambda_1} \cdot \frac{r_1}{\varrho_1} \cdot z_{1,1} \cdot \left(\frac{du}{dt_1}\right)}{dt_1^{\lambda_1}} \right) = \left(\frac{d^{n_1} u}{d\alpha_1^{n_1}} \right) \dots (a')$$

wenn man nur im partiellen Differenzial $\left(\frac{du}{d\alpha_1}\right)$,
 $\alpha_1 = 0$ setzt, und $z_{1,1}$ in $\frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{r_1}{z}$ verwandelt.

Wir schließen ebenso, daß :

$$\left(\frac{d^{n_n} u}{d\alpha_n^{n_n}} \right) =$$

$$\sum_{n,} \left(\frac{d^{\lambda_{n,}} \left(\frac{du}{d\alpha_{n,}} \right)}{dt_{n,}^{\lambda_{n,}}} \right), \dots\dots (a)$$

wofern man nur im partiellen Differenzial $\left(\frac{du}{d\alpha_{n,}} \right)$ nach der Differenziation $\alpha_{n,} = 0$ setzt, und $z_{2,1}$ in die Gleichung der Form $\frac{1}{\rho_{n,}} \cdot z_{n,}''$ verwandelt.

Setzt man in der vorhergehenden Gleichung (a) für u das partielle Differenzial $\left(\frac{d^{n_{n,}u}}{d\alpha_{n,}^{n_{n,}}} \right)$ im Theile linker Hand, und dessen Werth aus der Gleichung (a'') im Theile rechter Hand; so wird man erhalten

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^{n_{n,} + n_{n,}u}}{d\alpha_{n,}^{n_{n,}} \cdot d\alpha_{n,}^{n_{n,}}} \right) = \\ & \sum_{n,} \left\{ \frac{d^{\lambda_{n,}} \cdot \left(\frac{d\Sigma_{n_{n,}}}{d\alpha_{n,}} \right)}{dt_{n,}^{\lambda_{n,}}} \right\} \\ & \sum_{n,} \left\{ \frac{d^{\lambda_{n,}} \cdot \left[\sum_{n_{n,}} \left(\frac{d^{\lambda_{n,}} \left(\frac{d^2u}{d\alpha_{n,} \cdot d\alpha_{n,}} \right)}{dt_{n,}^{\lambda_{n,}}} \right) \right]}{dt_{n,}^{\lambda_{n,}}} \right\} \end{aligned}$$

$$\sum_{n_1} \left\{ \sum_{n_{11}} \left(\frac{d^{\lambda_1 + \lambda_{11}} \left(\frac{d^2 u}{d\alpha_1 \cdot d\alpha_{11}} \right)}{dt_1^{\lambda_1} \cdot dt_{11}^{\lambda_{11}}} \right) \right\}$$

Wenn man nur nach der Entwicklung von $\left(\frac{d^2 u}{d\alpha_1 \cdot d\alpha_{11}} \right)$
 desmal $\alpha_1 = 0$, $\alpha_{11} = 0$ setzt, und $z_{1,1}$ und $z_{2,1}$ in
 $\frac{r'}{z}$ und $\frac{1}{z} \cdot \frac{r''}{z}$ verwandelt.

Wir werden diese Entwicklung noch kürzer so an-
 zeichnen:

$$\left(\frac{d^{n_1 + n_{11}}}{d\alpha_1^{n_1} \cdot d\alpha_{11}^{n_{11}}} \right) =$$

$$\sum_{n_1 + n_{11}} \left\{ \frac{d^{\lambda_1 + \lambda_{11}} \left(\frac{d^2 u}{d\alpha_1 \cdot d\alpha_{11}} \right)}{dt_1^{\lambda_1} \cdot dt_{11}^{\lambda_{11}}} \right\}$$

Man wird nun im Allgemeinen leicht schließen
 können, daß der Coefficient des Gliedes:

$$\left[\begin{array}{cccc} n_1 & n_{11} & n_{111} & n_{(m)} \\ \alpha_1 & \alpha_{11} & \alpha_{111} & \dots \alpha_{(m)} \end{array} \right]$$

seyn wird:

$$\sum_v \left\{ \frac{d^{\lambda_1 + \lambda'' + \lambda''' \dots \lambda_{(m)}} u}{d\alpha_1 \cdot d\alpha'' \dots d\alpha_{(m)}} \right\} \frac{1}{dt_1^{\lambda_1} \cdot dt''^{\lambda''} \cdot dt'''^{\lambda'''} \dots dt_{(m)}^{\lambda_{(m)}}}$$

worin:

$$v = [n_1 + n'' + n''' + \dots + n_{(m)}]$$

$$\lambda_1 = [\nu'_1 + \nu''_1 + \nu'''_1 + \dots + \nu_{(m)}^{(m)}]$$

$$\lambda'' = [\nu'_2 + \nu''_2 + \nu'''_2 + \dots + \nu_{(m)}^{(m)}]$$

$$\dots$$

wenn man nur nach den Differenziationen

$$\alpha_1 = 0; \alpha'' = 0; \alpha''' = 0, \dots \alpha_{(m)} = 0$$

setzt, und

$$z_{1,1}; z_{2,1}; z_{3,1} \dots z_{m,1}$$

in die Produkte:

$$\frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{r_1}{z}; \frac{1}{\varrho''} \cdot \frac{r''}{z}; \frac{1}{\varrho'''} \cdot \frac{r'''}{z}; \dots \frac{1}{\varrho_{(m)}} \cdot \frac{r_{(m)}}{z}$$

verwandelt.

Was die Größe $\left(\frac{d^m u}{d\alpha_1 \cdot d\alpha_2 \cdot \dots \cdot d\alpha_m} \right)$ betrifft; so wird diese auf eben die Art entwickelt werden können, als im vorhergehenden Art. gezeigt wurde.

Hat man auf diese Weise alle möglichen Glieder des Coefficienten entwickelt; so wird man endlich noch u in Z und U verwandeln.

III.

22. Da wir durch das im Vorhergehenden entdeckte Gesetz in den Stand gesetzt worden sind, aus der gegebenen Gleichung:

$$= \varphi [t + \alpha \cdot f_1(x) + \alpha^2 \cdot f_2(x) + \alpha^3 \cdot f_3(x) \dots]$$

nicht nur x ; sondern jede andere beliebige Funktion von x , als $\psi(x)$, in eine nach den Potenzen von α steigende Reihe von der Form:

$$\psi(x) =$$

$$\chi_0(t) + \alpha \cdot \chi_1(t) + \alpha^2 \cdot \chi_2(t) + \alpha^3 \cdot \chi_3(t) + \dots$$

zu entwickeln, worin die Funktionen $\chi_0(t)$, $\chi_1(t)$, $\chi_2(t)$, \dots nach einem gemeinschaftlichen Gesetze aus den Funktionen $f_1, f_2, f_3, \dots, \varphi \psi$ abgeleitet werden;

so sieht man, daß sich auch noch jede andere Funktion von α und x , wenn sie die Form hat:

$$\Psi =$$

$$\{\psi_0(x) + \alpha \cdot \psi_1(x) + \alpha^2 \cdot \psi_2(x) + \alpha^3 \cdot \psi_3(x) + \dots$$

leicht durch eine von eben dieser Form entwickeln lassen

Sucht man nämlich nach dem im Vorhergehenden gefundenen allgemeinen Gesetze die Funktionen:

$$\psi_0(x) =$$

$$\overset{\circ}{\chi}_0(t) + \alpha \cdot \overset{\circ}{\chi}_1(t) + \alpha^2 \cdot \overset{\circ}{\chi}_2(t) + \alpha^3 \cdot \overset{\circ}{\chi}_3(t) + \dots$$

$$\psi_1(x) =$$

$$\overset{1}{\chi}_0(t) + \alpha \cdot \overset{1}{\chi}_1(t) + \alpha^2 \cdot \overset{1}{\chi}_2(t) + \alpha^3 \cdot \overset{1}{\chi}_3(t) + \dots$$

$$\psi_2(x) =$$

$$\overset{2}{\chi}_0(t) + \alpha \cdot \overset{2}{\chi}_1(t) + \alpha^2 \cdot \overset{2}{\chi}_2(t) + \alpha^3 \cdot \overset{2}{\chi}_3(t) + \dots$$

• • • • •

und setzt:

$$\psi(t) = \overset{\circ}{\chi}_0(t);$$

$$\chi_1(t) = \overset{\circ}{\chi}_1(t) + \overset{1}{\chi}_0(t);$$

$$\chi_1(t) = \overset{\circ}{\chi}_2(t) + \overset{1}{\chi}_1(t) + \overset{2}{\chi}_0(t);$$

$$\chi_2(t) = \overset{\circ}{\chi}_3(t) + \overset{1}{\chi}_2(t) + \overset{2}{\chi}_1(t) + \overset{3}{\chi}_0(t);$$

überhaupt:

$$\chi_n(t) = \overset{\circ}{\chi}_{n+1}(t) + \overset{1}{\chi}_n(t) + \overset{2}{\chi}_{n-1}(t) + \dots + \overset{n}{\chi}_0(t);$$

wird man endlich haben:

$$\Psi = \chi_0(t) + \alpha \cdot \chi_1(t) + \alpha^2 \cdot \chi_2(t) + \alpha^3 \cdot \chi_3(t) + \dots$$

23. Mittelfst dieser Formeln kann man nun ohne Schwierigkeit nachstehendes Problem lösen:

Wenn man die zwei Funktionalgleichungen hat:

$$\begin{aligned} &= \varphi[f_0(x) + \alpha \cdot f_1(x) + \alpha^2 \cdot f_2(x) + \dots] \\ &= \psi[F_0(x) + \alpha \cdot F_1(x) + \alpha^2 \cdot F_2(x) + \dots], \end{aligned}$$

in f, F, φ, ψ gegebene Funktionen sind; so läßt sich die Größe x aus beiden Gleichungen so eliminiren, daß man t in eine nach Potenzen von α steigende Reihe, deren Coefficienten Funktionen von y sind; so wie umgekehrt y in eine solche Reihe, worin die Coefficienten Potenzen von α Funktionen von t sind, verwandeln kann; also daß die in Rede stehenden zwei Reihen von der Form:

$$t = \overset{\circ}{\Phi}(y) + \alpha \cdot \overset{1}{\Phi}(y) + \alpha^2 \cdot \overset{2}{\Phi}(y) + \alpha^3 \cdot \overset{3}{\Phi}(y) + \dots$$

$$y = \overset{\circ}{\Psi}(t) + \alpha \cdot \overset{1}{\Psi}(t) + \alpha^2 \cdot \overset{2}{\Psi}(t) + \alpha^3 \cdot \overset{3}{\Psi}(t) + \dots$$

Denn es ist klar, daß jede der gegebenen Funktionalgleichungen auf die Form:

$$x = \Pi[\overset{\circ}{\varphi}(t) - \alpha \cdot f_1(x) - \alpha^2 \cdot f_2(x) - \dots]$$

und:

$$x = \Delta[\overset{\circ}{\psi}(y) - \alpha \cdot F_1(x) - \alpha^2 \cdot F_2(x) - \dots]$$

gebracht werden könne, worin $\Pi \Delta$ und $\overset{\circ}{\varphi} \overset{\circ}{\psi}$ als $\varphi \psi f_0 F_0$ bestimmbar Funktionen sind. Setzt man nun den Werth von x aus der ersten Gleichung in die zweite; so läßt sich y durch t bestimmen, und umgekehrt.

24. Von dem im vorhergehenden Artikel vorgelegten Probleme, wollen wir einen einfacheren und sehr merkwürdigen Fall betrachten. Es sey nämlich aus der Gleichung:

$$t = x + \alpha \cdot f_1(x) + \alpha^2 \cdot f_2(x) + \alpha^3 \cdot f_3(x) + \dots$$

die Größe x zu suchen, so zwar, daß:

$$x = t + \alpha \cdot \psi_1(t) + \alpha^2 \cdot \psi_2(t) + \alpha^3 \cdot \psi_3(t) + \dots$$

Man findet, dem allgemeinen Entwicklungsgesetze der Funktionen gemäß, ganz leicht:

$$(t) = t;$$

$$\psi_1(t) = \psi_1(t) = -f_1(t);$$

$$\psi_2(t) = \psi_2(t) = \left[\frac{1}{1.2} (f_1^2)' - f_2 \right];$$

$$\psi_3(t) = \psi_3(t) = \left[\frac{-1}{1.2.3} (f_1^3)'' + (f_1 f_2)' - f_3 \right];$$

$$\begin{aligned} \psi_4(t) = \psi_4(t) = & \left[+ \frac{1}{1.2.3.4} (f_1^4)''' - \frac{1}{1.2} (f_1^2 f_3)'' \right. \\ & \left. + \frac{1}{1.2} (f_2^2)' + (f_1 f_3)' - f_4 \right]; \end{aligned}$$

f. w.

und umgekehrt wird man wieder schließen können:

$$\psi_1(t) = -\psi_1(t);$$

$$\psi_2(t) = \left[+ \frac{1}{1.2} (\psi_1^2)' - \psi_2 \right];$$

$$\psi_3(t) = \left[- \frac{1}{1.2.3} (\psi_1^3)'' + (\psi_1 \psi_2)' - \psi_3 \right];$$

$$\begin{aligned} \psi_4(t) = & \left[+ \frac{1}{1.2.3.4} (\psi_1^4)''' - \frac{1}{1.2} (\psi_1^2 \psi_2)'' \right. \\ & \left. + \frac{1}{1.2} (\psi_2^2)' + (\psi_1 \psi_3)' - \psi_4 \right]; \end{aligned}$$

Die wirkliche Entwicklung der Gleichungen, welche diese zwei Systeme enthalten, führt uns unmittelbar zu den nachstehenden Relationen:

$$\psi_1 + f_1 = 0;$$

$$\psi_2 + f_2 + \psi_1 f'_1 = 0;$$

$$\psi_3 + f_3 + f'_1 \psi_2 + f'_2 \psi_1 + \frac{1}{2} \psi_1^2 f''_1 = 0;$$

$$\begin{aligned} \psi_4 + f_4 + \psi_1 f'_3 + \psi_2 f'_2 + f'_1 \psi_3 + \psi_1 \psi_2 f'_1 \\ + \frac{1}{2} \psi_1^2 f''_2 + \frac{1}{6} \psi_1^3 f'''_1 = 0 \end{aligned}$$

u. s. w.

und durch bloße Vertauschung der Charaktere ψ f findet man:

$$f_1 + \psi_1 = 0;$$

$$f_2 + \psi_2 + f_1 \psi'_1 = 0;$$

$$f_3 + \psi_3 + \psi'_1 f_2 + \psi'_2 f_1 + \frac{1}{2} \psi''_1 f_1^2 = 0;$$

$$\begin{aligned} f_4 + \psi_4 + \psi'_3 f_1 + \psi'_2 f_2 + \psi'_1 f_3 + \psi''_1 f_1 f_2 \\ + \frac{1}{2} \psi''_2 f_1^2 + \frac{1}{6} f_1^3 \psi'''_1 = 0 \end{aligned}$$

u. s. w.

in welchen Gleichungen die oberen Striche die abgeleiteten Funktionen bedeuten.

Werden je zwei einander entsprechende Gleichungen dieser beiden Systeme durch Addition verbunden so wird man nach einigen einfachen Reduktionen an folgende Gleichungen geführt werden:

$$(f_1 + \psi_1) = 0;$$

$$(f_2 + \psi_2) + \frac{1}{2} (f_1 \psi_1)' = 0; \text{ oder}$$

$$(f_2 + \psi_2) - \frac{1}{4} (f_1^2 + \psi_1^2)' = 0;$$

$$(f_3 + \psi_3) + \frac{1}{2} \cdot (f_2 \psi_1 + f_1 \psi_2)' = 0; \text{ oder}$$

$$(f_3 + \psi_3) - \frac{1}{2} \cdot (f_1 f_2 + \psi_1 \psi_2)' = 0;$$

$$(f_4 + \psi_4) - \frac{1}{2} (f_1 f_3 + \psi_1 \psi_3)' + \frac{1}{8} (f_1^2 f_1' + \psi_1^2 \psi_1')$$

$$- \frac{1}{4} (f_2^2 + \psi_2^2)' - \frac{1}{2} (f_1 f_2 f_1' + \psi_1 \psi_2 \psi_1'')$$

$$+ \frac{1}{4} (f_1^2 f_1' + \psi_1^2 \psi_1'') - \frac{1}{12} (f_1''' f_1^2 + \psi_1''' \psi_1^3)$$

$$= 0; \text{ u.}$$

Mit diesen Gleichungen können noch unzählig andere Transformationen vorgenommen werden. Unter diesen sind diejenigen die merkwürdigsten, welche in Bezug auf f und ψ völlig ähnliche Theile zerlegen lassen, oder die überhaupt unter der Form:

$$\Gamma_n(f) + \Gamma_n(\psi) = 0$$

ausgedrückt werden können, wo durch das Zeichen Γ_n die Zusammensetzung aus den hinter demselben stehenden Funktionen angedeutet wird. Aus den so eben entwickelten Gleichungen läßt sich entnehmen, daß:

$$\Gamma_1(f) = f_1;$$

$$\Gamma_2(f) = \left[f_2 - \frac{1}{4} (f_1^2)' \right];$$

$$\Gamma_3(f) = \left[f_3 - \frac{1}{2} (f_1 f_2)' \right];$$

u. s. w.

25. Wenn in der Gleichung (Art. 6): die Funktionen z_2, z_3, \dots alle gleich Null gesetzt werden, wenn $z_1 = 1$; so daß bloß:

$$x = \varphi(t + \alpha)$$

zu entwickeln wäre; alsdann erhielte man folgende Bestimmungen:

$$\chi(t) = \varphi(t);$$

$$\chi_1(t) = \varphi'(t);$$

$$\chi_2(t) = \frac{1}{1 \cdot 2} \varphi''(t);$$

$$\chi_3(t) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varphi'''(t);$$

.

und überhaupt:

$$\chi_n(t) = \frac{\varphi^{(n)}(t)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots n};$$

Es wäre demnach:

$$x = \varphi(t + \alpha) =$$

$$\left\{ \varphi(t) + \alpha \cdot \varphi'(t) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \varphi''(t) + \dots \right\}$$

Diese Entwicklung ist unter dem Namen der *Taylor'schen Formel* bekannt.

Unter denselben Voraussetzungen hat man:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi[\varphi(t + \alpha)] = \\ &= \psi(\varphi(t)) + \alpha \cdot \frac{\varphi'(t) \cdot \psi'(\varphi(t))}{1} + \alpha^2 \cdot \frac{(\varphi'(t) \cdot \psi'(\varphi(t)))'}{1 \cdot 2} \\ &\quad + \alpha^3 \cdot \frac{(\varphi'(t) \cdot \psi'(\varphi(t)))''}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \end{aligned}$$

Wenn bloß $f_2 f_3 f_4 \dots$ gleich Null gesetzt werden; so daß man hat:

$$x = \varphi[t + \alpha \cdot f_1(x)];$$

Dann ist die gegebene Funktion $\psi(x)$ aus dieser Gleichung:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \left\{ \psi(\varphi(t)) + \frac{\alpha}{1} \cdot ((\psi \varphi t)' \cdot f_1(\varphi t)) + \right. \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} ((\psi \varphi t)' \cdot f_1^2(\varphi t))' + \\ &\quad + \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} ((\psi \varphi t)' \cdot f_1^3(\varphi t))'' + \\ &\quad \left. + \dots \right\} \end{aligned}$$

Dieser Satz, welcher von *La Grange* entdeckt worden ist, führt von diesem Analysten den Namen.

26. Zum Schluß dieser Untersuchungen will ich ein Beispiel zu demjenigen Falle geben, in welchem eine Funktion von i von der Form:

$$u = a_1 \cdot i + a_2 \cdot i^2 + a_3 \cdot i^3 + \dots$$

ist, worin $a_1 a_2 a_3 \dots$ Größen bedeuten, die von i unabhängig sind. Wenn nun u eine Funktion von i ist, welche für $i = 0$, so wie ihre abgeleiteten für eben diesen Fall nicht unendlich werden; so wird man u in eine nach Potenzen von α fortschreitende Reihe verwandeln können; so daß:

$$u = V_0 + V_1 \alpha + V_2 \alpha^2 + V_3 \alpha^3 + \dots$$

Die bei Bestimmung der Coefficienten $V_0 V_1 V_2 \dots$ gemäß Art. I. vorkommenden partiellen Differenziale $\left(\frac{du}{di}\right), \left(\frac{d^2u}{di^2}\right), \dots$ werden nach denselben Gesetzen entwickelt, als wir vorher gefunden haben.

Wir wollen nun annehmen, daß

$$u = i \cdot \varphi'(x) + \frac{i^2}{1 \cdot 2} \cdot \varphi''(x) + \frac{i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varphi'''(x) + \dots$$

worin $\varphi' \varphi'' \varphi''' \dots$ die abgeleiteten Funktionen einer gegebenen Funktion $\varphi(x)$ bedeuten. Es ist nämlich wie man leicht sieht:

$$u = [\varphi(x+i) - \varphi(x)].$$

Wenn nun $u = f(x+i)$, in die nach Potenzen von α fortschreitende Reihe

$$u = V_0 + V_1 \alpha + V_2 \alpha^2 + V_3 \alpha^3 + \dots$$

verwandeln ist; dann hat man wegen:

$$\left(\frac{u}{i}\right)_0 = f'(x) \text{ und wegen } \left(\frac{d\alpha}{di}\right)_0 = \varphi'(x);$$

$$V_1 = \left\{ \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \right\}$$

Ebenso findet man weiter:

$$V_2 = \left\{ \frac{\left(\frac{dV_1}{dx}\right)}{1.2.\varphi'(x)} \right\};$$

$$V_3 = \left\{ \frac{\left(\frac{dV_2}{dx}\right)}{1.2.3.\varphi'(x)} \right\};$$

u.

Dieser Satz läßt sich anders auch so ausdrücken, wenn man bemerkt, daß für $i = \Delta x$, $\alpha = \Delta \varphi(x)$ wird:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \psi_1(x) \cdot \Delta(\varphi x) + \psi_2(x) \cdot (\Delta \varphi x)^2 + \dots$$

daß die Funktionen $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \dots$ leicht aus nachfolgenden Gleichungen gefunden werden:

$$\psi_1(x) = \left\{ \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \right\};$$

$$\psi_2(x) = \left(\frac{\psi'_1 x}{1.2.\varphi' x} \right); \psi_3(x) = \left(\frac{\psi'_2 x}{1.2.3.\varphi'' x} \right); \text{ u.}$$

Dieser Satz wurde zuerst von Soldner bekannt.

1800

1800

1800

1800

1800

1800

1800

1800

1800

1800

1800

1800

1800

1800

Druckfehler.

37 Zeile 5 von unten, anstatt erleichtern
ließ erläutern.

53 — 3, anstatt $\begin{matrix} v' & v'' & v''' \\ z & \cdot & z & \cdot & z & \cdot & \cdot \end{matrix}$ ließ
 $\begin{matrix} v' & v'' & v''' \\ z_p & \cdot & z_q & \cdot & z_r & \cdot & \cdot \end{matrix}$

68 — 4, anstatt $d \cdot dt$, ließ $dt \cdot dt$,

71 — 5, lasse man weg: und

71 — 9, setze man hiezu: Wenn überhaupt:

74 — 1, anstatt (a) ließ (a'')

1874

1874

1874

1874

1874

1874

MATHEMATICAL NOTES.*

By THOMAS MUIR, M.A., F.R.S.E.

I. ON INTEGRATION BY PARTS.

INSTEAD of devoting a paragraph to "Integration by Parts," resulting in the formula

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$$

the authors of treatises on the Integral Calculus might perhaps advantageously treat the subject in the following developed form.

INTEGRATION OF A PRODUCT.

Let the two functions be $\phi(x)$, $\psi(x)$, and let the successive differential coefficients of the former be denoted by $\phi^1(x)$, $\phi^2(x)$, etc., and the successive integrals of the latter by $\psi^{-1}(x)$, $\psi^{-2}(x)$, etc.: then since

$$\frac{d}{dx} \{ \phi(x) \psi^{-1}(x) \} = \phi(x) \psi(x) + \phi^1(x) \psi^{-1}(x)$$

we have by transposition of last term and integration of both sides

$$\int \phi(x) \psi(x) dx = \phi(x) \psi^{-1}(x) - \int \phi^1(x) \psi^{-1}(x) dx$$

$$\text{or } \int \phi^1(x) \psi^{-1}(x) dx = \phi^1(x) \psi^{-2}(x) - \int \phi^2(x) \psi^{-2}(x) dx$$

Continuing the process, we find as our general formula for the integration of a product—

$$\begin{aligned} \int \phi(x) \psi(x) dx = & \phi(x) \psi^n(x) - \phi^1(x) \psi^{n-2}(x) + \phi^2(x) \psi^{n-3}(x) - \phi^3(x) \psi^{n-4}(x) \\ & + \dots + (-1)^n \int \phi^n(x) \psi^{-n}(x) dx \quad \dots \quad (A) \end{aligned}$$

From this the practical value of the method of integration by parts is

* From the "Journal of Education," Dec., 1876.

apparent, for a glance at it suffices to enable us to affirm the following proposition :—

$\int \phi(x) \psi(x) dx$ can be found if, for some value of n , $\psi(x)$ can be integrated n times, and the integral of $\phi^n(x) \psi^{-n}(x)$ be either (1) known or (2) be expressible in terms of $\int \phi(x) \psi(x) dx$.

A common case of the former condition being satisfied is when $\phi(x)$ is an algebraical function of the m^{th} degree, and $\psi(x)$ is integrable m times; and the simplest case of the latter condition holding is when ϕ and $\psi(x)$ are recurring functions like e^x , $\sin x$, etc.

In regard to the arrangement of the work in practice students will find the following directions of value :—Write the two functions at some distance from each other in a line: put below the one its successive differential coefficients, and below the other its successive integrals: find if possible, a line such that the integral of the product of its members is known or is expressible in terms of the integral sought: multiply 1st term of the 1st column by the 2nd term of the 2nd column, 2nd term of the 1st column by the 3rd term of the 2nd column, &c. so on, until the line referred to is reached, when the integral of the product of its members is taken: then, the required integral = this series of terms connected by the signs + and — alternately.

Ex. 1.—Find $\int x^3 \cos bx dx$.

$$\begin{array}{rcl}
 x^3 & & \cos bx \\
 & \cdot & \\
 3x^2 & & \frac{\sin bx}{b} \\
 & \cdot & \\
 6x & & \frac{-\cos bx}{b^2} \\
 & \cdot & \\
 6 & & \frac{-\sin bx}{b^3} \\
 & \cdot & \\
 0 & & \frac{\cos bx}{b^4}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \int x^3 \cos bx dx &= x^3 \frac{\sin bx}{b} - 3x^2 \left(\frac{-\cos bx}{b^2} \right) - 6x \left(\frac{\sin bx}{b^3} \right) - 6 \cos bx \\
 &= \frac{x^3 \sin bx}{b} + 3x^2 \frac{\cos bx}{b^2} - \frac{6x \sin bx}{b^3} - \frac{6 \cos bx}{b^4}
 \end{aligned}$$

Of course we may stop after any number of terms of the result have been obtained, provided we append the proper corrective term ('the remainder after n terms') viz., the integral of the product of the members of the series which has been reached. Thus,

$$\int x^3 \cos bx dx = \frac{x^3 \sin bx}{b} + 3x^2 \frac{\cos bx}{b^2} - \int 6x \frac{\cos bx}{b^2} dx.$$

Ex. 2.—Find $\int e^{-x} \sin x \, dx$

$$\begin{array}{rcl} e^{-x} & & \sin x \\ & \cdot & \\ -e^{-x} & & \cos x \\ & \cdot & \\ e^{-x} & & -\sin x \end{array}$$

$$\int e^{-x} \sin x \, dx = e^{-x} (-\cos x) - (-e^{-x}) (-\sin x) + \int e^{-x} (-\sin x) \, dx$$

$$\therefore 2 \int e^{-x} \sin x \, dx = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x$$

$$\therefore \int e^{-x} \sin x \, dx = -\frac{e^{-x}}{2} (\cos x + \sin x)$$

In conclusion the student's attention might be called to the fact that the formula (A) for the *integration* of a product and the formula for the *differentiation* of a product are corresponding cases of Leibnitz's general theorem regarding $\frac{d^n}{dx^n} \{ \phi(x) \psi(x) \}$ viz., when $n = -1$, and when $n =$; and, further, that when unity is taken for $\psi(x)$ in (A) we have

$$\begin{aligned} \int \phi(x) \, dx &= x \phi(x) - \frac{x^2}{2} \phi'(x) + \frac{x^3}{3} \phi''(x) + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \phi^{(n-1)}(x) \\ &+ \frac{(-1)^n}{n} \int x^n \phi^{(n)}(x) \, dx \end{aligned}$$

whence Bernouilli's Series for $\int_0^a \phi(x) \, dx$

1. Prove that (R being any positive integer),

$$\frac{n}{R} - \frac{n-1}{1 \cdot R-1} + \frac{n-2}{2 \cdot R-2} - \frac{n-3}{3 \cdot R-3} + \dots = 0$$

It is the same as to show that—

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{R} - \frac{1}{1 \cdot R-1} + \frac{1}{2 \cdot R-2} - \frac{1}{3 \cdot R-3} + \dots \right\} \\ & - \left\{ \frac{1}{1 \cdot R-1} - \frac{2}{2 \cdot R-2} + \frac{3}{3 \cdot R-3} - \frac{4}{4 \cdot R-4} + \dots \right\} = 0 \\ & \left\{ \frac{1}{R} - \frac{1}{1 \cdot R-1} + \frac{1}{2 \cdot R-2} - \frac{1}{3 \cdot R-3} + \dots \right\} \\ & - \left\{ \frac{1}{R-1} - \frac{1}{1 \cdot R-2} + \frac{1}{2 \cdot R-3} - \frac{1}{3 \cdot R-4} + \dots \right\} = 0 \end{aligned}$$

or say, $n \phi(R) + \phi(R - 1)$ -
 and, n being any number independent of R , this is the same as to sh
 that $\phi(R) -$

or $\frac{1}{R} \phi(R)$

$$\text{i.e., } 1 - \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} - 1} + \frac{\frac{1}{R}}{\frac{2}{R} - 2} - \frac{\frac{1}{R}}{\frac{3}{R} - 3} + \dots$$

which is the well-known theorem that the total number of combinatio
 of R things taken one at a time, three at a time, five at a time, e
 exceeds the total number when taken two at a time, four at a time,
 at a time, etc., by unity.

VIII. Programm

der

Kaiser Franz Josef-Staats-Realschule in Plan.

Veröffentlicht am Schlusse des Schuljahres
1905—1906.

Inhalt:

- 1 Über die Einführung der Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung in den Mittelschulunterricht von Ludw. Nagele.
- 2 Tuberkuloseprophylaxe vom schulhygienischen Standpunkte. Vortrag von Dr. Ferd. Urban.
- 3 Schulnachrichten, zusammengestellt vom Direktor.



Plan 1906.

Selbstverlag der Kaiser Franz Josef-Staats-Realschule.

Druck von Anton Knab in Plan.



Über die Einführung der Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung in den Mittelschulunterricht. *)

Von Prof. Ludwig Nagele.

Die Naturwissenschaften sind in einem Aufschwunge begriffen, der täglich neue Errungenschaften zeitigt. Wenn es auch nicht Aufgabe der Mittelschule ist, alle die neuen Tatsachen, die auf uns einstürmen, weiterens den Schülern zu vermitteln, da ihnen oft erst der einheitliche Zusammenhang gegeben werden muß, so wird gewiß mancher von unseren Lehrern eine Empfindung haben, als bliebe die Mittelschule zurück, als wäre es ihr nicht möglich dem überraschenden Fortschritt in einzelnen Wissenszweigen zu folgen. Es muß aber doch sein, und an dieser Stelle soll ein Beitrag zu dem jetzt viel erörterten Thema geliefert werden, das sich mit der Einführung der Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung in den Mittelschulunterricht beschäftigt.

Schon die Auffassung der Mathematik als Wissenschaft kann keine unveränderliche sein. Ein Blick in die Geschichte derselben zeigt, wie zunehmende Erkenntnis und steigendes geistiges Niveau sie von gar vielen Wunderlichkeiten befreit haben, die ihr als Erbe vergangener Zeiten und kleinlicher Auffassung anhafteten. Wollen wir nicht stehen bleiben und wieder einen Ballast unnützer Dinge an sie anhängen, so muß gar Vieles, was jetzt dem Schüler, auch dem besseren, scheinbar ohne Zusammenhang ist, von höheren Gesichtspunkten aus dargestellt werden, damit die Mittelschulmathematik nicht das bleibt, was sie jetzt noch zum Teil ist, eine Aneinanderreihung verschiedener, für den Schüler scheinbar getrennter Kapitel.

Aber es gibt noch ein Wichtiges. Die Physik kann heute in den oberen Klassen als reine Experimentalwissenschaft nicht mehr behauptet werden. Nun ist aber die Art und Weise, wie die Mathematik zu Hilfe genommen wird, nicht sehr hoch anzuschlagen. Sie soll in den Grenzen bleiben, die ihr durch den mathematischen Unterricht gesteckt sind, und sich muß sie in der Physik mit Größen arbeiten — ich erwähne nur Zeitelement, Zeitelement usw. — die den Schüler fremdartig anmuten, muß Summierungen einer sehr großen Anzahl solcher „Elemente“

*) In diesem Aufsätze wurde der Realschullehrplan zur Grundlage gewählt.

durchführen und kann Ähnliches auf ihrem eigenen Gebiet doch nicht aufweisen, denn die gewissen unendlichen geometrischen Reihen, die hier vielleicht vorbildend wirken sollen, sind anderer Natur und können als Beispiel nicht zugelassen werden.

Die Gesetze der Physik sind Funktionen zweier oder mehr Veränderlichen. Das Weg-Zeitgesetz der Mechanik tritt in den mannigfaltigsten Formen auf, als $s = ct$, $s = \frac{b}{2}t^2$ bei geradlinigen Bewegungen, $s = \frac{2\pi r}{T}t$ bei der Kreisbewegung, $y = \sin x$, $y = b \sin ax$ bei schwingenden Bewegungen u. s. f. Ebenso werden Geschwindigkeit und Beschleunigung als Funktionen der Zeit dargestellt, Kräfte als Funktionen der Entfernung. So ließe sich eine ganze Reihe von Beispielen aus allen Teilen der Physik anführen, die unbedingt eine gründliche Behandlung des Funktionsbegriffes erheischen. Wie die Sachen jetzt stehen, kann dies erst in der siebenten Klasse bei der Einführung der analytischen Geometrie geschehen, und da wird dieser Begriff mit Rücksicht auf die Mathematik selbst erörtert, um die Schüler leicht an beschreibende Gleichungen zu gewöhnen. Die Physik mit ihrem reichhaltigen, lebendigen Funktionsmaterial bleibt unberührt. Man versuche man beispielsweise die Uebereinanderlegung von Wellenbewegungen, den Verlauf von Kraftlinien und Niveaulächen, elektrische Schwingungen, den Schülern beizubringen, und man wird die Erfahrung machen, daß sie immer nur einzelne Phasen der Erscheinung herausgreifen, ohne ein richtiges Bild vom Ganzen zu erhalten.

Aus allen diesen Gründen, und noch viel mehr ließen sich anführen, tritt immermehr die Notwendigkeit heran, die Ziele der Mittelschulmathematik höher zu stecken, erstens um ihrer selbst willen und zweitens, um eine bessere Einführung in den mathematischen Teil der Physik, deren einzelne Gebiete dadurch in innigern Zusammenhange treten, zu ermöglichen. Es handelt sich um die Einführung der elementaren Lehren der Infinitesimalrechnung mit gleichzeitiger eingehender Behandlung des Funktionsbegriffes. In den folgenden Zeilen wird ein Weg bezeichnet, wie ohne weitere Belastung der Schüler dieser Fortschritt erzielt werden kann.

Es wird gut sein, schon vorher anzugeben, in welchem Semester damit begonnen werden könnte. Ich glaube, daß in der sechsten Klasse, gleichzeitig mit der Goniometrie und Trigonometrie, aber von diesen getrennt, durch zwei Stunden wöchentlich das ganze erste Semester hindurch, dieser neue Lehrstoff absolviert werden kann, dessen Anwendung in den folgenden drei Semestern sich genug Gelegenheit gibt. Goniometrie und Trigonometrie werden dabei nicht

nicht verkürzt, denn gerade die eingehende Besprechung von Funktionen wird auch den goniometrischen Funktionen zugute kommen. Wenn der Einwurf gemacht wird, daß dadurch der Lehrstoff der Arithmetik, den ich mir ganz in das zweite Semester des sechsten Jahres verlegt habe, vernachlässigt wird, so glaube ich folgende Gründe dagegen anführen zu können: Im Vergleich mit der fünften Klasse sind die zwei wichtigsten Stunden für die Behandlung von Exponential- und logarithmischen Gleichungen, arithmetischen und geometrischen Reihen, Zins- und Rentenrechnungen als mehr denn ausreichend zu betrachten. Es kommt noch, daß ein so eingehendes Durcharbeiten der letzteren, in Teilen auch der arithmetischen und geometrischen Reihen, vielleicht nicht am Platze ist und gewiß nicht jene Vorteile gewährt, welche Differential- und Integralrechnung, wenn auch im bescheidensten Maße vorgetragen, durch ihre Förderung allgemeiner Erkenntnis und mathematisch-physikalischer Anschauung darbieten. Wieviele Aufgaben der Zins- und Rentenrechnung sind praktisch ohne Bedeutung, solange sie nicht mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung kombiniert als Aufgaben der Lebensversicherung auftreten. Dabei glaube ich bemerkt zu haben, daß das immer wiederkehrende Aufschreiben geometrischer Reihen dem Schüler abtumpft, während ein bloßes Auswerten der wenigen zugehörigen Formeln nur einen rein mechanischen Erfolg bedeutet.

Die Zeitfrage kann also ohne besondere Schwierigkeiten gelöst werden. Es handelt sich jetzt darum, wie der neue Lehrstoff in anmutiger Weise und an die anderen bereits gelehrtten Kapitel sich anschließen soll. Gewiß werden die Meinungen darüber geteilt sein, und deshalb soll in den nachfolgenden Abschnitten nicht der Anspruch erhoben werden, als ob diese Art des Lehrganges die allein richtige wäre; es genügt mir einen Weg anzudeuten, der zum Ziele führen kann, die bessere Ausarbeitung derselben Sache einer ausführlichen Diskussion.

Funktionen und Grenzwerte.

Die Erläuterung des Begriffes einer Funktion an jenen einfachen Funktionen, wie sie in der Mittelschule zur Kenntnis der Schüler gelangen, ist selbstverständlich. Unter Hinweis auf die unbestimmten Gleichungen des ersten Grades mit zwei Unbekannten, deren Bekanntschaft schon in der fünften Klasse gemacht wird, läßt sich zeigen, daß die durch eine solche Gleichung dargestellten Beziehungen zwischen zwei veränderlichen Größen, wenn man sie geometrisch darstellt, zu ganz bestimmten geometrischen Gebilden führen. Man wird daher an einer Reihe von Beispielen, wie

$$y = x, y = x + a, y = mx + b$$

zeigen können, daß diese Gleichungen, in ein Koordinatensystem übertragen, Gerade darstellen und wird den in der Goniometrie gewonnenen Begriff der Tangente gleich auf diese Beispiele anwenden, um die Richtungskoeffizienten zu gelangen. Dann erscheint den Schülern die Auflösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten in einem neuen Licht, als Schnittpunkt zweier Geraden, in einem ebenen Koordinatensystem. Dadurch wird schon der analytischen Geometrie, die erst in der siebenten Klasse folgt, vorgegriffen, gewiß nicht zum Schaden der Schüler und zum Schaden der Schüler, denen die analytische Geometrie dann nicht mehr als etwas Fremdes gegenüber tritt, und es wird erspart, die in der siebenten Klasse zur Wiederholung des gesamten Lehrstoffes so notwendig ist. Daran schließen sich die Gleichungen zweiten Grades. An der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ kann durch Bestimmung des y aus gegebenen x oder umgekehrt und durch nachherige Eintragung der gewonnenen Werte in ein Koordinatensystem, sowie durch Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes der genügende Nachweis geliefert werden, daß die Gleichung einen Kreis darstellt. In ähnlicher Weise kann an der Gleichung $y^2 = kx$ die Identität mit einer Parabel nachgewiesen werden. Für Ellipse und Hyperbel, wenn sie überhaupt jetzt schon in Betracht gezogen werden sollen, ist dieser Vorgang allerdings nicht mehr so einfach, aber immerhin kann an passend gewählten Beispielen ($xy = k$ und dergleichen) gezeigt werden, daß die allgemeine Gleichung zweiten Grades zwischen zwei Unbekannten irgend eine, den Schülern schon von früher bekannte Kurve darstellt.

Außer diesen Gleichungen liefern schöne Beispiele $y = \log x$, $y = a^x$, die die richtige Erfassung der Logarithmen wesentlich fördern. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ geben Gelegenheit, den Verlauf der goniometrischen Funktionen graphisch zu erläutern, wodurch manche Unbeholfenheit und Unklarheit schwinden wird. An dieser Stelle will ich bemerken, daß die Einführung des Bogenmaßes in der Goniometrie bis jetzt nur vorübergehend behandelt wurde, gar nicht in jenem Ausmaße, wie es manche Gleichungen der Physik erfordern. Die Sinuslinie kann als allgemeine Sinuslinie entsprechend der Gleichung $y = a \sin bx$ eine Erweiterung erfahren, die auch wieder der Physik zugute kommt, ebenso wie die Zusammenfassung solcher Kurven bei schwingenden und Wellenbewegungen mit gleicher oder verschiedener Phase, Fortpflanzungsrichtung, Geschwindigkeit u. s. f. ein reiches Feld eröffnet, dessen Bearbeitung nicht nur rechnerisch sondern auch konstruktiv zu den anregendsten Kapiteln der beiden Wissenschaften gehört.

Nach allen diesen Betrachtungen, an die sich noch zeichnende Darstellungen von Kurven höheren Grades schließen können, besonders solcher, die in der Physik vorkommen, sind die Schüler genug vorbereitet, um die Gleichung $y = f(x)$ verstehen zu können, als eine mathematische Beziehung zwischen zwei veränderlichen Größen, die ihren geometrischen Ausdruck in einer Kurve findet. Sie können jetzt den Begriff des Grenzwertes einer Funktion, und daran anschließend den des Differentialquotienten richtig erfassen.

Schon in der vierten Klasse werden Quotienten von der Form $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ behandelt, die für gegebene x den Wert $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ annehmen.

Zum Beispiel:

$$\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 2x - 3} \text{ für } x = 3,$$

$$\text{oder } \frac{ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p} \text{ für } x = \infty.$$

Am Anschluß an dieselben kann man den Grenzwert einer Funktion $y = f(x)$ für ein gegebenes x an einer Reihe von Beispielen erläutern, um unter anderm auch auf die Zahl π hinweisen, als den Grenzwert des Umfanges von Vielecken, die einem Kreise mit dem Durchmesser d eingeschrieben sind und deren Seitenzahl ins Unendliche wächst. Auch die Zahl e , die Basis der natürlichen Logarithmen, wird als Beispiel dienen, wobei aber nicht gesagt sein soll, daß der Grenzwert von

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

für zunehmendes n streng mathematisch bestimmt werden muß; es genügt durch fortschreitende Berechnung des Ausdruckes zu zeigen, daß derselbe einer bestimmten Grenze zustrebt, um diese Grenze dann ohneweiters als Resultat anzugeben.

Endlich kommt der allgemeine Ausdruck $y = f(x)$ selbst an die Reihe. Es ist nicht nötig, daß ich mich darüber weiter verbreite. Durch eine Figur (1) wird dem Schüler ohneweiters einleuchten, daß die Tangente

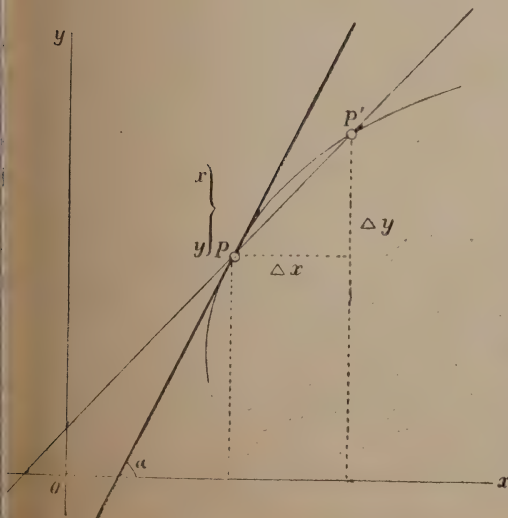


Fig. 1.

des Winkels, den die Sekante einer Kurve mit der x-Achse einschließt, für den Grenzübergang einem ganz bestimmten Wert zustrebt, obwohl beide Katheten des Bestimmungsdreieckes Null werden, die Funktion also den Wert $\frac{0}{0}$ annimmt. Für die Abszissen x und $x + \Delta x$ ist $y = f(x)$ und $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, als Tangente des Winkels ergibt sich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

der Grenzwert ist

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

der Differentialquotient.

Differentialquotienten.

Dieser allgemeine Vorgang kann sofort angewendet werden auf die Funktionen

$$y = a, y = ax, y = ax^2, y = ax^3$$

u. f. w., so daß es nach meinem Dafürhalten nicht notwendig ist, die Funktion $y = ax^m$ gesondert zu behandeln. Ihr Differentialquotient ergibt sich durch Vergleich mit den früher entwickelten speziellen Fällen. Bei Besprechung des binomischen Lehrsatzes in der siebenten Klasse kann ja darauf zurückgegriffen werden.

Mittlerweile sind die Schüler in der Goniometrie schon so weit, daß sie der Entwicklung des Differentialquotienten von $\sin x$, beziehungsweise von $\cos x$ unter Zuhilfenahme der Gleichungen

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

usw. folgen können, daß sich also für $y = \sin x$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \cos x$$

ergibt. Ebenso wird $y = \cos x$ differenziert und die allgemeineren Funktionen

$$y = a \sin bx, y = a \cos bx.$$

Um zu zeigen, daß der Differentialquotient einer Summe gleich der Summe der Differentialquotienten der einzelnen Summanden ist, genügen einfache Beispiele, etwa

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Daselbe gilt auch für das Produkt, wo an speziellen Fällen die Gleichung

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

nachgewiesen wird.

Zum Beispiel:

$$y = x^3, y' = 3x^2$$

$$y = x \cdot x^2, y' = x \cdot 2x + x^2 = 2x^2.$$

ein anderes Beispiel wäre

$$y = x^m (ax^n + b),$$

oder

$$y = (ax + b)(cx + d).$$

Diese Stelle hat einen wunden Punkt. Einerseits soll man in abstrakten Ableitungen nicht zu weit gehen, andererseits erheischt die Wichtigkeit des Gegenstandes doch eine mehr als oberflächliche Berechnung, wie dies bei der Bildung des Differentialquotienten eines Produktes der Fall ist. Ich glaube aber, daß es auch da nicht schwer wird, die richtige Mitte zu wählen und mit diesem Fall zugleich auch die Differentiation eines Quotienten zu erledigen. Dann kann für

$$y = \operatorname{tg} x = \sin x \cos^{-1} x, y = \operatorname{cotg} x$$

Aufgabe gelöst werden.

Noch eine Schwierigkeit ist zu überwinden. Für eine Reihe von Fällen wird es gut sein, auch die Funktion von der Form

$$y = f(u), u = g(x),$$

$$y = f[g(x)]$$

erörtern. Hier ist

$$\frac{dy}{du} = f'(u), \frac{du}{dx} = g'(x),$$

gemacht durch Multiplikation

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x).$$

Es sollen sehr einfache Beispiele zur Erläuterung dienen, wie folgendes:

$$y = (3x^2 - 2x + 1)^2,$$

$$y = u^2, u = 3x^2 - 2x + 1,$$

$$y = \sqrt{mx + n},$$

$$y = u^{\frac{1}{2}}, u = mx + n.$$

Vielleicht hat es den Anschein, als ob damit zu weit gegangen sei. Sollte man aber diese Funktionen nicht zulassen, so müßten viele Anwendungen der Differentialrechnung, die ihr an der Mittelstufe erst den richtigen Wert verleihen, beiseite gelassen werden. Ich erwähne nur die Gleichungen von Ellipse, Hyperbel, Parabel in nach y aufgelösten Form), und der Wert der Neuerung wäre zum in Frage gestellt. Erscheint die Behandlung derartiger Ausdrücke der sechsten Klasse noch zu schwierig, so kann ja damit bis zur analytischen Geometrie zugewartet werden.

Einige Aufgaben über zweite und dritte Differentialquotient können wegen ihrer Bedeutung für die Physik noch angereicht werden und damit wäre dieser Teil zu Ende.

Integrale.

Bevor man näher in die Elemente der Integralrechnung eingehen muß, wohl an einem einfachen Beispiel gezeigt werden, daß die Differenzieren einer Funktion eine inverse Operation entspricht, d. h. die Summierung einer großen Anzahl kleiner Elemente. Dazu eignet sich ganz gut die Funktion $y = \frac{1}{2}x^2$, deren Differentialquotient die Form $y' = x$ annimmt. Der Verlauf dieser derivierten Funktion wird geometrisch durch eine Gerade dargestellt. Wird für y' der Ausdruck

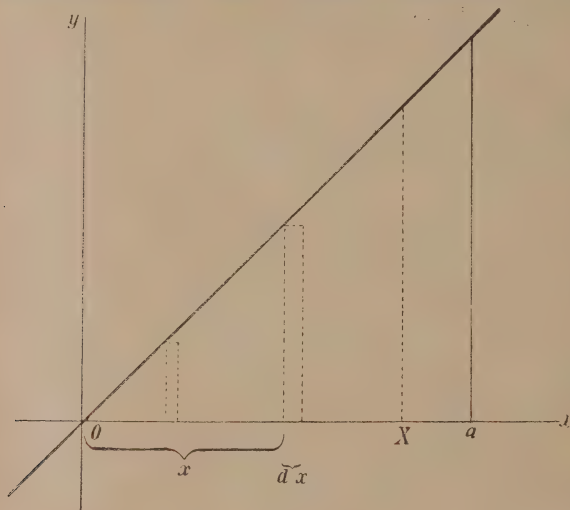


Fig. 2.

selbe Funktion, von der ausgegangen wurde, wobei X nur einen speziellen Wert von allen möglichen x darstellt. Dieser geometrische Vorgang wird veranschaulicht durch die Gleichung $\int x dx = \frac{x^2}{2}$. An dem

selben Beispiel sehen die Schüler schon, daß die neue Operation solange kein bestimmtes Resultat ergibt, als der Veränderlichen x nicht bestimmte Grenzen gesetzt sind, etwa 0 und a , die das bestimmte Integral

$$\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$$

liefern.

Unter Zuhilfenahme der Differentialrechnung werden nun die Funktionen $y = a$, $y = ax$, $y = ax^2$, $y = ax^m$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ integriert und als unbestimmte Integrale dargestellt, ohne vorderhand

auf die bestimmten Integrale weiter einzugehen. Ob und wie weit die Mittelschule sich in die Betrachtung der Integrale $\int \frac{1}{x} dx$, $\int a^x dx$, $\int e^x dx$ einlassen soll, mag hier unentschieden bleiben. Einerseits scheinen sie mir als Grundformeln der Integralrechnung wert genug in den Mittelschullehrstoff aufgenommen zu werden, andererseits rechnen ihre geringere Bedeutung für die Praxis und der Mangel an Zeit dagegen.

Als einfachstes Beispiel für ein bestimmtes Integral möchte ich die Funktion $y = a^x$ wählen. Das Integral ist $\int a^x dx$ und stellt eine Fläche vor, begrenzt von der Abszissenachse und der Geraden $y = a$. Es ist für den Schüler dann unmittelbar einleuchtend, daß die Fläche $\int a^x dx$ solange keinen bestimmten Wert hat, solange sie nicht durch eine gegebene Abszisse $x = b$ begrenzt wird. Dann ist

$$\int_0^b a^x dx = a \int_0^b dx = ab.$$

Um die Fläche zwischen $x = b$ und $x = c$ zu bestimmen, so hat man

$$a \int_b^c dx = ac - ab.$$

Wir können jetzt zur Bestimmung von

$$\int_a^b f(x) dx$$

schreiten. Es ergibt sich aus der Summe

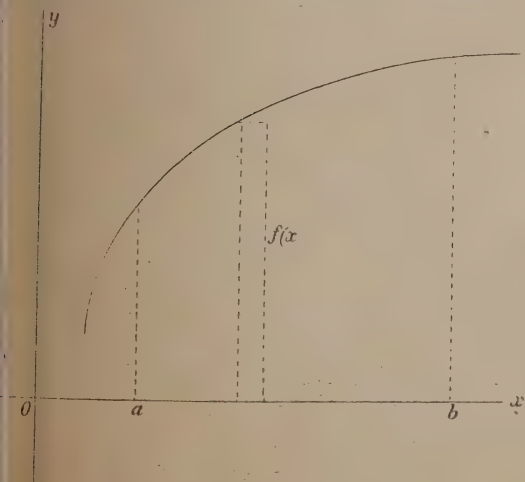


Fig. 3.

$$\sum_{x=a}^{x=b} f(x) \cdot \Delta x$$

durch den Uebergang zur Grenze $\Delta x = 0$ und liefert

$$\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b).$$

Damit ist die Reihe der allgemeinen Betrachtungen abgeschlossen. Ich glaube nicht, daß ich in den Anforderungen zu weit gegangen bin. Alle hier entwickelten Ausdrücke bieten keine besonderen Schwierigkeiten,

das Aufgabengebiet, das sich dadurch neu erschließt, ist ein ungemein reichhaltiges und in seiner Anwendung sehr anregend. Wollte man nur die Be-

griffe Differentialquotient und Integral besprechen, ohne ihre Berechnung in den wichtigsten Fällen wirklich vorzunehmen, so wäre damit wohl ein Verständnis für verschiedene, den Schülern bis jetzt ganz geheimnisvolle Operationen erzielt, ohne aber der Unterrichtspraxis etwas zu nützen. Ich gestehe ganz offen, daß ich mir von der Bewegung, die zu gunsten einer Reform des mathematischen Unterrichts eingeleitet wurde, nur dann einen Erfolg verspreche, wenn nicht bloß theoretischen Erklärungen halt gemacht wird, sondern durch möglichst eingehende Verwendung der Grundzüge der Infinitesimalrechnung sowohl in der Mathematik als auch in der Physik ein breiter Boden für die junge Saat entsteht. Wenn die Worte Differential und Integral diesem Aufsatz vielleicht den Anschein geben, als sollte darin der einseitige Standpunkt eines Fachmannes vertreten werden, der nur in der Fülle des Stoffes (wörtlich genommen) sein Heil sieht, so glaube ich dagegen anführen zu können, daß diese Zeilen dem tiefgefühlten Bedürfnis entspringen, endlich einmal von gewissen starren Formen zu lassen, um Lebendiges an ihre Stelle zu setzen.

Anwendung auf physikalische Aufgaben.

Wenn bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung (Fallrinnen-Fallmaschine) von der Erfahrungstatsache ausgegangen wird, daß die nach 1, 2, 3, . . . Zeiteinheiten zurückgelegten Wege dem Quadrat der Zeit direkt proportional sind, so ergibt sich der Begriff der Geschwindigkeit zu einer bestimmten Zeit (augenblickliche Geschwindigkeit) als $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, also beim Grenzübergang aus $s = at^2$, $v = 2 at$, eine der Zeit einfach proportionale Größe. In gleicher Weise ergibt sich die Beschleunigung $\frac{dv}{dt} = 2 a$ als eine konstante Größe. Nun ist allerdings zu der Zeit, wo dieses Thema behandelt wird, der mathematische Stoff noch nicht so weit erledigt, daß man ihn hier anwenden könnte, aber bei einer späteren Wiederholung wird die Darstellung der Geschwindigkeit und der Beschleunigung als erster und zweiter Differentialquotient des Weges nach der Zeit sicherlich zur tieferen Erkenntnis dieses Vorganges beitragen. Dann kann auch als Erweiterung das allgemeine Weg - Zeitgesetz, ausgedrückt durch

$$s = f(t)$$

als eine Wiederholung des Gedankenganges bei Behandlung der Funktion $y = f(x)$ einer eingehenderen Betrachtung unterzogen werden, die den Begriff des ersten und zweiten Differentialquotienten in ein ganz neues Licht rückt. Ein praktisches Beispiel dafür bietet die ha-

onische Bewegung durch

$$x = r \sin \alpha t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \alpha r \cos \alpha t$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha^2 r \sin \alpha t = -\alpha^2 x.$$

In umgekehrter Reihenfolge ergeben sich aus

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g$$

$$\frac{ds}{dt} = gt + C, \quad s = \frac{g}{2} t^2 + Ct + C'$$

die Gleichungen für Geschwindigkeit und Weg beim vertikalen Wurf nach abwärts und aufwärts.

Ein anderes Beispiel. Die Arbeit einer Kraft k längs eines Weges ds ist

$$k ds = m \frac{d^2s}{dt^2} ds = m \frac{dv}{dt} ds.$$

Integriert liefert die Gleichung

$$\int m \frac{d^2s}{dt^2} ds = m \int \frac{dv}{dt} ds = m \int \frac{ds}{dt} dv = m \int v dv = m \frac{v^2}{2},$$

er zwischen den Grenzen s_0 und s , beziehungsweise v_0 und v ,

$$m \int v dv = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Die Arbeit ist gleich der Änderung der Energie.

Gelegentlich der Wiederholung einzelner Teile der mathematischen Physik in der siebenten Klasse, die, wie später noch hervorgehoben wird, zum großen Teil in die Mathematik selbst verlegt werden sollen, können auch die Gleichungen für die Koordinaten des Massenschwerpunktes ebener Kurven und Flächen, ja selbst räumlicher Gebilde in der vergleichenden Darstellung läßt dies ohneweiters zu) in der Form

$$x_0 = \frac{\sum mx}{\sum m}, \quad y_0 = \frac{\sum my}{\sum m}, \quad z_0 = \frac{\sum mz}{\sum m}$$

ange stellt und für einzelne Fälle durch Integralrechnung ausgewertet werden. Die Anzahl der Beispiele ist eine sehr große, ich erwähne nur die wichtigsten nur den Kreisbogen, den Kreisbogen (speziell den Kreisbogen und die Fläche des Halbkreises), das Parabelsegment u. a. m.

Das Potential, definiert als die Arbeit, die notwendig ist, um eine ebene Masse oder Menge gegenüber anziehenden Kräften aus einem Punkte ins Unendliche zu bringen, sollte schon in der sechsten Klasse eingehender studiert werden. Wirkt auf die Masseneinheit im Abstand r die Kraft

$$f = c \frac{m}{r^2},$$

so ist das Potential gegeben durch

$$\int_r^\infty c \frac{m}{r^2} dr = c \frac{m}{r},$$

die Potentialdifferenz durch

$$\int_r^{r'} c \frac{m}{r^2} dr = c \left(\frac{m}{r} - \frac{m}{r'} \right)$$

Von großer Wichtigkeit, sowohl auf dem Gebiete der Mechanik als auch der Elektrizität, ist das Potential einer Kugelschale in Bezug auf einen außerhalb oder innerhalb derselben liegenden Punkt. Weß schon nicht in der sechsten Klasse, so sollte wenigstens in der siebenten bei der Einführung in die Elektrostatik dieses Problem einer eingehenden Erörterung unterzogen werden, denn dadurch wird die Erkenntnis des allgemeinen Naturgesetzes

$$f = c \frac{m m'}{r^2}$$

entschieden besser gefördert als jetzt, wo trotz aller Flächen- und Wärmeelemente nur halbe Arbeit geleistet wird.

Eine weitere Aufgabe sei hier erwähnt, die Bestimmung des Massen- oder Trägheitsmomentes, dessen Bedeutung wohl im jetzigen physikalischen Unterricht hervorgehoben wird, wogegen seine Berechnung, selbst für die einfachsten Fälle, an der Unzulänglichkeit des mathematischen Apparates scheitert. Am leichtesten wird die Bestimmung von

$$\sum m r^2$$

für eine Strecke durch das bestimmte Integral

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx$$

gelingen, ebenso für ein Rechteck (Drehungsachse normal zur Fläche), woran sich eventuell noch die Massenmomente für die Kreisfläche und die Vollkugel anschließen können. So gilt z. B. für die Kreisfläche, wenn die Achse normal zu ihr durch O geht und δ die Masse pro Flächeneinheit ist,

$$\begin{aligned} \lim \sum m r^2 &= \int_0^R 2 \pi x \cdot \delta \cdot x^2 dx = \\ &= 2 \pi \delta \int_0^R x^3 dx = \\ &= \pi \delta \cdot \frac{R^4}{2}, \end{aligned}$$

der weil πR^2 die Fläche und $\pi R^2 \delta$ die Gesamtmasse darstellt,

$$T = \frac{1}{2} MR^2.$$

Gerade diese Aufgaben stellen passende Uebungsbeispiele für die Anwendung der Integralrechnung dar. Sie sind einfach, gestatten einen Einblick in das Wesen der ganzen Rechnungsweise und tragen viel zur Vereinfachung des physikalischen Unterrichtes bei.

So manche andere schöne Aufgaben ließen sich hier noch anführen; besonders die Lehre von Elektrizität und Magnetismus bietet vielfache Gelegenheit zu Exkursionen in das Gebiet der sogenannten höheren Mathematik. Die Lehre vom Potential kann von einem neuen Gesichtspunkte aus betrachtet werden: an die Stelle der Masse tritt die elektrische Menge, für das Gravitationsgesetz Newtons das Gesetz von Coulomb. Und doch unterscheidet sich die Aufgabe der Bestimmung des elektrischen Potentials in keiner Weise von der früheren, der Ableitung des Gravitationspotentials. Das Gesetz von Biot-Savart, das jetzt in der Form

$$f = k \frac{i \cdot \Delta l \cdot m}{r^2} \sin \alpha$$

dem Schüler vorgeführt wird und dessen Auswertung nur für den kreisförmigen Leiter möglich ist, kann durch Einführung des Integrals weiter ausgewertet werden, etwa für einen geradlinigen Leiter. Wenn man aber nicht so weit gehen will, so wird wenigstens die Form, die die Einwirkung des elektrischen Stromes auf einen Magnetpol durch die Summe der Wirkungen einer sehr großen Anzahl von Linienelementen ausgedrückt, einen größeren Wert haben, als die bis jetzt gebrauchte. Daselbe gilt von den Gleichungen für die Wirkung zweier Stromleiter aufeinander.

Wenn ich jetzt diese Reihe von Aufgaben aus der mathematischen Physik schließe, so sind sie damit noch nicht erschöpft. Aber es hieße die Ansichten eines Einzelnen als allein richtig hinstellen, wenn hier ein förmliches Lehrgebäude entworfen würde. Ich bin mir wohl bewußt, daß eine derartige Reform des mathematisch-physikalischen Unterrichtes an der Mittelschule noch viele vorbereitende Schritte notwendig ist, daß Ideen, wie sie hier dargelegt sind, nur einen Baustein liefern, der sich bilden und formen lassen muß, um in das große Ganze zu passen.

Schlußbemerkungen.

Ich möchte jetzt noch darauf hinweisen, daß die elementare Behandlung der Funktionen, wie sie als Einleitung zur Differential- und

Integralrechnung gedacht ist, in der Physik ausgiebig Verwendung finden soll. Die Diskussion einer Gleichung, die uns ein physikalisches Gesetz darstellt, mag noch so gewandt durchgeführt werden, nie wird sie die Anschauung in einer solchen Weise fördern, wie die graphische Darstellung es vermag. Und wie oft findet man dazu Gelegenheit? Die zeichnende Beschreibung einer gleichförmigen oder gleichförmig beschleunigten Bewegung, des Boyle-Mariotte'schen Gesetzes u. a. findet man schon jetzt häufig in den Lehrbüchern. Andere könnten noch einbezogen werden, wie die Abnahme der Anziehungskraft einer Masse mit dem Quadrate der Entfernung, Kraftlinien und Linien gleichen Potentials (Niveaulinien), besonders aber die Wellenbewegung, die Zusammenfassung derselben, Konstruktion Lissajou'scher Figuren, Darstellung des Verlaufes von Gleichstrom und Extraströmen sowie von Wechselstrom (Einphasen-, Zweiphasen-, Dreiphasenwechselstrom), was erst durch die Bedeutung der Gleichung $i = I \sin \alpha t$ klar wird. Es ergibt sich für Dreiphasenwechselstrom gemäß den Gleichungen

$$i_1 = I \sin \alpha t$$

$$i_2 = I \sin (120 - \alpha t)$$

$$i_3 = I \sin (240 - \alpha t)$$

durch eine einfache und anregende Konstruktion die Beziehung

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

Auch die Konstruktion von Kraftlinien und Niveauflächen, die ja heute in der Elektrotechnik eine große Bedeutung erlangt hat, muß etwas gepflegt werden, und so manche oft schwierige Erklärungen rein mathematischer Natur können durch passende Bilder erst aufnahmefähig gemacht werden.

Die Abnahme des Luftdruckes mit der Höhe (normale Verhältnisse vorausgesetzt) kann zu einem sehr anschaulichen Bilde führen, wenn man damit zugleich die Höhen einiger Punkte der Erdoberfläche vergleicht (Fig 4). Solche Zeichnungen sollen aber nicht in den Lehrbüchern allein zu finden sein, es ist auch Sache der Schüler, dieselben als eine Art Hausübung durchzuführen, nachdem die nötigen Elemente (im gegebenen Fall die Barometerstände) berechnet wurden.

Ich wäre damit noch nicht zu Ende, nur ist es mir nicht möglich, im Rahmen dieses Aufsatzes eine größere Anzahl solcher Beispiele zu erledigen. Es genügt darauf hingewiesen zu haben, die Anwendung auf andere Aufgaben der Physik ist leicht.

Zum Schluß sei noch eine Forderung erwähnt, die Verlegung des rein mathematischen Lehrstoffes der Physik in die Lehrstunden der Mathematik, eine Forderung, welche die Physik entlastet und dem Lehrer die nötige Zeit zu Experimenten verschafft, zugleich aber e

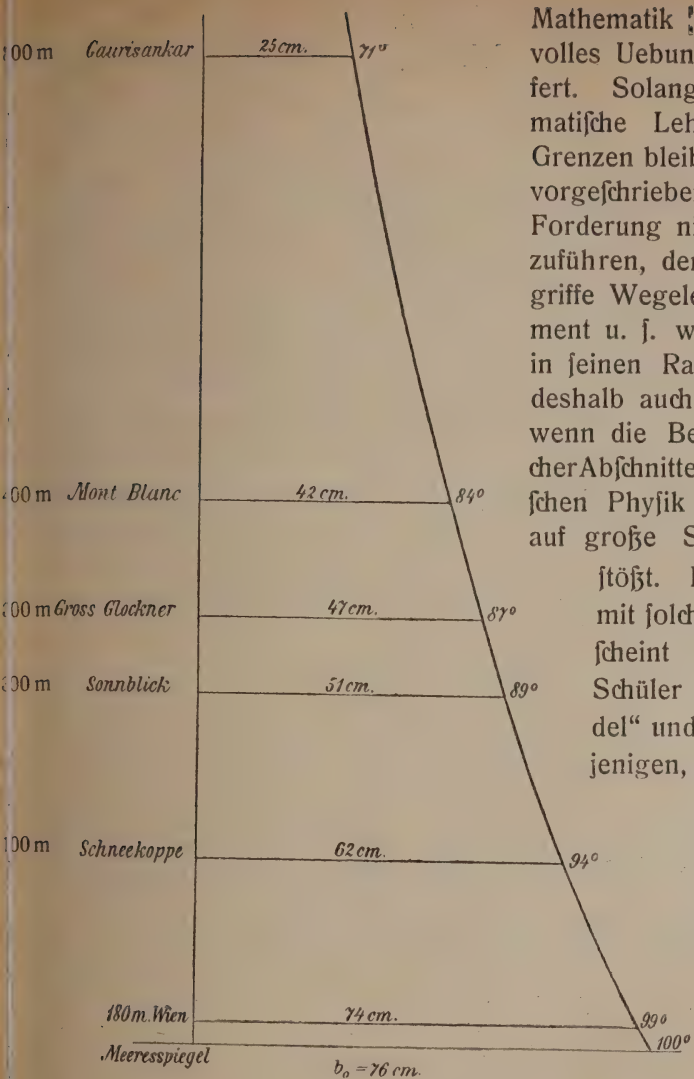


Fig. 4.

Die rechts stehenden Ziffern geben die Siedetemperatur des Wassers an.

Die Mathematik nachweist, daß solche Aufgaben beim Grenzübergang eine ebenso exakte Operation darstellen, wie beispielsweise die Summierung einer geometrischen Reihe. Es ist auch gar nicht einzusehen, warum Rechnungen über das Potential oder über schwingende Bewegungen, über die Abnahme des Luftdruckes bei zunehmender Höhe, über Verdichtungs- und Verdünnungsluftpumpen, ganze Kapitel aus der Astronomie, einen weniger wertvollen Uebungsstoff für die Mathematik ab-

Mathematik ein sehr wertvolles Uebungsmaterial liefert. Solange der mathematische Lehrplan in den Grenzen bleibt, die ihm jetzt vorgeschrieben sind, ist diese Forderung nicht gut durchzuführen, denn alle die Begriffe Wegelement, Zeitelement u. s. w. passen nicht in seinen Rahmen. Es ist deshalb auch kein Wunder wenn die Behandlung solcher Abschnitte der mathematischen Physik immer wieder auf große Schwierigkeiten

stößt. Eine Rechnung mit solchen Größen erscheint gar manchen Schülern als „Schwindel“ und selbst für diejenigen, die gründlich mitarbeiten, stellt diese Art und Weise Probleme der Physik zu behandeln nur eine Näherungsmethode dar. Dem kann abgeholfen werden, wenn die

geben sollten, als so manches abstrakte Rechenexempel, dem keiner praktische Bedeutung zukommt. Vielleicht wird gerade durch ein dergleichen Vorgehen eine innigere Verbindung zwischen den beiden Gegenständen hergestellt und jener Uebelstand vermieden, der darin besteht, daß während einer Physikstunde eine Anzahl von Schülern mathematische Fragen einfach vollständig unempänglich ist. Dasselbe gilt auch bezüglich physikalischer Fragen in einer Lehrstunde der Mathematik.

Ich habe schon früher an einigen Stellen hingewiesen, wie Funktionen, die irgend ein physikalisches Gesetz darstellen, mathematisch verwertet werden können, so daß eine Erwähnung weiterer Fälle nicht mehr notwendig erscheint. Es wäre auch voreilig, alle die Aufgaben, die da in Betracht kommen, aufzuzählen, da über die Einreihung einzelner physikalischer Probleme in den Lehrstoff der Mathematik verschiedene Ansichten herrschen dürften. Es ist, ich wiederhole nochmals, auch nicht Zweck dieser Arbeit, bestimmte Vorschläge zu machen, sie soll nur zeigen, welcher Weg ungefähr eingeschlagen werden müßte um zum Ziele zu führen.

Benützte Literatur.

Dr. Alois Höfler, Physik mit Zusätzen aus der angewandten Mathematik, aus der Logik und Psychologie.

Bemerkung: Der Sonderabdruck aus der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht „Vorschläge zu einer zeitgemäßen Umgestaltung des mathematischen Unterrichtes an den österreichischen Gymnasien und Realschulen. Auftrage der Deutschen Mittelschule in Prag“ erstattet von Alois Höfler in Prag ist erst in meine Hände, als der vorstehende Programmaufsatz bereits vollendet war.

Tuberkuloseprophylaxe

vom

schulhygienischen Standpunkte.

Vortrag, gehalten in der 1. Lehrerkonferenz des 2. Semesters 1905/06 von Dr. F. Urban.

Die Verhütung der Tuberkulose ist vom schulhygienischen Standpunkte besonders für die Mittelschule von größter Bedeutung, in deren Leben der Schüler jene Zeit des Hauptwachstums und der Entwicklung verbringt, wo manchmal schon der Keim der oft viel später zugetretenden Krankheit gelegt wird. Gerade in den Mittelschulen des Landes, wo vielleicht 95% der Eltern der Schüler in hygienischen Fragen ganz oder — was vielleicht noch schlechter ist, — halbwissend und voreingenommen sind, ist es Pflicht der Schule, darauf zu achten, daß die Akquisition dieser furchtbaren Krankheit möglichst unwahrscheinlich gemacht werde, indem sie vor allem die Schüler innerhalb ihrer Schule vor Infektion schützt, weiters aber auch dafür sorgt, daß diese auch außerhalb des Schulgebäudes tunlichst vermieden werde. Verhältnismäßig leicht ist die Erfüllung der ersten Aufgabe.

Die Tuberkulose ist eine Infektionskrankheit, d. h. sie wird ausschließlich nur durch Aufnahme des Erregers der Tuberkulose, des Tuberkulosebakteriums, erworben. Die Ansiedelung des Tuberkuloseerregers erfolgt nicht nur in den Luftwegen, sie kann vielmehr in allen Organen des Körpers stattfinden. Dieses Bakterium findet sich häufig im Staube — durch das Sputum (Auswurf, Speichel) tuberkulöser Kranker dahin gelangt — in der Luft hingegen äußerst selten, wenn man in unmittelbarer Nähe Lungenkranker, die keinerlei Vorsichtsmaßregeln beobachten. Wird also in erster Linie dafür gesorgt, daß von den Personen, die im Schulgebäude verkehren, keine offenkundiger Lungentuberkulose befallen sei, wird weiters der Staub in den Klassenzimmern und Gängen sorgfältig, d. h. mit möglicher Vermeidung von Staubwolken entfernt und unschädlich gemacht, so ist damit die Infektionsgefahr auf ein Minimum herabgedrückt. Auf diesem Standpunkte steht ja auch ein vor kurzem erschienener Erlaß des Landes Schulrates, der in seinen Verfügungen der zuletzt ausgesprochenen Forderung durch Anordnung von Desinfektionsmaßregeln in

der ausgiebigsten Weise Rechnung trägt, der ersteren hingegen Punkte 4 mit einer Toleranz gegenübersteht, die sich mit den übrigen Bestimmungen kaum in Einklang bringen läßt: ich meine die Behandlung nachgewiesener tuberkulöser Schüler. Ein mit offenkundiger Tuberkulose behafteter Schüler bildet für seine Mitschüler eine beträchtliche Gefahr. Angenommen, daß sich derselbe mit peinlichster Sorgfalt bemühen würde — es ist dies gewiß nur selten der Fall — seine Speichelsekretion unschädlich zu machen, so läßt sich doch nicht verhindern, daß beim Sprechen Teilchen des Speichels in der Luft zerstäubt werden, in der Luftwege von Mitschülern oder Lehrern gelangen und eine Infektion um so leichter ermöglichen, als die Bakterien durch keine Austrocknungsperiode abgeschwächt direkt aus dem einen in den anderen Organismus übergeführt werden. Ein solcher Schüler wäre nach meiner Ansicht sobald als möglich aus dem Bereiche seiner Mitschüler zu entfernen, nicht zuletzt auch in seinem eigenen Interesse, da entweder wenn das Leiden noch nicht zu weit vorgeschritten sein sollte, eine Heilung des Krankheitszustandes durch geeignete Maßregeln möglich ist, wo dies aber nicht geschehen kann, ein weiteres Studium wahrscheinlich hoffnungslos sein dürfte.

Weit größer als in unseren neuen, nach den Prinzipien der Hygiene erbauten und gehaltenen Schulgebäuden ist die Infektionsgefahr außerhalb derselben.

Die Biologie der Tuberkuloseerreger und die Beziehungen derselben zu einander sind keineswegs noch vollständig bekannt, außerordentlich wichtige Punkte ihrer Lebensgeschichte bedürfen vielerorts noch der endgültigen Erklärung. Unsere auf Erfahrung und Experimentalsstudium begründete Auffassung dieser Organismen wurde wesentlich durch eine neue Lehre Robert Koch's bedeutend erschüttert, indem dieser mit einer Reihe anderer Gelehrter behauptete, daß die Erreger der menschlichen Tuberkulose und jener der Säugetier-Tuberkulose zwei stammverschiedene Bakterien seien, daß also eine Übertragung der Tuberkulose des Menschen auf die Tiere und umgekehrt nicht stattfinden könne. Die daraus für die Praxis sich unmittelbar ergebende Konsequenz bestand darin, daß man in der Voraussetzung der Unschädlichkeit der Rindertuberkulose ungescheut den seit lange genossenen Genuß roher Kuhmilch wieder aufnahm und namentlich die Sterilisierung der Kindermilch für unnötig erklärte. Gegen diese Auffassung haben sich allerlei Bedenken erhoben, und eine Anzahl tüchtiger Forscher, an der Spitze v. Behring, haben umfangreiche Nachuntersuchungen angestellt. Das Ergebnis dieser durch Koch angeregten Forschungsrichtung ist bis heute folgendes:

Der Erreger der menschlichen Tuberkulose und jener der Rindertuberkulose sind insofern als zwei verschiedene Typen des gleichen Stammes zu betrachten, als die Giftigkeit eines jeden für Mensch und Tier graduell verschieden ist. Der Erreger der Menschentuberkulose wirkt leichter auf Menschen als auf Tiere über, und die Bazillen der Rindertuberkulose sind für den Menschen weniger gefährlich als jene der Menschentuberkulose. **Indessen ist eine gegenseitige Übertragung, unter gewissen, hier nicht weiter zu erörternden begünstigenden Umständen ganz bestimmt möglich**, was namentlich die gegenseitige Infektion anthropoider Affen, die wiederholt konstatierte Ansteckung von Menschen durch den Genuß von Milch tuberkulöser Rinder, sowie durch Verletzungen gelegentlich der technischen Verarbeitung von Kadavern tuberkulöser Rinder beweisen. Der Erreger der Rindertuberkulose ist für den Menschen nur weniger virulent (ansteckungs-fähig) als der der menschlichen Tuberkulose, ohne jedoch ungefährlich zu sein.

Infolge dieser Befunde gewinnt die Tuberkulose des Rindes eine große Bedeutung.

Die Perlucht der Rinder – so wird die Rindertuberkulose gewöhnlich genannt – ist eine ungemein verbreitete Tierseuche (in Böhmen etwa 40–50% der Milchrinder), die auch auf andere Haustiere, namentlich Schweine, leicht übertragbar ist. Die natürliche Ansteckung erfolgt gewöhnlich in der Jugend – wie dies übrigens auch beim Kinde geschieht – auf dem Wege der Verdauungsorgane durch die Milch, beim ausgewachsenen Tiere durch die Lunge, indem die mit Bakterien erfüllten Auswurfstoffe beim Husten in die Luft gelangen und von anderen Tieren in die Luftwege aufgenommen werden, wo sie krankhaften Veränderungen der Gewebe einleiten. In Ställen, wo an der nötigen Reinlichkeit fehlt, wie dies ja bei uns auf dem Lande durchwegs der Fall ist, infiziert ein perlüchtiges Tier in verhältnismäßig kurzer Zeit die anderen auf direktem Wege, ganz abgesehen von der Gefahr der Infektionsmöglichkeit durch die mit den Exkrementen und dem Harn perlüchtiger Tiere in den Boden gelangten und später im ausgetrockneten Zustande aufgewirbelten Bakterien. Am gefährlichsten für den Menschen dürfte die Euter-Tuberkulose sein, weil in diesem Falle die Bakterien sehr leicht und in großen Mengen in die Milch gelangen, aber auch bei vorgeschrittener Perlucht bei sonst gesundem Euter ist die Milch reich an Tuberkelbazillen. Als ein äußerst schwerer Umstand fällt weiters die Tatsache in's Gewicht, daß die Perlucht meist erst bei der Sektion erkannt wird, da der tierische Körper einmal das Krankheitsgift viel besser verträgt als der menschliche,

und weiters die Rinder nicht natürlichen Todes sterben, sondern wirtschaftlich ausgenützt, getödet werden. Die Abmagerung ist meist sehr geringfügig, selbst ausgedehnte Perlucht bringt das Körpergewicht oft nur wenig herab, der allerdings gewöhnlich auftretende Husten wird in der Regel nicht beachtet. Hält man nun fest, daß der Verlauf der Krankheit bei Rindern ein chronischer, sich oft auf viele Jahre erstreckender ist, den man häufig überhaupt nicht, manchmal aber erst dann vermuten beginnt, wenn er schon sehr weit vorgeschritten ist, so liegt die Gefahr einer Ansteckungsmöglichkeit auf der Hand, die namentlich für den Verdauungstrakt des Kindes eine ganz beträchtliche ist. Von dieser Seite des Staates geschieht in Oesterreich nur wenig, was eine rationelle Tilgung der Tuberkulose, wie dies in den andren Staaten der Fall ist, anstreben würde, nur das Nahrungsmittelgesetz und die Fleischbeschauverordnungen bieten eine Handhabe zur Ausschließung des Fleisches von als perlüchtig erkannten Rindern aus dem Marktverkehr.

Bedenkt man nun, daß eine große Anzahl unserer Schüler jenen Teil der Bevölkerung angehört, dessen Hauptwohlstandsquelle das Rind, dem Stallhygiene ein unbekannter Begriff und rohe Milch ein gewöhnliches Getränk ist, der ja übrigens in der Volksheilkunde eine Reihe von heilkräftigen Wirkungen zugeschrieben werden, wo weiter die Fleischbeschau nicht von Sachverständigen, sondern von Laien Fleischschauern ausgeübt wird, so muß man wohl sagen, daß unter den Infektionsgefahren, die unseren Schülern drohen, die durch rohe Milch eine der bedeutendsten ist. Dies gilt übrigens nicht nur für die Schüler der Dörfer, sondern auch für die in Städten wohnenden. Es ist nun allerdings richtig, was ich schon früher hervorgehoben habe, daß die Infektion mit boviner Tuberkulose schwerer eintritt als die humane. Wäre dies nicht der Fall, so würde die Tuberkulose eine noch viel größere Verbreitung haben, als sie tatsächlich besitzt. Die beste Waffe, die auch stattgefundene Infektionen siegreich überwindet, ist ein gesunder kräftiger Körper, ausgiebige Bewegung, eine rationelle Kost und Lebensweise, denn alles dies verleiht eine große Widerstandskraft gegen Krankheiten überhaupt. Bei einer großen Anzahl unserer Schüler ist dies nun der Fall, sie entstammen einem gesunden, kräftigen Menschenschlag, ihr Organismus widersteht den Bakteriengiften und vernichtet daselbe — bis zu einer gewissen Grenze. Häufen sich die Infektionen, so unterliegt endlich der Körper und geht dann gewöhnlich rascher zugrunde als ein solcher, der von vorn herein weniger Widerstandskraft besessen hatte.

Werden aber die Bakterien in einen Körper aufgenommen, wo ihnen günstige Entwicklungsbedingungen bietet, so nistet sich die Krank-

mit rasch ein. Der Indifferentismus gewisser Klassen hygienischen Maßregeln gegenüber, das geringe Reinlichkeitsbedürfnis, das mangelnde Verständnis für Licht und Luft, die unzureichende Nahrung, übermäßige körperliche Anstrengung schaffen einen Menschen Schlag, dessen Widerstandskraft der Tuberkulose und den Infektionskrankheiten überhaupt gegenüber gering ist. Die Disposition wird vererbt, und durch die Lebensweise noch erhöht. Wohl gilt dies zunächst für die Bevölkerung der Industriezentren, aber auch unter Familien der ländlichen Bevölkerung trifft das Gesagte oft genug zu. Ist der schwächliche Junge zu seinem Unglücke **übermäßig** fleißig, sitzt er bei elendem Lichte bis tief in die Nacht in der feuchten, ungelüfteten Stube, in der alle übrigen Familienglieder und womöglich noch einige Haustiere der Nachtruhe pflegen, gewöhnt er sich ferner vorzeitig an den Genuß von Alkohol (Bier, Wein, Schnaps, Liköre) und Nikotin (Zigarre, Zigarette, Fuchtabak), so haben die Bakterien leichtes Spiel; und gerade hier ist die Infektion durch Rindertuberkulose außerordentlich häufig, da diese Leute die „kuhwarme Milch“ als Heilmittel gegen körperliche Schwäche, Husten, etc. verwenden. Oft genug geschieht es auch, daß einer oder der andere unserer kräftigen Bauernjungen im Leben der Großstadt durch eine verfehlte Lebensweise in diese Kategorie gelangt und zugrunde geht.

Aufgabe der Schule ist es nun, sowohl in der einen als in der anderen Richtung aufklärend und vorbeugend zu wirken. Es ist klar, daß vor allem der naturgeschichtliche Unterricht dazu berufen ist, den Schülern die nötige Aufklärung zu geben, die Schwierigkeit besteht nur in dem „wie“. Gefehlt wäre es warten zu wollen, bis die Schüler eine solche Reife erlangt haben, daß sie die **Notwendigkeit** der ihnen erteilten Ratschläge erkennen. Es bietet sich in den unteren Klassen oft genug Gelegenheit über den menschlichen Körper und daran knüpfend über die Grundprinzipien der Hygiene so zu den Schülern zu sprechen, daß sie es verstehen. Auch auf die Gefahr des Genußes roher Milch läßt sich hinweisen und etwa der Vergleich ziehen mit der Gefahr des Genußes rohen Rind- oder Schweinefleisches. Ganz verfehlt wäre natürlich diese Methode für die oberen Klassen. Das ausgeprochene Kausalbedürfnis der Jugend verlangt die Erklärung und das Verständnis, und sie zu geben wäre ja leicht möglich. Ich kann nun nicht versagen zum Schluß meiner Ausführungen darauf hinzuweisen, daß der naturgeschichtliche Unterricht in den oberen Klassen in der jetzigen Form es keineswegs ermöglicht, diese unendlich wichtigen Dinge den Schülern so verständlich zu machen, daß sie wirklich Urteile für's Leben hätten. Die pathogenen Bakterien werden, aller-

dings nur ganz kurz, da ja die Zeit ein mehr nicht gestattet, in der fünften Klasse besprochen; um sie aber in ihren Wirkungen und die gegen sie zu ergreifenden, hygienischen Maßregeln verständlich zu machen, brauchte man die physiologischen Kenntnisse, die den Schülern der somatologischen Unterricht der VI. Klasse vermitteln **sollte!** Sollte ich sage ich, denn mit 20 Stunden ist das unmöglich, man muß froh sein in dieser Spanne Zeit den Schülern die größten Bauverhältnisse des Körpers zu erklären, und das wichtigste, die Kenntnis der Funktion der Organe bleibt zu allermindest lückenhaft und wird vergessen. Von dem, was die Schüler überhaupt lernen, nehmen sie sehr wenig als wirkliche Wissen mit. Ich denke nun aber, und ich glaube, ein jeder von uns hat das selbst erfahren, zu dem Wissenswertesten gehört die Kenntnis des eigenen Körpers, denn nur dadurch ist man im Stande, sich von den mannigfachen Schäden physischer und psychischer Natur zu bewahren. Die Somatologie sollte als Unterrichtsgegenstand in der obersten Klasse an erster Stelle stehen. Nun wäre es aber gar nicht schwer und zwar, wie ich hinzufüge, ohne jede Stundenvermehrung da Abhilfe zu schaffen. In der VII. Klasse sind dem naturgeschichtlichen Unterricht 3 Stunden wöchentlich zugeteilt. Für das zu bewältigende Pensum würden bei gewissen möglichen Einschränkungen zwei wöchentliche Stunden genügen. Die eine wöchentliche Stunde könnte nun durch das ganze Jahr der Somatologie zugewiesen werden. Dadurch würde dem zoologischen Unterrichte in der VI. ein größerer Spielraum gewährt, es könnte diese Disziplin in der wirksamsten Weise auf die Somatologie vorbereiten, und der naturgeschichtliche Unterricht würde in der Kenntnis und dem Verständnis des eigenen Körpers ausklingen. So wäre es ein leichtes im Zusammenhange mit der Physiologie hygienische Fragen zu erörtern, es würde das mehr nützen, als alle Broschüren in den Schülerbibliotheken, als alle Plakate in den Gängen und Schulzimmern.



Schulnachrichten.

I. Personalstand.

1. Lehrkörper.

a) Bewegung im Lehrkörper.

Es schieden aus am Ende des Schuljahres 1904/5:

Professor Anton P o b e h e i m, um eine Lehrstelle an der deutschen Staatsrealschule in Budweis,

wirklicher Lehrer Dr. Hugo Ludwig F u l d a, um eine Lehrstelle an der Staatschule in Wien VI. anzutreten.

Es traten ein am Anfange des Schuljahres 1905/6:

Friedrich T i s c h e r, vordem Supplent an der deutschen Staatsrealschule in Kamental, als k. k. wirklicher Lehrer.

Ferdinand W a g n e r, vordem Supplent an der I. Staatsrealschule in Wien II, k. k. wirklicher Lehrer.

b) Stand des Lehrkörpers am Schluß des Schuljahres:

A. Anstaltsleiter.

Augustin R i t s c h e l, k. k. Direktor der VI. Rangsklasse, lehrte Französisch (I. 6, 3), im ganzen in 9 wöchentlichen Stunden und war Obmann des „Studenten-erstützungs-Vereines in Plan“.

B. Professoren und Lehrer.

(In alphabetischer Ordnung).

Heinrich G r ö b l, k. k. wirklicher Lehrer, lehrte Deutsch (III. 4), Französisch (5), Englisch (V. 3, VI. 3, VII. 3), Latein (I. K. 3), im ganzen in 18+3 wöchentlichen Stunden, war Kustos der Schülerbibliothek und Ordinarius der III. Klasse.

Ludwig N a g e l e, k. k. wirklicher Lehrer, lehrte Französisch, (II. 5), Mathematik (VII. 5), Physik (VI. 4, VII. 4), im ganzen in 18 wöchentlichen Stunden, war Kustos Lehrmittel für Physik und Ordinarius der VI. Klasse.

Jakob N e u b a u e r, k. k. Professor der VIII. Rangsklasse, lehrte Deutsch, (V. 3, 4), Geographie (III. 2), Geschichte (III. 2), Geographie und Geschichte (V. 3, VII. 2), mifch (I. K. 3), im ganzen 17+3 wöchentlichen Stunden, war Ordinarius der VII. Klasse und Kustos der Lehrerbibliothek.

Eduard N o n n e n m a c h e r, Ph. Dr., k. k. Professor, lehrte Deutsch, (I. 4, VI. 3), Französisch (V. 3, VI. 3, VII. 3), Böhmisch (II. K. 3), im ganzen in 16+3 wöchentlichen Stunden, war Ordinarius der V. Klasse und Zeitschriftenverweser.

Karl S c h e i t e r, k. k. Professor, lehrte Deutsch (II. 4, IV. 4), Geographie (II. 2, 2), Geschichte (II. 2, IV. 2), Geographie und Geschichte (VI. 3), im ganzen in 19 wöchentlichen Stunden, war Kustos der Lehrmittelsammlungen für Geographie und Geschichte, Ordinarius der IV. Klasse und Sekretär des Studenten-Unterstützungsvereines.

Johann Schmidt, k. k. Professor der VIII. Rangsklasse, lehrte Geometrie und geometrisches Zeichnen (II. 2, III. 2, IV. 3), darstellende Geometrie (V. 3, VI. 3, VII. 2), Turnen (I. 2), im ganzen in 17 wöchentlichen Stunden, war Kustos der Lehrmittelsammlung für Geometrie und Kassier des Studenten-Unterstützungs-Vereines.

Friedrich Tischler, k. k. Professor, lehrte Freihandzeichnen in allen sieben Klassen (I. 4, II. 4, III. 4, IV. 4, V. 3, VI. 2, VII. 3), im ganzen in 24 wöchentlichen Stunden und war Kustos der Lehrmittel für das Freihandzeichnen.

Josef Tomasek, k. k. Professor, lehrte Mathematik (I. 4, IV. 3, V. 5, VI. 4), Geographie (I. 3), im ganzen in 19 wöchentlichen Stunden und war Ordinarius der I. Klasse.

Ferdinand Urban, Ph. Dr., k. k. wirklicher Lehrer, lehrte Arithmetik (II. 3, III. 3), Kalligraphie (I. 1), Naturgeschichte (I. 2, II. 2, V. 2, VI. 2, VII. 3), im ganzen in 18 wöchentlichen Stunden, war Ordinarius der II. Klasse und Buchführer für die Frequenz der Realschüler in der Speise- und Suppenanstalt.

Ferdinand Wagner, k. k. Professor, lehrte Chemie mit Mineralogie (IV. 3), Chemie (V. 3, VI. 2), Physik (III. 3, IV. 2), Kalligraphie (II. 1), leitete die chemisch-praktischen Laboratoriumsübungen (2 Kurse, 4 w. St.), im ganzen in 18 wöchentlichen Stunden und war Kustos der Lehrmittel für Chemie.

Franz X. Walters, Weltpriester, k. k. Professor, lehrte katholische Religionslehre (I. – VII. je 2 w. St.) Stenographie (I. K. 2, II. K. 2), im ganzen in 18 wöchentlichen Stunden, war Exhortator und Kustos der Kirchengeschichten und Paramente.

C. Mosaischer Religionslehrer.

Hermann Weiner, Rabbiner der Kuttnerplaner Kultusgemeinde, erteilte mosaischen Religionsunterricht in zwei Abteilungen, im ganzen in 4 wöchentlichen Stunden.

D. Nebenlehrer.

(In alphabetischer Ordnung).

Karl Bruchsa, B.S.P.-Lehrer, geprüft für das Lehramt des Turnens an Mittelschulen und Lehrerbildungsanstalten, erteilte Turnunterricht (II. 2, III. 2, IV. 2, V. 2, VI. 2, VII. 2), lehrte Modellieren (2) im ganzen in 14 wöchentlichen Stunden, war Jugendspiel-Leiter und Kustos der Turn- und Spielgerätesammlung.

Franz Cepník, B.-S.-Katechet, lehrte Böhmisch (III. K. 2, IV. K. 2), im ganzen in 4 wöchentlichen Stunden.

Franz Moißl, städtischer Musiklehrer, geprüft für das Lehramt des Gesangs an Mittelschulen und Lehrerbildungsanstalten, lehrte Gesang in zwei Abteilungen (I. 2, II. 2), im ganzen in 4 wöchentlichen Stunden.

2. Dienstpersonal.

Anton Dorfschneider, k. k. Schuldiener.

Johann Kron, Aushilfsdiener.

II. Lehrverfassung.

Der Unterricht in den obligaten Fächern wurde in allen Klassen nach dem Normallehrplane vom 23. April 1898, Z. 10331, M. K. U. erteilt.

Der Stundenplan der Realschulen mit deutscher Unterrichtssprache in Böhmen ist der folgende:

Lehrfächer	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	Summe
Religionslehre	2	2	2	2	2	2	2	14
Deutsche Sprache	4	4	4	4	3	3	4	26
Französische Sprache	6	5	5	3	3	3	3	28
Englische Sprache	—	—	—	—	3	3	3	9
Geographie	3	2	2	2	—	—	—	9
Geschichte	—	2	2	2	3	3	3	15
Mathematik	3	3	3	3	5	4	5	26
Naturgeschichte	2	2	—	3	2	2	3	11
Chemie	—	—	—		3	2	—	8
Physik	—	—	3	2	—	4	4	13
Geometrie u. geom. Zeichnen	1	2	2	3	3	3	2	16
Freihandzeichnen	4	4	4	4	3	2	3	24
Kalligraphie	1	1	—	—	—	—	—	2
Turnen	2	2	2	2	2	2	2	14
Summe	28	29	29	30	32	33	34	215

Von der ausführlichen Angabe des Normallehrplanes nach den einzelnen Klassen und Lehrfächern wird Umgang genommen. — In der I. Klasse ist Arithmetik und Geometrie zu einem wöchentlich 4-stündigen Lehrfache vereint.

III. Lehrbücher für das Schuljahr 1906/7.

a) Für die obligaten Fächer.

I. Klasse.

- Coffner, Katechismus der katholischen Religion. Mit Approbation des österr. Gesamt-Episkopates. Prag, k. k. Schulbuchverlag, 80 h. (Für Israeliten siehe Seite 32).
- Illomitzer, Deutsche Grammatik für österr. Mittelschulen. Wien, Klinkhardt. 11. oder 10. Aufl. 2 K 40 h geb.
- Kammer und Stejskal, Deutsches Lesebuch für österr. Gymnasien und Realschulen. I. Band, Wien, Manz. 7. Aufl. 2 K 50 h geb.
- Sköll und Wypiel, Lehrbuch der französischen Sprache für österr. Realschulen. I. Teil (für das 1. und 2. Schuljahr) Wien, Deuticke, 1904. 2 K 50 h.
- Wiegartner, Grundzüge der Erdbeschreibung d. I. Kl. Wien, Manz. 3. Aufl. (nach Herr 19.) 1 K 40 h geb.
- Kzenn, Geographischer Atlas für Mittelschulen. Wien, Hölzel 40. od. 39. Aufl. 8 K g.
- Vönik-Neumann, Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik für die unteren Klassen der Realschulen. 1. Heft, Wien & Prag, Tempsky, 23. Aufl. 1 K 60 h geb.
- Brgmann, Roßmanith-Schobers Geometrische Formenlehre. Wien, Pichlers Witwe, 8., 7. oder 6. Aufl. 1 K 10 h geb.
- Nlep a, Grundriß der Naturgeschichte des Tierreiches für die unteren Klassen. Wien, Hölder, 1902. 3 K geb. 3. 2. oder 1. Aufl.
- Sk v. Mannagetta, Grundriß der Naturgeschichte des Pflanzenreiches für die unteren Klassen. Wien, Hölder, 3 K 60 h geb. 2. oder 1. Aufl.

II. Klasse.

- Großer Katechismus der katholischen Religion. Prag, k. k. Schulbücherverlag 80 h. (Für Israeliten siehe S. 32.)
- Willomitzer, Deutsche Grammatik für österr. Mittelschulen. Wien, Klinkhardt 11., 10. oder 9. Aufl. 2 K 40 h geb.
- Kummer und Stejskal, Deutsches Lesebuch für öst. Realschulen und verw. Anst. II. Band, Wien, Klinkhardt. Nur 7 Aufl. 2 K 50 h.
- Sokoll & Wypliel, Lehrbuch der französischen Sprache für öst. Realschulen. I. Teil (Für das 1. u. 2. Schuljahr). Wien, Deuticke 1904. 2 K 50 h geb.
- Weingartner, Länder- und Völkerkunde. Wien, Manz, 3. oder 2. Aufl. (nach Herr 15. oder 14. Aufl.) 2 K 80 h geb.
- Kozenn, Geographischer Atlas für Mittelschulen. Wien, Hölzel. 40. oder 39. Auflage. 8 K geb.
- Gindely-Würfel, Lehrbuch der Geschichte für die unteren Klassen. I. Teil: Altertum. Wien und Prag, Tempsky 13. oder 12. Aufl. 2 K geb.
- Schubert & Schmidt, Historisch-geographischer Schulatlas; Ausgabe für Realschulen, Wien, Hölzel. 3 K 20 h.
- Močnik-Neumann, Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik für die unteren Klassen der Realschulen. II. Heft, Wien & Prag, Tempsky, 22. oder 21. Aufl. 1 K 50 h gebunden.
- Nalepa, Grundriß der Naturgeschichte des Tierreiches für die unteren Klassen der Mittelschulen, Wien, Hölder 1902. 3. 2. oder 1. Auflage. 3 K.
- Beck v. Mannagetta, Grundriß der Naturgeschichte des Pflanzenreiches für die unteren Klassen der Mittelschulen, Wien, Hölder. 2. oder 1. Auflage. 3 K 60 h.
- Rossmannith-Schober, Grundriß der Geometrie in Verbindung mit dem geometrischen Zeichnen für die II. III. und IV. Klasse. Wien, Pichlers Wwe. 3. Auflage. 2 K 30 h gebunden.

III. Klasse.

- Zetter, Geschichte der göttlichen Offenbarung des alten und neuen Bundes zum Gebrauche an Realschulen. Graz, Styria. 2 K 50 h geb. (Für Israeliten siehe Seite 32)
- Willomitzer, Deutsche Grammatik für österreichische Mittelschulen Wien, Klinkhardt 11. 10. oder 9. Auflage. 2 K 40 h gebunden.
- Kummer und Stejskal, Deutsches Lesebuch für die III. Klasse österreichischer Gymnasien und Realschulen. III. Band, Wien, Manz. Nur 5. Auflage. 2 K 50 h gebunden.
- Fetter und Alšcher, Französische Schulgrammatik. Wien, Pichlers Ww. 3. Auflage. 3 K geb.
- Fetter, Lehrgang der französischen Sprache, III. Teil. Wien Pichlers Ww. 5. oder 4. Auflage. 1 K 64 h gebunden.
- Weingartner, Länder- und Völkerkunde, für die II. u. III. Klasse. Wien, Manz 3. oder 2. (nach Herr 15. oder 14. Auflage). 2 K 80 h gebunden.
- Kozenn, Geographischer Atlas für Mittelschulen. Wien, Hölzel. 40. od. 39. Aufl. 8 K
- Gindely-Würfel, Lehrbuch der Geschichte für die unteren Klassen der Mittelschulen. II. Teil: Mittelalter. Wien, Tempsky. 13. Auflage. 1 K 50 h geb.
- Schubert & Schmidt, Historisch-geographischer Schulatlas; Ausgabe für Realschulen. 3 K 20 h.

očník-Neumann, Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik für die unteren Klassen der Realschulen. III. Heft. Wien. 21. oder 20. Auflage. 1 K 20 h geb.
 a ch-Habart, Grundriß der Naturlehre für die unteren Klassen der Mittelschulen. Ausgabe für Realschulen. Wien & Prag, Tempsky. Nur 3. Auflage. 2 K 30 h geb.
 oßmanith-Schober, Grundriß der Geometrie in Verbindung mit geometrischen Zeichnen für die II. III. und IV. Realklasse. Wien, Pichlers Ww. 8. Auflage. 2 K 30 h gebunden.

IV. Klasse.

etter, Katholische Liturgik. Graz, Styria. 5. Auflage. 2 K 30 h gebunden. (Für Israeliten siehe Seite 32).
 illomitzer, Deutsche Grammatik für österreichische Mittelschulen, Wien, Klinkhardt. 11. 10. oder 9. Auflage. 2 K 40 h gebunden.
 ummer & Stejskal, Deutsches Lesebuch für österr. Gymn. u. Realschulen. Wien, IV. Band. Manz 1904. 5. verb. Auflage, 2 K 70 h gebunden.
 etter & Alßher, Französische Schulgrammatik. 3. oder 2. Aufl. Wien, Pichlers Witwe, 3 K gebunden.
 etter, Lehrgang der französischen Sprache, IV. Teil, Wien, Pichlers Witwe, 6., 5. oder 4. Auflage 2 K 50 h.
 a yer, Geographie der österr. ung. Monarchie (Vaterlandskunde) für die IV. Klasse der Mittelschulen. Wien & Prag, Tempsky, 6. oder 5. Aufl. 1 K 70 h geb.
 ozzenn, Geographischer Schulatlas für Mittelschulen. Wien, Hölzel, 40. od. 39. Aufl. 8 K gebunden.
 indely-Doublier & Schmidt, Lehrbuch der Geschichte für die unteren Klassen der Mittelschulen. III. Teil: Neuzeit. Wien und Prag, Tempsky. Nur 10. Aufl. 1 K 90 h geb.
 hubert & Schmidt, historisch-geographischer Schulatlas. Ausgabe für Realschulen Wien, Hölzel, 3 K 20 h.
 očník-Neumann, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst Aufgabenammlung für die oberen Klassen der Mittelschulen. Wien, Tempsky, 28., 27. od. 26. Aufl. 3 K 80 h gebunden.
 emmelmayr & Brunner, Lehrbuch der Chemie und Mineralogie für die IV. Klasse der Realschulen. Wien, Tempsky, 2. oder 1. Aufl. 2 K 60 h geb.
 a ch-Habart, Grundriß der Naturlehre für die unteren Klassen der Mittelschulen. Ausgabe für Realschulen. Wien & Prag, Tempsky. Nur 3. Aufl. 2 K 30 h gebunden.
 oßmanith-Schober, Grundriß der Geometrie m. d. geom. Zeichnen für die II., III. und IV. Realklasse. Wien, Pichler. 8. Aufl. 2 K 30 h gebunden.

V. Klasse.

önig, Lehrbuch für den katholischen Religionsunterricht in den oberen Klassen der G. u. R. S. III. Kursus. Die besondere Glaubenslehre. Freiburg, Herder. 10., 9. oder 8. Auflage. 2 K 16 h geb. (Für Israeliten siehe S. 32).
 illomitzer, Deutsche Grammatik für öst. Mittelschulen. Wien, Klinkhardt. 11., 10. oder 9. Aufl. 2 K 40 h geb.
 ummer & Stejskal, Deutsches Lesebuch für öst. Realschulen, V. Band, Wien, Manz, 6. oder 5. Aufl. 2 K 70 h geb.
 etter & Alßher, Französische Schulgrammatik. Wien, Pichlers Witwe 3 K geb.
 etter, Französisches Übungsbuch, für die oberen Klassen höherer Lehranstalten 4. oder 3. Aufl. Wien, Pichlers Witwe, 2 K geb.

- Bechtel, Französische Chrestomathie für die oberen Klassen der M.-S. Wien. Manz 5. oder 4. Aufl. 4 K 48 h geb.
- Nader & Würzner, Elementarbuch der englischen Sprache. Wien Hölder. 6., oder 4. Aufl. 1 K 90 h geb.
- Mayer, Lehrbuch der Geschichte für die oberen Klassen der Realschulen. I. Teil Altertum. Wien & Prag, Tempsky. 5. oder 4. Auflage, 2 K 60 h geb.
- Kozenn, Geographischer Atlas für Mittelschulen. Wien, Hölzel, 40. oder 39. Aufl. 8 K geb.
- Shubert & Schmidt, Historisch-geographischer Schulatlas für Realschulen. Wien Hölzel, 3 K 20 h geb.
- Močnik-Neumann, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für die oberen Klassen der Mittelschulen nebst einer Aufgabenammlung. Wien & Prag, Tempsky 28., 27. oder 26. Auflage, 3 K 80 h geb.
- Močnik-Spielmann, Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen. Wien & Prag, Tempsky. 24. od. 23. Aufl. 3 K 80 h geb.
- Wettstein, Leitfaden der Botanik für die oberen Klassen der Mittelschulen. Wien Tempsky, 2. oder 1. Aufl. 3 K 40 h geb.
- Hemmelmayer, Lehrbuch der anorganischen Chemie für die V. Klasse der Realschulen. Wien & Prag, Tempsky. 3. oder 2. Auflage. 3 K geb.
- Smolík-Heller, Elemente der darstellenden Geometrie für Oberrealschulen. Wien & Prag, Tempsky. 3. oder 2. Auflage. 4 K geb.

VI. Klasse.

- König, Lehrbuch für den katholischen Religionsunterricht für die oberen Klassen G. und R.-S. IV. Kursus: die Sittenlehre. 10., 9. oder 8. Auflage, Freiburg i. Br., Herder. 1 K 68 h. (Für Israeliten siehe S. 32).
- Willomitzer, Deutsche Grammatik für öst. Mittelschulen. Wien, Manz, 2 K 40 11., 10. oder 9. Aufl.
- Kummer & Stejskal, Deutsches Lesebuch für öst. Realschulen und verw. Anstalten VI. Band, 5. oder 4. Auflage. Wien, Manz, 2 K 32 h.
- Fetter & Alfcher, Französische Schulgrammatik. Wien, Pichler, 3. od. 2. Aufl. 3 K
- Fetter & Alfcher, Französisches Übungsbuch für die oberen Klassen höherer Lehranstalten. Wien, Pichler, 4. oder 3. Auflage, 2 K.
- Bechtel, Französische Chrestomathie für die oberen Klassen der Mittelschulen. Wien Manz, 5. oder 4. Auflage, 4 K 48 h.
- Nader & Würzner, Grammatik der englischen Sprache. Wien, Hölder, 3. Auflage 2 K 80 h.
- Nader & Würzner, Englisches Lesebuch für höh. Lehranstalten. Wien, Hölder 5. oder 4. Aufl. 5 K 16 h.
- Mayer, Lehrbuch der allgemeinen Geschichte für die oberen Klassen der Realschulen II. Teil, Mittelalter und Neuzeit bis zum Ende des 30-jährigen Krieges Wien, Tempsky, 4. oder 3. Auflage, 2 K 60 h.
- Kozenn, Geographischer Atlas für Mittelschulen. Wien, Hölzel, 40. od. 39. Aufl., 8
- Shubert & Schmidt, Historisch-geographischer Atlas, Ausgabe für Realschulen Wien, Hölzel, 3 K 20 h.
- Močnik-Neumann, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für die oberen Klassen der Mittelschulen. Ausgabe für Realschulen. Wien, Tempsky, 28., 27. oder 26. Auflage, 3 K 80 h.
- Močnik-Spielmann, Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen. Wien und Prag. 24. oder 23. Auflage. 3 K 80 h.

- aber-Latgel, Leitfaden der Zoologie für die oberen Klassen der Mittelschulen. Wien, Tempsky. 4. Auflage. 3 K 80 h.
- mmelmayer, Lehrbuch der organischen Chemie für die VI. Klasse der Realschulen. Wien und Prag, Tempsky. 2. Auflage, 2 K 30 h.
- fenberg, Lehrbuch der Physik für die oberen Klassen der Mittelschulen. Ausgabe für Realschulen. 2. oder 1. Auflage, Wien, Hölder, 5 K.
- olík-Heller, Elemente der darstellenden Geometrie. Ein Lehrbuch für Oberrealschulen. Wien und Prag, Tempsky. 3. oder 2. Auflage, 4 K.

VII. Klasse.

- der, Lehrbuch der Kirchengeschichte zum Gebrauche in Schulen und zum Selbstunterrichte. Innsbruck, Rauch, 4. Auflage, 1 K 90 h. (Für Israeliten siehe Seite 32).
- Homitzer, Deutsche Grammatik für öst. Mittelschulen. Wien, Manz, 11., 10. oder 9. Auflage, 2 K 40 h.
- immer & Stejskal, Deutsches Lesebuch für österr. Realschulen. VII. Band, Wien, Manz, 4. oder 3. Auflage, 2 K 70 h.
- tter & Aljcher, Französische Schulgrammatik. 3. od. 2. Aufl. Wien, Pichler 3 K.
- tter & Aljcher, Französisches Übungsbuch für die oberen Klassen höherer Lehranstalten. Wien, Pichler, 4. oder 3. Auflage, 2 K.
- chtel, Französische Chrestomathie für die oberen Klassen der Mittelschulen. Wien, Hölder. 5. Auflage, 4 K 48 h.
- der & Würzner, Grammatik der englischen Sprache. Wien, Hölder, 3. Auflage, 2 K 80 h.
- der & Würzner, Englisch-Lesebuch für höhere Lehranstalten. Wien, Hölder 5. oder 4. Auflage, 5 K 16 h.
- yer, Lehrbuch der allgemeinen Geschichte für die oberen Klassen der Realschulen III. Teil, Neuzeit seit dem 30-jährigen Kriege. Wien, Tempsky, 2. Auflage, 2 K.
- nnak, Österreichische Vaterlandskunde für die oberen Klassen der Mittelschulen Wien, Hölder 14. oder 13. Auflage, 2 K 38 h.
- zenn, Geographischer Atlas für Mittelschulen Wien, Hölzel. 40. oder 39. Auflage, 8 K.
- ubert-Schmidt, Historisch-geographischer Schulatlas. Ausgabe für Realschulen. Wien, Hölzel. 3 K 20 h.
- čnik-Neumann, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst einer Aufgabensammlung für die oberen Klassen der Mittelschulen. Ausgabe für Realschulen. Wien, Tempsky. 28., 27. oder 26. Auflage. 3 K 80 h.
- čnik-Spielmann, Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen, Wien, Tempsky. 24. oder 23. Auflage. 3 K 80 h.
- la, Hochstetter-Bischof, Leitfaden der Mineralogie und Geologie für die oberen Klassen der Realschulen. Wien, Hölder. 17. Auflage. 3 K.
- enberg, Lehrbuch der Physik für die oberen Klassen der Mittelschulen. Ausgabe für Realschulen. Wien, Hölder. 2. oder 1. Auflage. 5 K.
- olík-Heller, Elemente der darstellenden Geometrie. Ein Lehrbuch für Oberrealschulen. Wien & Prag, Tempsky. 3. oder 2. Auflage. 4 K.

Für die israelitischen Schüler

werden folgende Lehrbücher der mosaischen Religionslehre je nach Bedarf in den beistehenden zwei Abteilungen verwendet werden:

- Weiß, Die biblische Geschichte nach den Worten der heil. Schrift I. Teil. 1903. Wien, k. k. Schulbuchverlag. 2 K 40 h.
- Levy, Biblische Geschichte. Breslau, Jakobsohn. 13. oder 12. Auflage. 2 K 12 h.
- Wolf, Kurzgefaßte Religions- und Sittenlehre. Wien, Hölder, 9. od. 8. Aufl. 4 K.
- Kaiserling, Das erste Buch Moses. Prag, Brandeis. Schulausgabe. 1 K 10 h.
- Kaiserling, Das fünfte Buch Moses. Prag, Brandeis. Schulausgabe. 90 h.
- Weiß, Lehrbuch der jüdischen Religionsgeschichte für die höheren Klassen der Mittelschulen. Prag, Brandeis. 2 K 30 h.
- Königsberg S., Alluph Thephillah. Prag, Brandeis. 2. Auflage. 1 K.

b) Für die nicht obligaten Fächer.

- Ritschel & Ryp1, Methodisches Elementarbuch der böhmischen Sprache. Prag, k. k. Schulbuchverlag. 3. Auflage. 2 K geb.
- Tieftrunk, Böhmisches Lesebuch I. Teil. Prag, Kober. 8. Auflage, 2 K 70 h.
- Schober, Böhmisches Lesebuch für die Oberklassen deutscher Mittelschulen. Wien, Prag, Tempsky. 4 K 50 h.
- Hauler, Lateinisches Übungsbuch für die 2 unteren Klasse des Gymn. Wien, Pichler. 18. Auflage. 1 K 40 h.
- Weidner, Cornelii Nepotis Vitae. 5. Auflage. Wien, Tempsky. 1 K 80 h.
- Weizmann, Lehr- und Übungsbuch der Gabelsberger Stenographie. Wien, Pichler, Mann & Altmann, 8. oder 7. Auflage, 2 K 80 h geb.
- Tomaschewitz, Wiener Liederkranz. Wien und Prag, Tempsky, 1 K 20 h.
- Mende, Liederbuch für Studierende an österreichischen Mittelschulen. Prag, Rohrer & Sievers. 4. oder 3. Auflage, 2 K 20 h.

IV. Freie Lehrgegenstände.

Böhmische Sprache.

I. Kurs, wöchentlich 3 Stunden.

Einführung in die Laut- und Schriftlehre samt gründlicher Durchübung schwierigen Lautverbindungen an ganzen Sätzen. Durchnahme des Übungsstoffes 33 Lektionen aus Ritschel und Ryp1's Methodischen Elementarbuch. — Leichte Sprachübungen über tägliche Vorkommnisse.

Monatlich je eine Schul- und eine Hausarbeit.

Schülerzahl: Im I. Sem. 27, im II. 25.

Lehrer: Prof. Jakob Neubauer.

II. Kurs, wöchentlich 3 Stunden.

Wiederholung und Fortsetzung des durchgenommenen Lehrstoffes der I. Abteilung. Durchnahme des Übungsstoffes der ersten 66 Lektionen von Ritschel

pl's Methodischem Elementarbuch. — Die Schüler wurden angehalten, ihre Anfragen, Wünsche etc. unter dem Beistande des Lehrers in böhmischer Sprache vorzutragen.

Monatlich je eine Schul- und eine Hausarbeit.

Schülerzahl: Im I. Sem. 13, im II. Sem. 11.

Lehrer: Prof. Dr. Eduard Nonnenmacher.

III. Kurs, wöchentlich 2 Stunden.

Wiederholung und Fortsetzung des durchgenommenen Lehrstoffes der II. Abteilung. Durchnahme des Übungsstoffes der ersten 92 Lektionen von Ritschel und pl's Methodischem Elementarbuch. — Beschreibung von Gegenständen, die den Schülern aus dem Leben oder dem Unterrichte bekannt sind. Umgestaltung kleiner zählender Gedichte in Prosa. Inhaltsangaben der gelesenen Lesestücke. Übersetzung von 25 Lesestücken aus: „Böhmisches Lesebuch für Schüler an Mittelschulen“ von Karl Hofstrunk. Memorieren einiger Gedichte. Eingübte Lieder: Rakovská národní hymna. Růže pustých polí. — Na jaro.

Monatlich je eine Schul- und eine Hausarbeit.

Schülerzahl: Im I. Sem. 9, im II. Sem. 10.

Lehrer: B.-S.-Kat. Franz Cepník.

IV. Kurs, wöchentlich 2 Stunden.

Wiederholung und Fortsetzung des durchgenommenen Lehrstoffes der III. Abteilung. Durchnahme des ganzen Übungsstoffes von Ritschel und Ryppl's Methodischem Elementarbuch und Übersetzung von 10 Lesestücken aus: „Böhmisches Lesebuch für Oberklassen deutscher Mittelschulen“ von Dr. Karl Schober.

Beantwortung böhmisch gestellter Fragen im Anschlusse an Gelesenes; Übersetzungen aus dem Böhmischen ins Deutsche; Inhaltsangaben größerer Lesestücke.

Monatlich je eine Schul- und eine Hausarbeit.

Schülerzahl: Im I. Sem. 6, im II. Sem. 6.

Lehrer: B.-S.-Kat. Franz Cepník.

Lateinische Sprache.

I. Kurs, wöchentlich 3 Stunden.

Die Haupterscheinungen der Deklinationen der Substantiva und Adjektiva. Das Verb. Pronomina. Numerale. Die Konjugationen. (Nach dem Lateinischen Übungsbuch von Dr. Johann Hauler, Abteilung für das erste Schuljahr, Ausgabe A).

Im 2. Semester Lektüre ausgewählter Kapitel aus verschiedenen Autoren, besonders nach Hoffmann's Historiæ antiquæ und parallele Behandlung der wichtigsten Kapitel der Syntax.

Schriftliche Arbeiten. Im Semester 3 Schularbeiten und stündlich schriftliche Übungen.

Schülerzahl: Im I. Sem. 32, im II. Sem. 23.

Lehrer: W. L. Heinrich Gröbl.

Stenographie.

I. Kurs, wöchentlich 2 Stunden.

Schriftzeichen, Wortbildungslehre. — Wortkürzungslehre. Sigel und feststehende Ausdrücke. Schreibe- und Leseübungen. Kurzer Abriss des Lebens und Wirkens des Lebensbergers. (Nach Weizmanns Lehrbuch).

Schülerzahl: Im I. Sem. 24, im II. Sem. 23.

Lehrer: Prof. Franz Walters.

II. Kurs, wöchentlich 2 Stunden.

Fremdwörter und Eigennamen. Partikuläre Verbindungen. Theorie der Verkürzung. Schreib- und Leseübungen mit praktischer Anwendung der Satz- und Wortbildung. Diktandoschreiben mit allmählich sich steigender Schnelligkeit. (Nach Weizmann Lehrbuch).

Schülerzahl: Im I. Sem. 22, im II. Sem. 18.

Lehrer: Prof. Franz Walters.

Gesang.

I. Abteilung, wöchentlich 2 Stunden.

Die Tonzeichen und ihre Geltung. Vorsetzungszeichen, Takt und Tempo, Stellung und Bildung der Dur- und Molltonleiter. Bedeutung und Gebrauch des Atemholens. Mundstellung und Tonansatz. Trefferübungen. Kirchliche und weltliche Lieder.

Schülerzahl: Im I. Sem. 23, im II. Sem. 18.

II. Abteilung, wöchentlich 2 Stunden.

Intervallenlehre, Darstellung und Ordnung der leitereigenen Dreiklänge und deren Wirkung auf das Gehör. Praktische Übungen im Treffer der Intervalle. Chöre für gemischte Stimmen und Männerchöre.

Schülerzahl: Im I. Sem. 30, im II. Sem. 28.

Lehrer: Franz Moßl.

Praktische Übungen im chemischen Laboratorium.

I. Kursus: Allgemeine analytische Handgriffe. Spezialreaktionen der wichtigsten Elemente. Qualitative Analyse einfacher und zusammengesetzter Lösungen, Analyse einfacher fester Stoffe.

Schülerzahl: Im I. Sem. 5, im II. Sem. 4.

II. Kursus: Wiederholung der qualitativen Analyse. Gewichts- und maßanalytische Übungsaufgaben. Lötrohranalysen ausgeführt an Mineralen. Einfache Beispiele der organischen Elementaranalyse. Einfache präparative Arbeiten.

Schülerzahl: Im I. Sem. 2, im II. Sem. 2.

Lehrer: Prof. Ferd. Wagner.

Modellieren.

Behandlung des Materiales und der Requiriten. Modellieren nach flachen plastischen Ornamenten. Herstellung von Gipsabgüssen.

Schülerzahl: Im I. Sem. 9, im II. Sem. 9.

Lehrer: Karl Brufcha.

7. Themen für die schriftlichen Arbeiten aus Deutsch in den Oberklassen.

V. Klasse.

1. Arion und Ibykus. Ein Vergleich. — 2. Ratgeb in dem Märchen „Die dreiaben“. — 3. Die vier Weltalter. Nach Ovid. (Schularbeit). — 4. Welchen Einfluß hat Natur eines Landes auf seine geschichtliche Entwicklung? — 5. Der Zorn des Achilles als Triebfeder der Handlung in der Ilias. — 6. Der Tod fürs Vaterland ist höherer Verehrung wert. (Schularbeit). — 7. Die geschichtlichen Tatsachen im Nibelungenlied. — 8. Der Geizige und der Verschwender. — 9. Wohl darfst du stolz und freuen; Austria, dein Haupt erheben. (Schularbeit). — 10. Licht- und Schattenseiten des Lebens. — 11. Warum scheiterten Hannibals Pläne in Italien? — 12. Der Grundriß in Chamisso's „Kreuzschau“. (Schularbeit).

Jakob Neubauer.

VI. Klasse.

1. Laßt uns, eins durch Brüderbände, gleichem Ziel entgegen gehn! — 2. Ewigkeit vergeht, Kunst besteht. — 3. Märchenhafte Züge in der Gedrondichtung. (Schularbeit). — 4. Wirf keinen Stein in den Brunnen, aus dem du getrunken hast. — 5. Die wichtigsten Folgen der Kreuzzüge. (Schularbeit). — 6. Inwieferne vertreten Mars und Weislingen zwei verschiedene Richtungen des Rittertums? — 7. Die Einheit der Handlung in „Wilhelm Tell“. — 8. Was bietet uns unser Heimatland? (Schularbeit). — 9. Die Folgen der großen Entdeckungen am Beginne der Neuzeit. — 10. Charakteristik Tellheims nach dem ersten Akte des Dramas „Minna von Barnhelm“. (Schularbeit). — 11. Das Wasser im Dienste des Menschen.

Dr. Eduard Nonnenmacher.

VII. Klasse.

1. Der Tod Attinghaufens und Gefßlers. — 2. Nur der Irrtum ist das Leben und das Wissen ist der Tod. — 3. Ansichten des Löwenwirtes und des Apothekers nach dem 3. Gesange von Goethes „Hermann und Dorothea“. (Schularbeit). — 4. Goethes „Ilmenau“. (Inhalt und Gedankengang). — 5. Eine deutsche Kleinstadt im 18. Jahrhunderte. — 6. Wo rohe Kräfte sinnlos walten, da kann sich kein Gebild gestalten. (Schularbeit). — 7. Die Dichtkunst, eine Bildnerin der Menschheit. — 8. Welche Schönheiten und welchen Reichtum bietet Österreichs Natur? — 9. Österreich und Freiheitskriege. (Schularbeit). — 10. Der größte Verlust ist, wenn der Mensch sich selbst verliert. — 11. Athen, Rom, Jerusalem, die Lehrmeisterinnen der Menschheit. (Schularbeitsarbeit).

Schullektüre: Hermann und Dorothea. — Iphigenie.

Privatlektüre: Wallenstein. — Die Braut von Messina.

Jakob Neubauer.

Freie Vorträge. (VII. Klasse.)

1. Überblick über die Entwicklung der Physik im 19. Jahrhunderte (Gruber). — 2. Eigenart der deutschen Malerei im 17. und 18. Jahrhunderte (Hergl). — 3. Welche Gefahren drohen unserem Planeten (Gail). — 4. Über das Verhältnis der Erde zur Sonne (Hecht). — 5. Der Einfluß des Menschen auf Klima und Bodenbeschaffenheit (Piekný). — 6. Der Ehrgeiz als Triebfeder zum Guten und Bösen (Schneider).

— 7. Das Zeitalter der Kreuzzüge und Hohenstaufen. (Pellet.) — 8. Die Idee Freiheit in Schillers „Wilhelm Tell“ (Kollick). — 9. Die Frauengestalten in „Wilhelm Tell“ (Koppmann). — 10. Egmont. Aufbau der Handlung (Mayer). — 11. Warum mißlang den Römern die Unterwerfung Germaniens? (Nestler). — 12. Die Deutschen. Ein Charakterbild (Sternkopf). — 13. Die Religion unserer Väter (Böhm). — 14. Das mittelalterliche Leben im Spiegel des Nibelungenliedes (Sattler). — 15. Die deutsche Treue in Sage und Geschichte (Reimann). — 16. Zur Geschichte des deutschen Gemütes (Waldmann). — 17. Die Entwicklung der Menschen zur Freiheit (Huska). — 18. Über die Erziehung der Menschheit. Nach Schillers „Künstler“ Lessings „Erziehung des Menschengeschlechtes“ (Steinkovský). — 19. Die Bedeutung Homers (Siegler). — 20. Die Entdeckung Afrikas (Weidl). — 21. Octavio und Piccolomini in ihrem Verhältnisse zu Wallenstein (Sterba). — 22. Die Weltanschauung Goethes und Schillers (Wolf). — 23. Was das Volk singt (Wurdinger). — 24. Juden, Sklaven und Slaven (Sperk). — 25. Cäsar, Wallenstein, Napoleon (Wohlrab).

Jakob Neubaue

Französische Schullektüre

neben der Chrestomathie (in allen drei Oberklassen) im II. Semester der VII. Klasse: Girardin, La Joie fait Peur.

Englische Privatlektüre

in der VI. Klasse: Nader & Würzner, Englischs Lesebuch, Stücke Nr. 43, 46.

In der VII. Klasse: Irving, The Sketch Book II.

Internationaler Briefwechsel

vom Beginne des Schuljahres 1905/6 bis Anfang Juni 1906.

Französisch.

Name u. Klasse der Schüler	wechselte Briefe mit	hat erhalten		hat geschrieben	
		Briefe	Karten	Briefe	Karten
Bretschner Andr. V.	Joseph Roche in Vienne	4	3	5	3
Hebert Friedr. V.	Marc Caillon in Le Mans	6	7	7	5
Kaiser Rudolf V.	Ivan Millot in Mirecourt	1	—	2	1
Lugner Adolf V.	Louis Maillard in Annecy	2	6	2	5
Paula Franz Jos. V.	Joseph Pile in Vesoul	4	6	4	5
Weiner Bernhard V.	Alexandre Véber in Verdun	4	6	5	7
Böhlmann Oskar VI.	Marcel Berton in Châtellerault	4	2	3	1
Hammer Georg VI.	Louis Charmasson in Aix	4	6	4	6
Groha Franz VI.	Fernand Vayffade in Montpellier	—	—	1	1
Lenk Wilhelm VI.	C. Pain in La Rochelle	3	4	3	4
Müller Adolf VI.	Guinaut in Pontoise	1	3	2	2
Schmidt Franz VI.	Hector Martin in Narbonne	1	5	2	4
Swoboda Ferd. VI.	Paul Girault in Poitiers	1	1	2	3
Tropfch Johann VI.	Emile Genthou in Vienne	5	16	6	14
Verner Anton VI.	P. Jacamon in Luxeuil-les-Bains	4	10	4	11
Gruber Josef VII.	R. de Villeneuve in Mustapha-Alger	3	8	3	5
Lecht Otto VII.	Louis Nicolle in Coutances	—	—	1	—
Muska Franz VII.	Léonce Prévot in Pamiers	—	—	1	—
Koppmann Ad. VII.	Joseph Boindat in Dijon	—	—	1	1
Mayer Josef VII.	René Técheney in Bordeaux	1	2	1	3
Bellet Anton VII.	Fernand Gueydon de Dives, Alger	1	2	2	1
Wattler Johann VII.	Pierre Lorents in Héronville	5	2	4	3
Terba Franz VII.	Philippe Nadaud in Guéret	1	3	2	5
Vohlrab Alfred VII.	Lafue in Douai	—	—	—	1
Volf Wilhelm VII.	R. Benoist in Château-Thierry	2	—	3	—

Englisch.

Lecht Siegfried VI.	Floyd Chase in Freeport	—	—	1	—
Mufnagl Josef VI.	Delmar H. Williams in San José	2	1	2	2
Maus Hubert VI.	Alfred Muehlke in Detroit	—	—	1	—
Meter Karl VI.	Frank Rivard in Detroit	—	—	1	—
Schmidt Franz VI.	Harry Jahm in Ithaca	—	—	1	1
Tropfch Johann VI.	Ernest Warren in Barre	2	2	2	4
Thöm Josef VII.	George S. Barnum in Lockport	2	1	3	—
Gruber Josef VII.	R. M. Hallet in Cambridge	1	—	1	—
Lecht Otto VII.	L. Freeland Detrick in Baltimore	1	—	1	—
Muska Franz VII.	Chas. Gregory in Ithaca	2	5	3	6
Koppmann Ad. VII.	W. Lemuel Hubbard in Baltimore	1	1	2	1
Wettler Max VII.	James Nelson in Moline	3	8	4	6
Bellet Anton VII.	Josiah C. Folsom in Billenica	—	—	2	—
Reimann Erich VII.	Claude Lynn in Dallas	2	3	3	1
Segler Anton VII.	Arthur Miller in Springfield	2	1	2	2
Volf Wilhelm VII.	Phil. Stuart in Seattle	1	—	2	—

VI. Unterstützung der Schüler.

A. Stipendien.

Nr.	Name des Stiftlings	Klassen	Name der Stiftung	Be
1	Ondrák Anton	IV.	Kaiser Franz Josef-Studienstiftung der Planer Sparkasse I. Platz v. 19. XI. 1905	1
2	Siegler Anton	VII.	„ II. Platz v. 19. XI. 1905	1
3	Hufnagl Josef	VI.	„ III. Platz v. 16. XI. 1901	1
4	Kroha Franz	VI.	„ IV. Platz v. 28. XI. 1902	1
5	Thummerer Robert	I.	Jahres-Stipendium der Ortsvertretung der Stadtteile Plan mit Altstadt, 9. I. 1906	
6	Baumgartl Karl	II.	„	
7	Wolf Josef	II.	„	
8	Baumgartl Josef	IV.	„	
9	Schmid Franz X.	IV.	„	
10	Fretschner Andreas	V.	„	
11	Krieglstein Karl	V.	„	
12	Hammer Georg	VI.	„	
13	Werner Anton	VI.	„	
14	Sattler Johann	VII.	„	
15	Reimann Roland	I.	Jahres-Stipendium der Planer Bezirksvertretung 27. III. 1906	1
16	Vaget Anton	IV.	„	1
17	Sternkopf Eduard	VII.	„	1
18	Schulz Rudolf	III.	Aug. Martin'sche Studentienstiftung Platz Nr. 1; 24. IV. 1905, Z. 83.584-St.	2
19	Kohl Leonhard	II.	Sophie Parthe'sche Studentienstiftung 11. IV. 1906, Z. 81.917-St.	3

B. Lokales Unterstützungsweisen.

»Studenten-Unterstützungs-Verein« und »Speise- und Suppen-Anstalt in Plan«.

I. Studenten-Unterstützungsverein in Plan.

Die Vereinstätigkeit des »Studenten-Unterstützungs-Vereines in Plan« im abgelaufenen Schuljahre 1905/6 ist aus den folgenden Angaben ersichtlich:

a) Kassebericht.

1. EINNAHMEN.

Kassenbestand am Ende des Schuljahres 1904/5	3537 K 14 h
Einzuwachs	106 „ 66 „
Kinden und Mitgliederbeiträge	460 „ 18 „
Ertrag eines Konzertes ¹⁾	432 „ 96 „
Anteil eines Schauturnens ²⁾	30 „ - „
Zusammen	4566 K 94 h

2. AUSGABEN.

Atlanten und Lehrbücher	565 K 44 h
Schreib- und Zeichenrequisiten	113 „ 76 „
Einsparungen	7 „ - „
Zusammen	686 K 20 h
Vermögen gegen Ende 1905/6	3880 K 74 h

¹⁾ Am 22. April 1906 fand im hiesigen Bärenhaus-Saale von 4 bis 6 Uhr nachm. in einem zahlreichen, aufmerksamen und dankbaren Auditorium ein Konzert statt, dessen Gesangs- und Musikproduktionen sehr beifällig aufgenommen wurden. Zu dem schönen Erfolge trugen bei teils durch Solovorträge, teils durch musikalische Leitung: Fräulein Antonia Diener, Herr Lehrer Rud. Sabathil aus Marienbad, Herr Gutsbesitzer Joh. Rödl, Herr T.-L. Karl Bruchha, Herr B.-L. Dollhopf, Herr Techniker Herm. Hummer, Herr Techniker Anton Rödl, Herr Lehrer Alb. Wurtinger, Herr Jur. Zwack und der geachtete Damenchor des Gesangs-Vereines Harmonie. Herr Musik- und Gesangslehrer F. Moßl war Dirigent der gesanglichen und musikalischen Vorträge der Realschüler u. d. Salonorchesters und fand seine Mühen bei den Proben und Proben belohnt durch den allgemein anerkannten Erfolg des Konzertes. Der Prof. Jak. Neubauer hatte alle Mühen und Sorgen der Vorarbeiten und der Veranstaltung getragen. Die löbl. Ortsvertretung trug zur Anschaffung der Musikalien bei. Allen diesen Damen und Herren sowie allen sonstigen Mitwirkenden und Förderern dieses Unternehmens spricht die Direktion für den Unterstützungs-Verein den wärmsten Dank aus.

²⁾ Am 10. Juni 1906 wurde unter den Klängen der Stadtmusikkapelle ein Schauturnen auf dem Spielplatze (5 ~ 7 Uhr nachm.) abgehalten, das trotz des nicht günstigen, etwas feuchten Wetters recht gut besucht war und bis zum Ende großes Interesse und Beifall erregte. Von dem Überschusse der Brutto-Einnahme von 2 K 80 h über die Auslagen wurde dem Studenten-Unterstützungs-Verein der Betrag von 30 K zugewendet. Der Rest ist dem Spielfonde gewidmet.

Verzeichnis der Wohltäter und Mitglieder des Unterstützungs-Vereines, ihrer Spenden und Beiträge.*)

1. Außerhalb Plans.

Budweis: Herr k. k. Professor Anton Pöbeheim 2 K. ~ Bruck a. H.: Herr

*) Auch der Überzahlungen beim Konzerte am 22. April 1906.

O.-L. F. Huska 1 K. ~ Dürrmaul: Herr Lehrer Ant. Haubner 1 K. ~ Heiliges
kreuz: Hochw. Pfarramt 2 K. ~ Hetschigau: Herr O.-L. Pögl 1 K. ~ Josef-
hütte: H. Reittenberger 1 K. ~ Karlsbad: Frau B. v. Maurig: 13 Lehrbüh-
für die I. Klasse. ~ Kuttienplan: Sr. Exz. Herr Graf Berchem 10 K, J.
Domänendirektor Böhm 9 K, Herr k. u. k. Oberstleutnant i. R. Johann Hartl 1
Herr Pfarrer Lihne 1 K, Herr O.-L. Mugrauer 1 K, Herr Buchhalter Pöhacker
Herr Rabbiner H. Weiner 2 K. ~ Marienbad: JUDr. Franz Nadler 3 K,
Ebert 2 K, Herr Dr. Ott 1 K, Herr Maraf 6 K. — Michelsberg: Herr Altner
3 K, Herr O.-L. Behr 2 K. — Naketendörflas: Herr Gicklhorn 1 K.
Ottenreith: Herr Pfarrer Čečetka 1 K, Herr O.-L. Reimann 1 K. — Píšť
Herr Lehrer Huska, 1 K. — Promenhof: Herr O.-L. Stelzner 1 K. — Rankow
Herr Steiner 5 K. — Stift Tepl: Herr Prälat Abt G. Helmer 20 K. — Wi-
Herr k. k. Professor Dr. H. L. Fulda 10 K.

2. In Plan.

Die P. T. Herren bzw. Damen bzw. Körperschaften*): W. Albert, Schlo-
meister 2 K, M. Andres, Holzhändler 3 K, F. Arnold, Tischlermeister 1 K, J. Bach,
Stadttrat 1 K, Frl. Anna Bayer 1 K, MUDr. S. Beck, k. k. Bezirksarzt 7 K, F.
Behr, Rafeur 1 K, Sig. Berstl, k. k. Bezirksstierarzt 3 K, W. Bittner, Gastwirt 2 K, F.
Retti Böckl 1 K, Ignaz Böhm, Hausbesitzer 1 K, Joh. Böhm, Fleischhauer 2 K,
Bertha Bothe, Lehrerin 2 K, Rudolf Braun, Stadttrat 8 K, Karl Brufcha, Turnle-
1 K, Daniel Buberl, Gastwirt 1 K, Johann Buberl, Gastwirt 2 K, Johann Bul-
Privatier 1 K, Hans Castalio, Buchbinder 3 K, Franz Cepník, Katechet 2 K,
Christof, Weißgerber 1 K, Josef Christof, 85.-II. 2 K, Forstadjunkt Chudoba
Frl. Antonia Diener 2 K, Georg Dollhopf, B.-S.-Lehrer 2 K, H. Dolleschal, Ober-
walter 1 K, Stephan Donner, Offizial 7 K, Christian Donner, Bäckermeister 2 K,
Dont, B.-S.-Lehrer 1 K, JUDr. Josef Engl 20 K, Frau Doktor Engl 20 K, Josef Fec-
Brauer 4 K, Frl. Hanna Fenzl, k. k. Postbeamte 2 K, JUDr. Fiedler, Advokat
Adolf Forkl, Wachszieher 1 K, Frau Anna Goller 1 K, St.-E. Josef Graf, 1 K, Hein-
Gröbl, k. k. Professor 2 K, Sal. Gutwillig, Kaufmann 1 K, Ludw. Hammer B.-S.-Direk-
1 K, Franz Hanika, Elektrizitätswerk-Besitzer 5 K, Frl. M. Hanl, B.-S.-Lehrerin
Gefangsverein „Harmonie“ 5 K, Frau Marg. Hauptstein, Gastwirtin 4 K, Philipp H-
Kaufmann 1 K, Siegmund Hedt Kaufmann 3 K, Josef Heider, Glasermeister 2
Frau v. Hennevogl 3 K, Josef Herttan, Kontrollor 2 K, Andreas Hochm-
Kaufmann 1 K, Karl Hoffmann, Kaufmann 2 K, Johann Hohenberger, Uhr-
cher 1 K, Michael Holik, Kaufmann 5 K, Wilhelm Hoyer, Lehrer 2 K, Josef Hu-
Kassier der Sparkasse 4 K, Josef Hufnagl, Stadtkassier 1 K, Anton Ingrisch, Bür-
meister 10 K, Franz Ingrisch, Tischlermeister 1 K, Wolfgang Jankner, Bäck-
meister 1 K, Karl Ježek, Domänendirektor 2 K, Eduard Kanzler, Stadtrat
Franz Kanzler, Ortsvorsteher 2 K, Hans Kanzler, Buchhändler 4 K, Karl Ka-
Apotheker 4 K, Domänenrat Klein 5 K, Franz Klus, Kaplan 2 K, A.
Knab, Buchdruckereibesitzer 1 K, Frau Helene Köhler 2 K, F. Köppner, Hausbe-
2 K, Albert Kraus, Tabakverleger 5 K, Siegmund Kraus, Fleischhauer 2 K, F.
Kubát, Rentmeister 3 K, Anton Kühnl, Sattlermeister 2 K, Karl Kundmann, Bäck-
meister 1 K, Wenzel Kundmann 1 K, Johann Kuchenhart sen. 4 K, Franz Kuch-
2 K, Wenzel Kurzka, B.-S.-Lehrer 1 K, Frau Langenberger 1 K, Johann Langham-
Kaufmann 5 K, Hugo Linhard, Buchhalter 2 K, Franz Löffler, Kaufmann 4 K, J.
Lorenz 2 K, Josef Löfcher, k. k. Statthaltereirat 2 K, Al. Lugner 1 K, Frau A-

*) Die gewährten Kosttage und Freitische sind nach dem Berichte über
Speise- und Suppenanstalt ausgewiesen.

Weyer, Stadtratswitwe 2 K, Frau Franziska Metz 40 h, Franz Moißl, Musiklehrer 2 K, Frl. Anna Müller, B.-S.-Lehrerin 7 K, Frau Franziska Müller 2 K, Ludwig Gele, k. k. Professor 3 K, Jakob Neubauer, k. k. Professor 9 K, Dr. Eduard Sonnenmacher, k. k. Professor 4 K, Se. Exz. Karl Erwin Graf Nostitz, k. u. k. Geheimer Rat 20 K, Franz Ortmann, Bäckermeister 1 K, Joh. Ott, Kaufmann 5 K, Frl. Ott 1 K, Frl. Ott jun., Kaufmann 1 K, Franz J. Paula, k. k. Offizial 2 K, Josef Patzelt, Schlossermeister 1 K, Eduard Petraschka, Oberlehrer 2 K, Frl. Elfa Pfeifer, k. k. Postbeamte 2 K, Franz Pichl, Bäckermeister 2 K, Franz Pivec, Stationschef 7 K, Anton Praxa, k. u. k. Oberstleutnant d. R. 7 K, MUDr. A. Rasp, Distriktsarzt 14 K, Frau Doktor Rasp, 2 K, Johann Rasp, k. k. Oberpostmeister 10 K, H. Ratzenberger 1 K, Franz Reeger, Altbürgermeister 19 K, Aug. Ritschel, k. k. R.-S. Direktor 14 K, Aug. Fufek, k. k. St.-Inspektor 6 K, Jos. Rödl, Gutsbesitzer 12 K, Jos. Rößler, k. k. St.-Adj. 1 K, F. Rubner, Stadtrat 4 K, Karl Scheiter, k. k. Professor 3 K, Brüder Scheuer 2 K, Jos. Schmid, f. e. Vikar u. Konf.-Rat 4 K, Frau Anna Schmidt, Rentmeisterswitwe 2 K, F. Schneider, k. k. Bezirkschulinspektor 2 K, Joh. Scholz, k. k. Offizial 1 K, Ernst Seidl, Obergärtner 2 K, Josef Seidl, Glasermeister 1 K, Andreas Schöffl 1 K, Frl. Maria Siegl, k. k. Postbeamte 2 K, Gustav Stein, Kaufmann 2 K, Fr. Th. u. Frl. Stöhr 2 K, Joh. Strigl, k. k. Steuereinnnehmer 5 K, Rich. Strigl, Hotelier 1 K, F. Ther. Threin 2 K, Th. Thurner, Baumeister 9 K, Friedr. Tischler, k. k. Professor 1 K, J. Toháček, k. k. Oberingenieur 10 K, Jos. Tomášek, k. k. Professor 3 K, Franz Topfch, Bahnkassier 3 K, Ant. Turba 1 K, G. Ulbrich, Droguist 2 K, Joh. Urban Privier 2 K, MUDr. Mich. Urban, Stadtarzt 2 K, Ph. Dr. F. Urban, k. k. Professor 2 K, MUDr. Vogl, k. k. Gerichtsadjunkt 2 K, Josef Waha, Baumeister 2 K, Frau Candida Walter 2 K, Franz Walters, k. k. Professor 3 K, Ferd. Wagner, k. k. Professor 3 K, J. J. Slavoslaw v. Wartburg, k. k. Notar 39 K, Frau Anna Weber 4 K, Julius Wegscheider, Forstförster u. Fr. 9 K, Frau Kath. Weidinger 1 K, Wenzel Weidl, Stadtrat 4 K, Georg Weidl, Lehrer 1 K, Frau Anna Weiß 1 K, Emil Weiß 1 K, Hans Weiß, 2 K, Mathias Weiß 1 K, Hans Weinmann, Photograph 1 K, Joh. Weps 1 K, Wenzel Werner, k. k. Ingenieur 4 K, Ant. Wiblinger, k. k. Steueramts-Kontrollor 2 K, Frau Wilhelm 1 K, Alb. Wurtinger, Lehrer 2 K, Anton Zeller, Bürger 122-II. 2 K, Josef Ziker, k. k. Bezirkssekretär 2 K, Frau Zenker 1 K, Frau Theresia Ziegler 1 K, C. Zimmermann, k. k. Bezirksrichter 5 K, Anton Zimmert, Bürger 2 K, Frau Stabsamts Witwe Zwack 5 K, Frau Zwack 1 K.

II. Speise- und Suppenanstalt.

Im Anschlusse an den im VII. Programme der K. F. F.-Staatsrealschule veröffentlichten
inklusive 31. Mai 1905 reichenden Bericht.

Tätigkeit vom 1. Juni 1905 bis 31. Mai 1906.

A) Kaffagebarung.

E m p f ä n g e.		K	h	K
1.	Kaffarest	107	87	.
2.	Spenden in Geld	1255	40	.
	Spenden in Viktualien	34	80	.
3.	Bezahlte Suppen und Mahle			
	a) von Realschülern	795	30	.
	b) „ Bürgerschülern	248	70	.
	c) von der Stadtgemeinde Plan für Arme	70	50	.
	d) „ Privaten	—	60	.
4.	Aus der Sparkassa erhoben	895	—	.
	Summa der Empfänge	3408
A u s g a b e n.				
1.	Kochauslagen mit Lohn der Köchin	2461	61	.
2.	Verbrauchte Viktualien	34	80	.
3.	Inventarnachschaffung	18	98	.
4.	Arbeitslöhne und kleinere Reparaturen	16	81	.
5.	In die Sparkassa eingelegt	872	—	.
	Summa der Ausgaben	3404
	Kaffarest an Bargeld	3
B) Sparkassabüchelgebarung.				
1.	Stand am 31. Mai 1905	2047	75	.
2.	Zugewachsene Zinsen	65	78	.
3.	Neue Einlagen	872	—	.
	Summa	2985
	Behoben	895
	Stand des Guthabens am 31. Mai 1906	2090

J. Strig.

C) Wirkksamkeit.

An 237 Speisetagen wurden 6406 Mahle samt Suppen und 3020 bloße Suppen verabreicht, die mit der Kost der Köchin die ausgewiesenen Gesamtkochauslagen 2496 K 41 h erforderten. Gratisuppen wurden an arme Volksschüler in der Winterperiode November bis März an den Wochentagen 20—30 täglich verabreicht. Zahl der Schüler gab es durchschnittlich für Suppen 4, für ganze Mahle 8 täglich.

Im verfloffenen Schuljahre nahm die wirtschaftliche und meritorische Tätigkeit des Komitees einen ganz beträchtlichen Aufschwung durch die erhöhte Teilnahme der Planer Damenwelt an der inneren Verwaltung unserer humanitären Unternehmungen.

Am 23. Oktober 1905 fand eine Beratung zahlreicher Planer Damen statt in gemeinsamer Sitzung mit dem durch das Komitee für die Speise- und Suppenanstalt verordneten Ausschusse des Studenten-Unterstützungs-Vereines über zweckmäßige Maßnahmen zu Gunsten der Anstalt. Es wurde ein Damenkomitee gewählt, bestehend aus: Frau Statthaltereirat Löfcher, Frau Bürgermeister Ingriß, Frau Bezirksarzt Beck, Frau Oberpostmeister Rasp, Fräulein Bürgerstullehrerin Hanl. Die Damen stellten sich die rationelle Organisation und Leitung der inneren Koch- und Wirtschaftsangelegenheiten der Speiseanstalt zur Aufgabe, um tunlichste Ersparnisse ohne Beeinträchtigung der Qualität und Quantität der verabreichten Speisen zu erzielen. Nachdem die frühere Köchin Johanna Tschek aus Gesundheitsrücksichten gekündigt hatte, wurde eine neue Anstaltsköchin Marie Buberl vom 15. November 1905 an angestellt.

In ganz hervorragender Weise hat sich der Wohltätigkeitsfönn und die Tatkraft des Damenkomitees geäußert durch die am 6. Jänner 1906 von 4—7 Uhr nachm. gefolgte sehr gelungene Veranstaltung einer musikalisch-literarischen Unterhaltung im Erensaale, die von schönem Erfolge gekrönt war. Orchesterstücke, Lieder, humoristische, ernste und heitere Vorlesungen, Männer- und Frauenchöre und sogar ein einaktiges Lustspiel wurde geboten. Das Interesse des zahlreichen distinguierten Auditoriums, unter dem auch der Hochadel unserer Gegend sehr gut vertreten war, konzentrierte sich auf die sanglichen Leistungen der Gräfin Ernestine von Nostitz-Rieneck, deren so bewundernde Mitwirkung das Damenkomitee zu gewinnen wußte. Einen großen Teil der Mühen der erfolgreichen Veranstaltung trug Fräulein B.-S.-Lehrerin Hanl. Das Ergebnis nicht gewöhnliche Reinertragnis von 610 K ist ein Beweis dafür, wie glücklich das Programm gewählt war und andererseits wie groß das Interesse der Planer Bevölkerung für die Speiseanstalt geworden ist. — Allen Mitwirkenden sei der innige Dank für ihre Leistungen gesagt.

Mit besonderer Anerkennung und besten Dank sei an dieser Stelle der hingebungs-vollen Opferwilligkeit aller jener Damen gedacht, die so bereitwillig den Ehrendienst der Auspeisung in der Suppenanstalt versahen und so einfache Handreichungen zu adeln wußten, indem sie dieselben in den Dienst einer edlen Sache, der Humanität stellten.

Auch im verflossenen Jahre hat Herr k. k. Steuereinnnehmer Johann Strigl sich durch die umsichtige Rechnungsföhrung und sonstige Mühewaltung, die Herren Hof. Dr. Ferd. Urban und B.-S. Direktor L. Hammer durch die Evidenzhaltung der Frequenz und der Einzahlungen der Realschüler, bezw. Bürgerschüler um die Speiseanstalt sehr verdient gemacht, wofür ihnen der wärmste Dank gesagt wird.

Verzeichnis der Spenden für die Speise- und Suppen-Anstalt.

Die P. T. Korporationen, Damen, Herren:

Venzel Albert	K 2.	Retti Böckl	„ 1.	Ant. Christof	1 Korb Kar-
Nx Andres	„ 2.	Joh. Böhm	„ 2.	toffel i. W. v.	K 1.20
Nrie Arnold	„ 1.	Ign. Böhm	„ 1.	Joß. Christof	85.-II. „ 1.
Josef Bachsteig	„ 1.	Berta Bothe	„ 2.	Karl Christof	„ 1.
Ana Bayer	„ 1.	Rud. Braun	„ 8.	J. Chudoba	„ 1.
MDr. S. Beck	„ 5.	Karl Brufcha	„ 2.	Damen Plans	als Reiner-
Al. Behr	„ 1.	Daniel Buberl	„ 1.	tragnis des Konzertes	am
ET.-A. Berstl	„ 2.	Joh. Castalio	„ 2.	6. Jänner 1906	K 610.
Ferr Binder	„ 1.	Fr. Cepník	„ 2.	Gemeinde Damnau	K 10.

Antonia Diener	K 2.	Elise Köppner	K 2.	Hans Rasß	„ 10
O.-V. Dolleschal	„ 4.	Franz Köppner	„ 2.	u. 2 Sack Kartoffel i.	„ 4
Georg Dollhopf	„ 1.	Albert Kraus	„ 2.	von	K 4
Anna Donner	„ 2.	Ludwig Kraus	„ 4.	MUDr. Rasß	„ 3
Aug. Donner	„ 1.	Siegmund Kraus	„ 2.	Frau Oberpostmeister R.	„ 1
Christian Donner	„ 2.	Anna Kröhn	„ 1.	ein Schreibzeug	„ 1
Karl Donner	„ 1.	A. Kroner	„ —.40	Fr. Dr. Rasß 10 Stück	„ 1
Stephan Donner	„ 4.	Franz Kubat	„ 2.	schirrtücher	„ 1
Josef Dont	„ 1.	Franz Kuchenhart	„ 2.	Franz Reeger	K 10
Dr. Josef Engl	„ 10.	Joh. Kuchenhart	„ 2.	Joh. Richter	„ 2
Josef Fechter	„ 2.	Anton Kühnl	„ 1.	Aug. Ritschel	„ 20
Hanna Fenzl	„ 2.	Karl Kundmann	„ 2.	J. Rödl	„ 2
Dr. Fiedler	„ 2.	Wenzel Kundmann	„ 1.	Aug. Roufek	„ 10
Adolf Forkl	„ 2.	Wenzel Kurzka	„ 1.	Franz Rubner	„ 2
Fr. Dr. Forstner 3 Körbe		Stadt Kutenplan	„ 20.	Dr. August R. v. Roß	„ 1
Kartoffel i. W. v. K	2.40	K. Langenberger	„ 1.	baum	K 5
Fr. Ob.-W. Forstner	„ 2.	Hans Langhammer	„ 5.	Karl Scheiter	„ 2
Dr. H. L. Fulda	„ 20.	H. Linhart	„ 2.	Max Scheuer	„ 2
Anna Goller	„ 1.	Franz Löffler	„ 2.	Josef Schmid	„ 2
Fanny Graf	„ 1.	Franz Löffler 10 kg Reis	„ 1.	Anna Schmidt	„ 1
Georg Güntner	„ 2.	im Werte von K	4.80	Johann Schmidt	„ 2
S. Gutwillig	„ 1.	Karl Löwy	„ 1.	Ad. Schneider	„ 2
Ludw. Hammer	„ 1.	Josef Lösther	„ 5.	A. Schöfl	„ 2
Franz Hanika	„ 6.	Al. Lugner	„ 1.	Ernst Seidl	„ 1
Marie Hanl	„ 4.	Anna Mayer	„ 2.	Wally Siegl	„ 2
Siegmund Hecht	„ 2.	Fanny Metz	„ 1.	Jos. Sperl	„ 1
Josef Heider	„ 2.	Rudolf Metz 1 Korb Kar-		Franz Spiske	„ 1
Fr. v. Hennevogl	„ 2.	toffel im W. v. K	1.20	Seine Exzellenz der H-	„ 1
Joh. Herttan	„ 2.	und sämtliche Reparaturen		Statthalter von Böhmen G-	„ 1
Karl Hoch 1 Sack Kartoffel		am Kochgeschirre unent-		von Coudenhove	K 8
im Werte von	K 2.40	geltlich		Gustav Stein	„ 2
Andr. Hochmuth	„ 2.	Franz Moißl	K 1.	Maria Stöhr	„ 2
Karl Hofmann	„ 2.	Anna Müller	„ 3.	Paul Stopfer	„ 1
Mich. Holik	„ 5.	Fanny Müller	„ 2.	Johann Strigl	„ 5
Wenzel Holick	„ 1.	Ludw. Nagele	„ 2.	Richard Strigl	„ 2
Wilhelm Hoyer	„ 1.	Jak. Neubauer	„ 5.	Theresia Threin	„ 1
Joh. Hüber	„ 2.	Dr. E. Nonnenmacher	4.	Thom. Thurner	„ 5
B.-M. A. Ingrischn	„ 10.	F. Ortmann	K 1.	St.-Adj. Thurnwald	„ 1
„ „	1 Sack	Joh. Ott	„ 3.	Friedr. Tischer	„ 2
und 1 Korb Kartoffel im		Josef Patzelt	„ 1.	Julius Tocháček	„ 5
Werte von	K 3.60	Fr. J. Paula	„ 2.	Franz Tropfsh	„ 2
W. Jankner	„ 2.	Ed. Petraschka	„ 2.	u. 3 Körbe Kartoffel	„ 1
Karl Ježek	„ 2.	Elja Pfeifer	„ 2.	Werte von	K 2
Eduard Kanzler	„ 2.	Franz Pichl 5 kg Graupen		Viktor Tschuschnner	„ 1
Franz Kanzler	„ 2.	und 5 kg Gries im Werte		Anton Turba	„ 1
Hans Kanzler	„ 6.	von	K 4.	MUDr. Trost 2 S. Karto	„ 1
Karl Kaspar	„ 2.	Stadt Plan	K 100.	im Werte von	K 4
Anton Knab	„ 1.	Franz Pivec	K 2.	Ph. ^o Dr. F. Urban	„ 1
Kellerabend, Reiner-		Adjunkt Podrahý	„ 1.	Joh. Urban	„ 2
trag	K 22.	Josefine Rasß	„ 2.	MUDr. Urban	„ 2

Dr. F. Vogl	K 2.	Ing. Werner	K 3.	Offz. Wurtinger	K 1.
d. Wagner	„ 2.	O-G. Wikullil	„ 5.	Ant. Zeller 122.-II	„ 1.
nz Walters	„ 2.	Johann Weiß	„ 3.	Josef Zenker	„ 2.
J. v. Wartburg	„ 10.	Matthias Weiß	„ 1.	Theresia Ziegler	10 kg
us Wegscheider	„ 3.	Johann Weps	„ 1.	Reis i. W. v.	K 4.
Borg Weidl	„ 2.	Ant. Wiblinger	„ 2.	Dr. Ludw. Zimmermann	
Wenzel Weidl	„ 2.	G. Wilhelm	„ 1.		K 3.
K. h. Weidinger	„ 1.	Wenzel Wiederer	„ 3.	Anton Zimmert	„ 2.
is Weinmann	„ 1.	Albert Wurtinger	„ 2.	Frau O.St.A. Zwack	„ 5.

I Verzeichnis der gewährten Kosttage und Freitische.

Vom Komitee für die Speise- und Suppenanstalt wurden laut Beschluß vom 2. Oktober 1905

für 2 Bürgerschüler 4 Freimahle wöchentlich

für 31 Realschüler 46 Freimahle wöchentlich

an der Speiseanstalt bewilligt. Zwei Bürgerschülerinnen waren der Köchin mittags helfend und erhielten dafür die Mittagskost.

Außerdem haben, soweit es zur Kenntnis der Direktion gelangt ist, folgende Privatpersonen teils Kosttage im eigenen Haushalte gewährt, teils Freitische in der Speiseanstalt oder in anderen Haushaltungen für unbemittelte Realschüler gezahlt:

Herr Max Andres 4, Herr Franz Arnold 1, Frl. Berta Bothe 1, Herr MUDr. Beck 2, Herr Rud. Braun 2, Herr Joh. Buberl 3, Herr Daniel Buberl 1, Herr Dr. Engl 3, Herr Felbinger 1, Frl. Fenzl 1 Nachtm., Herr Dr. H. L. Fulda 6, Herr H. Gröbl 1, Herr L. Hecht 1, Frau v. Hennevogl 1, Herr Karl Hofmann 3, Herr Joh. Häber 2, Herr Bürgermeister Ant. Ingrisch 2, Herr Stadtrat E. Kanzler 2, Herr Ed. Kanzler, Steinmetzmeister 1, Herr Albert Kraus 4, Herr Ludw. Kraus 2, Herr Ant. Kroner 1, Herr Jakob Kundmann 1, Herr Adj. Löbl 1, Herr Franz Löffler 2, Herr Ludw. Nagele 1, Herr Jak. Neubauer 6, Herr Dr. E. Nonnenmacher 3, Exz. Graf Nostitz 1, Herr Joh. Pettschmidt 1, Frl. Elja Pfeifer 1 Nachtm., Frau Anna Pichl 2, Herr Franz Pichl 1, Herr Franz Pivec 1, Frau Franziska Purtak 1, Herr Altbürgermeister Fr. Reeger 2, Herr Aug. Ritschel 4, Herr Jos. Rödl 2, Herr Dr. R. v. Rosenbaum 2, Frau Josefine Schindler 2, Herr Joh. Rasp 2, Herr Max Scheuer 1, Herr Scheuer 2, Herr Aug. Schmand 1, Herr Scholz 2, Frl. Wally Siegl 1 Nachtm., Herr Anton Söllner 1, Herr Friedrich St. 2, Herr Josef Tomasek 3, Herr Viktor Tschuschner 2, Herr Joh. Turba 1, Herr Th. Ulbrich 2, Herr Joh. Waldmann 1, Herr Franz Walters 2, Herr Jar. v. Wartburg 2, Herr Jul. Wegscheider 1, Herr Ant. Wiblinger 1, Herr Franz Zimmert 1.

Herzlichen Dank allen Wohltätern im Namen der Jugend.



VII. Vermehrung der Lehrmittelsammlungen.

A) Einnahmen.

Kaffareft vom Vorjahre 1904/5	17 K 9
Aufnahmstaxen von 48 Schülern à 4 K 20 h	201 „ 60
Taxen für Zeugnisduplikate	12 „
Lehrmittelbeiträge von Schülern à 2 K	412 „
Außerordentliche Dotation des Staates	6000 „
Summa	6643 K 5

B) Zuwachs im Schuljahre 1905/6.

a) Bibliothek.

1. Lehrerbibliothek.

Geschenke: Vom hohen k. k. Ministerium für Kultus und Unterricht: Fuchs K, Johann Gabriel Seidl. — L'enseignement en Hongrie. — Von der Direction des k. k. österr. Handelsmuseums in Wien: VII. Jahrbuch der Experimentalakademie. — Vom Herrn k. k. Oberbergrat W. Püchler in Graz: Mitteilungen der anthropologischen Gesellschaft in Wien, 35. Bd. — Von der Langenscheidtschen Verlagsbuchhandlung in Berlin: Güthling, Taschenwörterbuch der griechischen und deutschen Sprache II. Deutsch-Griechisch. — Vom k. k. Direktor August Ritschel: Verhandlungen der n.-ö. Mittelschuldirektoren-Konferenzen, I. Bd. — Österreichische Mittelschule 19. Bd. — Le Roman des familles 3 Bde. — La Revue 1 Bd. — L'Encyclopédique 2 Bde. — Revue encyclopédique 5 Bde. — Revue universelle 3 Bde. — Vom Lehrkörper der Staatsrealschule zu Plan: Deutsche Arbeit, Jahrgang. — Von den Professoren Jakob Neubauer und Karl Scheit: Geographischer Anzeiger, 6 Jahrg. — Vom Herrn Altbürgermeister Franz Reeg: Hans Schächer, Hans Forster.

Kauf: Kraemer H., Weltall und Menschheit. — Weiß A. M., Soziale Freiheit und soziale Ordnung. — Munk, Hygiene des Schulgebäudes. Schulkrankheiten. Zahnpflege. — Hettinger, Lehrbuch der Apologetik. — Goedeke, Grundriß zur Geschichte der deutschen Dichtung, 24. Heft. — Könnecke, Bilderatlas zur Geschichte der deutschen Nationalliteratur. — Hemme, Das lateinische Sprachmaterial im Wortschatze der deutschen, französischen und englischen Sprache. — Meyer-Lübke, Grammatik der romanischen Sprachen. — Klöpfer, Französisches Reallexikon. — Charles Dickens, David Copperfield; Posthumous Papers of the Pickwick-Club; Bleak House. — Lindner, Geschichte der Philosophie. — Sievers-Deckert, Nordamerika. — Sievers, Mittel- und Südamerika. — Sievers-Kükenthal, Australien, Ozeanien und Polarländer. — Raueberg, Sprachenkarte von Böhmen. — Hölzel, Geographische Wandbilder: Berlin und Wien. — Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über die einfachen und mehrf. bestimmten Integrale. — Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung. — Lodge, Neue Anschauungen über Elektrizität. — Poincaré, Elektrizität und Optik. — Boltzmann, Vorlesungen über die Prinzipie der Mechanik. — Drude, Physik des Aethers und elektromagnetische Grundlage. — Geitler, Elektrische Schwingungen und Wellen. — Kobelt, die Verbreitung der Tierwelt. — Lampert, das Leben der Binnengewässer. — Rade, Mitteleuropäische Süßwasserfische. — Chun, Aus den Tiefen des Weltmeeres. — Schimper, Pflanzengeographie. — Wagner, Illustrierte deutsche Flora. — Ostwald, Grundlinien der anorganischen Chemie. — Arendt, Technik der Experimentchemie. — Ost, Lehrbuch der chemischen Technologie. — Treadwell, Kurzes Lehrbuch

analytischen Chemie. — Parnicke, die maschinellen Hilfsmittel der chemischen Technik. — Richter v., Chemie der Kohlenstoffverbindungen oder organische Chemie. — V. Hoff, Vorlesungen über theoretische und physikalische Chemie. — Bucher, Katechismus der Kunstgeschichte. — Die neueren Sprachen XIII. — Das literarische Echo VIII. — Globus 88/89. Zeitschrift für das Real Schulwesen XXXI. — Naturwissenschaftliche Rundschau XXI. — Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 37. Jahrg. — Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht 19. Jahrg. — Chemikerzeitung XXX.

Jakob Neubauer.

2. Schülerbibliothek.

Schenkung: Herr Direktor Augustin Ritschel: N. Armory, Vies des Saints. — Fr. Hermine Schipek: Wallace Auf der Donau. Der neue deutsche Jugendfreund 41. Bd. — Herr Prof. Jakob Neubauer: Grillparzer, 6 Bd. — Schüler Stephan Prennig: Valentin, Bibliothek für die Jugend.

Kauf: Gaudeamus 1904/5. Zöhrer Lebensbilder aus Österreich-Ungarn. Hoff, Zwerg Nase. Brentano, Gockel, Hinkel und Gackelsia. Kleinschmied, Kaiserin Elisabeth. Bruno, Le Tour de la France, Les Enfants de Marcel. Stevenson, Across the plains. Mark Twain, The Adventures of Tom Sawyer. Kipling, Thre Mowgliethies. Scott, Ivanhoe. H. v. Kleift, Michael Kohlhaas. Engel, Herr Lorenz Stark. Endorf, Aus dem Leben eines Taugenichts. May, Durchs wilde Kurdistan, Durchs Land der Skipetaren. Wagner, Entdeckungsreisen a) in Berg und Tal, b) in Feld und Flur, c) in Stadt und Land. Godin, Märchen. Richter, Deutsche Redensarten, Lichte Geschichten. Scipio, Jenseits des Ozeans. Cervantes, Don Quixote. Barack, Ahelm Tell. Meister, Im Kielwasser des Piraten. Falkenhorst, Der Sklave der Affa. Unter den Palmen von Bagamojo. Höcker, König Attila. Barfuß, Die Meuerer in der Südsee. Volz, Amerika und Australien. Treller, Das Kind der Prairie, Verwehte Spuren. Rosegger, Waldferien. Spyri, Gritlis Kinder. Barfuß, der Diamantenfänger. Harald, Kapitän Jack, Höcker, Die Brüder der Hanfa. J. Verne, Der Courier Czar, Das Testament eines Exzentrischen. Garlepp, Um Gold und Diamanten, Der Szgraf von Halle. Lindenberg, Fritz Vogelsang. Gerstäcker, Die Regulatoren in Anas. Mügge, Der Vogt von Sylt. Ebers, Uarda, Die Schwestern. Kinkel, Otto der Süß. Ganghofer, Der Hergottsschnitzer. Spielhagen, Hammer und Amboß. Freytag, Die Journalisten. Wörishöffer, Gerettet aus Sibirien. Kugelgen, Jugenderinnerungen eines Mannes. Storm, Die Söhne des Senators. K. May, von Bagdad nach Stambul, Der Schluchten des Balkan. Goldsmith, Der Landprediger von Wakefield. Ohorn, Jows wilde Jagd. De la Motte Fouqué, Undine. Goethe, Hermann und Dorothea. Kner, Zriny. Lejffing. Minna von Barnhelm. Schiller Wilhelm Tell, Die Jungfrau von Orleans. Goethe, Egmont. Hebbel, Die Nibelungen. Schiller, Wallenstein. Snrey, Friedenfinchens Lebenslauf, Die hinter den Bergen. Storm, Pole Poppenber. Hamann, Fr. Schiller. Obermeyer, Pilzbüchlein. Zöhrer, Österr. Fürstenbuch, Herr. Künstlerbuch. Groner, Erzählungen aus der Geschichte Österreichs. Panzer, Oesterreich über alles. Lutz, Der Pflaumenfreund. Wörishöffer, Robert der Kessjunge. Ideler, Verwehte Spuren. Hoffmann, Der Fliegende Holländer. Anderjen, Mäthen. Schwab, Die Schildbürger.

Heinrich Gröbl.

b) Lehrmittel für Geographie und Geschichte.

Geschenke: Herr Offizial Tropsch 1 Münze und 1 Medaille; Herr Oberverwalter Dolleschal 2 Münzen; Herr stud. tech. Schultes 2 türk. Silbermünzen. Schüler

Enderl II. Klasse, 1 röm. Kupfermünze; Höfner II. Klasse, 1 Kupfermünze a. Franz I.; Goldreich IV. Klasse, 13 verschiedene Münzen (Österr., Rußl., Schweden).

Kauf: Karten: Wandkarte der Schweiz; Rauchberg, Sprachenkarte von Böhmen; Schober, Schulwandkarte von Steiermark; Schober, Schulwandkarte von Tirol Vorarlberg; Freytag-Umlauf, Wandplan von Wien; Hölzel, Geogr. Bilder: Der Thurgau mit Kapstadt. Der Halemaumau-Lavasee des Kilauea-Kraters auf Hawaii. Mont perdu und Zirkus v. Gavarnie; Langl, Geschichtliche Bilder: St. Paul vor den Mauern Roms; Kreuzgang v. Monreale; Dom von Orvieto; Certosa v. Pavia, Malteser-Riefengebirge-Relief. Hermes-Büste von Praxiteles, 78 cm. hoch, Cicero-Büste 65 cm. hoch. Demosthenes-Büste 65 cm. hoch.

Karl Scheitler

c) Lehrmittel für Naturgeschichte.

Geschenke: Universitätsprofessor Dr. C. J. Cori, Direktor der k. k. Zoologischen Station in Triest: Lebende und konservierte Meerestiere; 1 Ballon Meerwasser. Oberbergrat W. Püchler in Graz: Sammlung von Petrefakten; Herr Ingenieur Werner: Diverse Erzstufen; Herr Prof. Gröbl: 1 Stück Kaadner-Grün. Herr Oberförster W. Scheider: Auerhahnkopf; Herr Domänen-Direktor Ježek und Herr Kontrollor Heintz: Diverse lebende Süßwasserfische für die Aquarien. Die Mehrzahl der Schüler der I. und II. Klasse beteiligten sich in anerkennenswerter Weise an der Beschaffung von Tier- und Pflanzenmaterial für den Unterricht; besonders verdienen Erwähnung die Schüler: Čecil I, Reimann I, Witz I, Baumgartl II, Buberl Karl II, Denk II, Höfner II, Pompl II.

Kauf: Mikroskopisches Objektiv Nr. 9: Kompensations-Okular 12; Tafeln von Dodel Port, Pfurtscheller, Lendenfeld; Bilder berühmter Forscher, Krytallmodelle von Pappe und Glas, Edelfsteinimitationen, Minerale und Gesteine, Modelle: Auge, Kehlkopf; Walffischbarte; Kolibri; Sumpfschildkröte; Chamäleon; Spiralklappe von Stör; Hering; Cysticercus; Entwicklung der Stubenfliege; Utenfilien z. Insekten; Pflanzenjammeln; Mikroskopische Präparate; Arnoldis Pilzmodelle; Wiederkäuermammals Skelette und Schädel; Backenzähne vom indischen u. afrikanischen Elephanten, Mammut; Caprimulgus; Beutelmeise mit Nest; Barbe; Limulus; Phyllium; Kallima; Glasglocken-Aquarium mit Durchlüftungsapparat; Diverse Gläser, Flaschen, Schalen etc; Brenner; Pflanzenmodelle: Orchis militaris, Secale cereale, Chemikalien, Thermometer; Trichterorgane (Tafel).

Dr. F. Urban

d) Lehrmittel für Chemie.

Kauf: Spektroskop; Photograph. Apparat samt Zugehör; Trockenschrank; Waagezeug für den Laboratoriumsgebrauch, Kekulé's Modelle; 7 kg Quecksilber; Absorptionsapparat; Körtingpumpe samt Manometer; Filtrierapparat nach Büchner; Vorlesungs-Exsiccator; eudiometer; diverse Glasfachen; Porzellanfachen und Tiegel; Metallgegenstände (Tiegel, Schalen, Brenner), Präparate für die technologische Sammlung (Papier, Baumwolle, Zucker, trockene Destillationsprodukte des Holzes, Tonwaren); Chemisch-technologisches Wandtafel von Schröder und Schwachhöfer (Generator-Öfen, Metallurgische Öfen, Gewinnung von Eisen, Kupfer, Silber und Quecksilber, Kältemaschinen, Spirituskolonne, Bierbrauerei, Malzbereitung, Hefezucht, Zuckerfabrikation). Anorganische und organische Präparate.

Ferd. Wagner

e) Lehrmittel für Physik.

Kauf: Foucault'sches Pendel, Metronom nach Mälzel, Interferenzröhre, Königsberger'scher Sirene v. Cagniard Latour, 2 Stimmgabeln, Blackburne's Pendel, Normalstimmgabel, Radiometer, Metalldoppeltstreifen, Kaltwasserschwimmer, Wasserhammer, Dampfhammer, Interferenzspiegel, Turmalinzange, Gipsblättchen, Doppelspat, Nicolprismen, Thermometer, Planspiegel, Achromatisches Prisma, Prisma aus Spiegelglas, 4 Spektralanalysatoren, Uranglaswürfel, Flußspatwürfel, 2 Spektralröhren, Phosphoreszenzröhren, Platinplatinocyanürschirm, Fluoreszenzmappe, 2 Stabmagnete, Eisenstab, Deklinatorium, Inklinatorium, 2 Nordlichtwandtafeln, Leydnerflasche mit Pendeln, Kondensator, Franklin's Tafel, 2 Konduktoren, Ebonitstab, Elektroskop von Mach, Platten für Coulomb'sche Figuren, Drahtnetz, Apparat für elektrische Dichte, Normalelement, Daniell's Element, Leclanché-Element, Meidinger Element, Trockenelement, Wheatstone'sche Brücke, Apparat für Joule's Gesetz, Voltmeter, galvanoplastischer Apparat, Elektromotor, Mikrophon, Geißleröhren, Elektromagnet, Röhre mit Kreuz, Röhre mit phosphoreszierenden Stoffen, Röhren für Kathodenstrahlen, Röntgenröhre, Apparat für drahtlose Telegraphie, Luftschraube, Stimmgabelapparat von Melde, Magnetsextant, Spektroskop, Sternkarte, elektrolytischer Unterbrecher, Ampèremeter, Apparat zum Entzünden von Äther, Taupunktshygrometer, Haarhygrometer, Apparat zum Messen des Druck im Innern einer Flüssigkeit, Seitendruckapparat, Röhre mit 4 Flüssigkeiten, Entlader, 4 Kondensatorplatten, Farbenscheibe, Gewichtsfaß, 2 Sternsteinwandtafeln, 2 Kugelkonduktoren, 3 Probekugeln, 1 kleiner Induktor, 2 Leydnerflaschen nach Lodge, Apparat für elektrische Wellen und Teslaströme, Vakuumröhre, elektrische Pistoletten, Gefrierthermometer, Quadrantenfernrohr.

Zuwachs: 88 Nummern in 119 Stücken.

Gesamtzahl: 345 Nummern in 444 Stücken und Skiptikonbilder.

Ludwig Nagele.

f) Lehrmittel für Geometrie.

Kauf: 1 Dreieitiges Prisma zerlegbar in 3 gleiche Pyramiden, 1 abwickelbare Schraubenfläche, 1 hyperbolisches Paraboloid, 1 dreiaxiges Hyperboloid, Durchdringung eines Rotationskegels mit einer Pyramide, Durchdringung einer Kugel mit einem Prisma, Durchdringung einer allgemeinen Rotationsfläche mit einem Cylinder, Modell zur Schattengebung einer hohlen Halbkugel.

J. Schmidt.

g) Lehrmittel fürs Freihandzeichnen.

Geschenke: Prof. Walters 2 Bücher.

Kauf: Grillparzerbüste, Goethebüste, figurale Vorlageblätter, Modelle und Zeichnungen für das gegenständliche Zeichnen, Papierschere, Muscheln, Starhäuschen, Cellbrettchen, Glasvasen, Mausebuffard (ausgestopft).

Friedrich Tischer.

C. Stand der Lehrmittel am Schlusse des Schuljahres.¹⁾

Gegenstand	Inv.-Katalognummern	
	Zuwachs	Stand gegen Ende 1905
Lehrerbibliothek (Gesamtnummern)	396	4394
davon: Werke	97	375
Programme	299	4019
Schülerbibliothek (Gesamtnummern)	93	532
Geographie (Gesamtnummern)	9	165
davon: Wandkarten und Reliefs	6	40
Globen und Planetarien	—	3
Wandbilder	3	93
Produkte	—	29
Geschichte (Gesamtstückzahl)	28	831
davon: Münzen etc. (Stückzahl)	21	703
Wandkarten	—	17
Wandbilder	4	168
Büsten	3	3
Arithmetik (Gesamtnummern)	—	5
Naturgeschichte (Gesamtnummern)	306	16.8 ²⁾
Chemie (Gesamtnummern)	89	668
Physik (Gesamtnummern)	90	345
Geometrie (Gesamtnummern)	8	32
Freihandzeichnen (Gesamtnummern)	15	264
Turnen (Gesamtnummern)	—	174
Jugendspielgeräte (Gesamtnummern)	9	55

¹⁾ Im Anschluß an die Tabelle des vorjährl. Programmes.

²⁾ Katalognummern; an der rationellen Einteilung wird gearbeitet.

VIII. Maturitätsprüfungen.

Im Sommertermine und im Herbsttermine des Schuljahres 1905 wurden die mündlichen Maturitätsprüfungen unter dem Voritze des k. k. Landes Schulinspektors Herrn Dr. Josef Muhr am 26., 27. und 28. Juni und am 17. September 1905 abgehalten.

Der Prüfung hatten sich im Juni 19 Kandidaten unterzogen. Von diesen erhielten ein Zeugnis der Reife mit Auszeichnung sieben, ein Zeugnis der Reife neun, drei bekamen die Bewilligung zu einer Wiederholungsprüfung aus einem Fache im Herbsttermine. Diese drei wurden im Septembertermine für reif erklärt.

Namensverzeichnis der bei der Maturitätsprüfung im Jahre 1905 approbierten Abiturienten.

Des Abiturienten				
Name	Geburtsdaten	Studienzeit an d. Anstalt	Prüfungs- Ergebnis Reif	Angabe über den erwählten Beruf
Arnold Josef	Plan 26.12. 1886	v. d. I. Kl. an	in befried. Weise	Bahnamt
Baumgartl Jos.	Khoau 23.2. 1886	« «	Auszeichg. lobw.	Maschin.-Bau
Friedl Josef	Plan 14.9. 1884	« «	« «	Bahnwesen
Gickhorn Rich.	Hinterkotten 3.4. 86	« «	in befried. Weise	Mod.Philolog
Hummér Herm.	Neudek 31.10. 1885	« «	in genüg. «	ak, Maler
Lichtneckert K.	Haid 3.11. 1885	« «	« « «	Postwesen
Löschner Emil.	Kuttenplan 17.7. 1885	« »	Auszeichg. lobw.	Hochbau
Lugner Erwin	Tachau 25.9. 1886	« «	« «	M.S. Lehramt
Mayer Emil	O.Godrißh 26.4. 1886	« «	in genüg. Weise	Postwesen
Offjadinik Friedr.	Triebel 30.5. 1886	« «	in lobensw. Weise	Hochbau
Philipp Ferd.	Plan 12.3. 1885	« «	Auszeichg. lobw.	Bahnamt
Pichl Anton	Grün 8.5. 1887	v. d. II. Kl. an	in genüg. Weise	Bahnamt
Prockl Karl	Heiligenkrz. 17.11 86	v. d. I. Kl. an	« befriedg. «	Bauwesen
Rödl Anton	Plan 7.1. 1887	« «	« « «	Elektrotechn.
Schneider Ernst	Plan 19.7. 1887	« «	« « «	Bau-o. Forstw
Schubert Joh.	Kuttenplan 3.2. 1886	« «	Auszdg. vorzügl.	Elektrotechn.
Seidler Karl	Heiligenkrz. 11.1. 86	« «	« lobensw.	Mod.Philolog
Weiner Arthur	Stahletz 3.3. 1887	« «	in befriedg. Weise	Techn. Chem.
Zimmer Ferd.	Heiligenkreuz 4.1.86	« «	« « «	Chemie

Maturitätsprüfungsergebnis des Jahres 1905.	
Erstzahl der VII. Klasse am Schluß des II. Sem. 1904/5	19
Zur schriftlichen Prüfung erschienen	19
Zur mündlichen Prüfung unterzogen sich	19
Von erhielten ein Zeugnis der Reife mit Auszeichnung	7
„ „ „ „ Reife	9
„ die Bewilligung einer Wiederholungsprüfung	3
Von der Wiederholungsprüfung wurden für reif erklärt	3

Die schriftlichen Maturitätsprüfungen des Schuljahres 1905/6 für Sommertermin fanden dem Erlaße vom 12. März 1906, Z. 18481 -R. entsprechend am 7., 8., 9., 10., 11., Mai 1906 statt. Unterzogen an sich derselben 25 Kandidaten.

Die Prüfungsaufgaben lauteten:

A. Aus der deutschen Sprache: Athen, Rom, Jerusalem, die Meisterinnen der Menschheit.

B. Aus der französischen Sprache a) zur Übersetzung ins Deutsche: En toute chose il faut considérer la fin. (Aus „Materialien freie französische Arbeiten“ von Prof. Dr. E. Gørlich, Leipzig, Meyer 1904). La Fontaine nous trace la marche à suivre dans la part des circonstances de la vie pratique. C'est ainsi qu'il nous

donne cet excellent précepte: „En toute chose il faut considérer la fin. Auparavant, afin de le mieux graver dans notre mémoire, il raconte l'aventure arrivée à deux animaux: le renard et le bouc. Le premier est, comme on sait, passé maître en fait de ruses et de trahiseries; le second, au contraire, La Fontaine nous l'assure, ne voit plus loin que son nez. Tous deux meurent de soif. C'est bien singulier de descendre dans un puits. Il est vrai qu'il faudra remonter après avoir bu: aussi le renard, en personnage prudent et avisé, y réfléchit avant de descendre. Le bouc n'y pense point: il oublie, dans cette affaire, de considérer la fin. Qu'arrive-t-il? Quand ils ont bien bu, le bouc pense seulement à sortir du puits:

Ce n'est pas tout de boire; il faut sortir d'ici.

Le renard n'est point embarrassé: il fait dresser le bouc contre le mur, il grimpe sur son dos, puis sur ses cornes, et sort du puits. Une fois dehors il exhorte ironiquement le bouc à prendre patience. Il est certain, comme il le dit, que si le bouc avait eu autant de jugement que de barbe au menton, il ne serait pas étourdiment descendu dans le puits.

En pareille occasion, nous n'imiterions pas le renard, qui a plus de ruse et de malice que de charité; mais d'un autre côté, nous devrions montrer plus de réflexion que le bouc.

Avant d'entreprendre une affaire, avant de prendre un parti décisif, il faut considérer la fin, c'est-à-dire qu'il faut voir jusqu'où nous serons entraînés, quelles dépenses, quelles démarches nous serons forcés de faire.

Avant de descendre la vallée, il faut être sûr de pouvoir la remonter; avant d'entreprendre un voyage, il faut prévoir les frais de l'aller et aussi ceux du retour; avant de construire une maison il faut fixer et établir un plan et un devis.

Faute de suivre le conseil du fabuliste, des généraux ont perdu leur armée dispersée et battue: en envahissant un pays, ils avaient oublié de s'assurer les moyens d'en sortir.

Si, maintenant, par la fin on voulait entendre le but qu'on se propose, il y aurait encore un grand avantage à ne jamais perdre de vue la fin de vue; car on s'encourage en se mettant devant les yeux les résultats que l'on espère obtenir par son travail.

C'est ainsi que l'on se livre avec ardeur à une étude peu intéressante, excité par l'espoir de se faire une belle position dans l'avenir.

b) Zur Übersetzung ins Französische. Die Kartoffel. — Die Kartoffel ist ein amerikanisches Gemüse, das in Frankreich erst seit 17 Jahren angebaut wird. Der Apotheker Parmentier, gebor-

Jahre 1737, machte die Kartoffel bekannt und empfahl ihren Gebrauch als Nahrungsmittel. Ludwig XVI. bewilligte ihm im Jahre 1774 seinen Versuchen weite Landstrecken; der König trug, um die Kartoffel in die Mode zu bringen, Blüten derselben im Knopfloche.

Aber das Volk mochte nicht dieses Gemüse, das später das Brot der Armen geworden ist. Man sah es als ein Gift an.

Ludwig XVI., der daran verzweifelte, die indolenten Bauern durch Gründe zu überzeugen, behandelte sie, wie man die Kinder behandelt. Er erjann eine List: statt länger die Kartoffeln den Liebhabern derselben anzubieten, kam er im Gegenteile auf den Gedanken, die Felder Wächter aufzustellen, die das neuartige Gemüse bewachen sollten, als ob es ein Nahrungsmittel von unschätzbarem Werte wäre.

Als nun die Kinder und Leute aus dem Volke sahen, daß dieses Gemüse mit so viel Sorgfalt hütete, änderten sie sofort ihre Meinung und dachten, daß es sehr kostbar sein müsse, da der König es allein dachte, es für sich allein vorzubehalten. Sobald sie sich diesen Gedanken in den Kopf gesetzt hatten, hegten sie nur mehr einen Wunsch, nämlich den, diese vorzüglichen Kartoffeln zu kosten und welche zu pflanzen, um selbst welche zu besitzen. Sie erjannen tausend Listen, die die Wachsamkeit der Wächter zu täuschen. Diese stellten sich, gegen den Befehle, den sie erhalten hatten, als ob sie nichts sähen; sie öffneten die Felder heimlich plündern und bald gab es Kartoffeln bei den Ackerbauern.

Turgot hatte in seiner Provinz viele Mühe, diesem Gemüse Eingang zu verschaffen, das zur Zeit der Hungersnot so kostbar ist. Um es zu Ehren zu bringen, ließ er sich davon beständig auf seiner Tafel auftragen und lud alle Adelsherren der Gegend ein, zu ihm zu kommen und Kartoffeln zu essen.

C. Aus der englischen Sprache: In the tenth year of the reign of Nero, the capital of the empire was afflicted by a fire which raged beyond memory or example of former ages. The monuments of Grecian art and of Roman virtue, the trophies of the Punic and Gallic wars, the most holy temples, and the most splendid palaces, were involved in a common destruction. . . The vigilance of government appears to have neglected any of the precautions which might alleviate the sense of so dreadful a calamity . . . But all the prudence and humanity affected by Nero on this occasion were insufficient to prepare him from the popular suspicion. The voice of rumour accused the emperor as the incendiary of his own capital . . . To divert a suspicion, which the power of despotism was unable to suppress, the emperor resolved to substitute on his own place some fictitious criminals. "With this view (con-

tinues Tacitus) he inflicted the most exquisite tortures on those who, under the vulgar appellation of Christians, were already brary with deserved infamy. They died in torments, and their torments v embittered by insult and derision . . . The gardens of Nero were dest for the melancholy spectacle, which was accompanied with a h race, and honoured with the presence of the emperor, who ming with the populace in the dress and attitude of a charioteer. . . .

Those who survey with a curious eye the revolutions of man may observe, that the gardens and circus of Nero on the Vatio which were polluted with the blood of the first Christians, have b rendered still more famous by the triumph and by the abuse of persecuted religion. On the same spot, a temple, which far surpass the ancient glories of the Capitol, has been since erected by Christian Pontiffs, who, deriving their claim of universal domin from an humble fisherman of Galilee, have succeeded to the throne the Cæsars, given laws to the barbarian conquerors of Rome, extended their spiritual jurisdiction from the coast of the Baltic to the shores of the Pacific ocean.

D. Aus Mathematik.

1. In welchem Abstände von der Erde (ausgedrückt in Erdradius) wird ein zwischen Erde und Mond befindlicher Körper in Ruhe bleiben?
 $\text{Mondmasse} = \frac{1}{80} \text{ Erdmasse.}$

2. Ein Kapital, das zu $4\frac{1}{2}\%$ auf Zinseszins angelegt war, hat sich, obwohl am Ende eines jeden Jahres 420 K behoben wurden, nach 18 Jahren verdoppelt; wie groß war das Kapital?

3. Der Flächeninhalt eines Dreieckes beträgt 744 cm^2 ; die Seite a verhält sich zur Seite b wie $65:34$, der von beiden eingeschlossene Winkel ist $137^\circ 40' 39''$; das Dreieck ist aufzulösen.

4. Wie groß ist die Fläche jenes Quadrates, das der Ellipse $x^2 + 2y^2 + 4x + 4y - 26 = 0$ umschrieben werden kann?

E. Aus der darstellenden Geometrie.

1. Es sind jene Ebenen durch ihre Spuren zu bestimmen, die durch den gegebenen Punkt A gehen, mit P_{II} einen Winkel von 60° einschließen und auf der Ebene E senkrecht stehen — A (7, 6, 10), E (8, 8, 3).

2. Durch eine gegebene Gerade ist eine Ebene zu legen, die einen gegebenen Kegel nach einer Parabel schneidet. — o (0, 4, 4), $r=4$, $h=7$, g [a (7, 1,5, 0), b (1,5, 7, 6)].

3. Eine auf der P_I aufliegende Kugel ist zentral so zu beleuchten, daß die Schlagschatten derselben auf P_I als Parabel und auf P_{II} als Hyperbel erscheinen.

Die mündliche Maturitätsprüfung wird gemäß dem Erlasse vom Mai 1906, Z. 22530-L.-S.-R. am 16., 17., 18., 19. und event. 20. Juli 1906 unter dem Vorſiße des k. k. Direktors der III. deutschen Staatsrealschule zu Prag, Herrn Friedrich Hopfner abgehalten werden. Das Ergebnis dieser Prüfung gelangt im nächſtjähigen Programme zur öffentlichen Veröffentlichung.

X. Wichtigere Verfügungen vorgesetzter Behörden, die für die Öffentlichkeit von Interesse sind.

1. Die Einrichtung eines wöchentlich dreistündigen, unobligaten Lateinkurses dieser Anſtalt genehmigt. 10. Sept. 1905, Z. 33233-M.-K.-U; 16. Sept. 1905, Z. 9467-L.-S.-R.
2. Zum Zwecke der Abſtellung von Übelständen in den Maſſenquartieren für Realschüler kann nötigenfalls die Intervention der politiſchen Behörde als Sanitätsbehörde in Anſpruch genommen werden. 7. Nov. 1905, Z. 49308-L.-S.-R.
3. Vorkehrungen behufs Verhütung und Bekämpfung der Tuberkuloſe. 20. Dezember 1905, Z. 20224-L.-S.-R.
4. Gefahrdrohende Übelstände beim Kirchenbeſuche durch Schüler ſind im Einvernehmen mit der geiſtlichen Behörde abzuſtellen. 15. Feber 1906, Z. 7096 L.-S.-R.
5. In den unteren Klaſſen iſt im Beginne des Schuljahres eine Belehrung und Unterweiſung hinſichtlich des Umganges mit Exploſivſtoffen des täglichen Gebrauchs zur Verfügung zu bringen. 28. Feber 1906, Z. 7655-L.-S.-R.
6. Die Direktionen der Staatsmittelschulen müſſen nach ihrer auch für Realſchulen giltigen im § 109 des Organisationsentwurfes für Gymnaſien dargeſtellten Verwaltungsſphäre unbedingt den Behörden zugezählt werden. 18. Mai 1878, Z. 6747-L.-S.-R. U. 7. März 1906; Z. 9422-L.-S.-R.
7. Die Schüler ſind über das Verbot des Hinauswerfens von Gegenständen aus den Schulzügen, durch welche Perſonen oder Sachen beſchädigt werden können zu unterrichten. 23. Feber 1906, Z. 31085-M.-I., 7. April 1906, Z. 54317-St., 20. Mai 1906, Z. 926-L.-S.-R.

X. Körperliche Übungen der ſtudierenden Jugend.

Dem Schlittſchuhlaufen huldigten die Schüler in der günſtigen Winterzeit 1905-1906 ausgiebig auf dem Stadtteiche. Schlittſchuhläufer gab es in der I. Klaſſe 26, in der II. 19, in der III. 23, in der IV. 17, in der V. 13, in der VI. 16, in der VII. 14, in der VIII. 128.

Die Spielſaiſon begann heuer am 21. April. Es wurde auf dem Jugendſpielplatze Mittwoch und Samstag von 5-7 Uhr nachm. geſpielt.

Neu angeſchafft wurden von den Jugendſpielbeiträgen der Schüler 1 Fauſtball Nr. 1, 1 Fauſtballblase Nr. 6, 1 Fauſtballmal (6 St.), 5 Federbälle, 2 Federballschläger, 2 Tenniſſchläger, 4 Tenniſsbälle, 1 Tenniſsnetz, 6 Tambourinbälle und verſchiedenes Material für den Spielplatz.

Das Baden und Schwimmen iſt den Realschülern in der ſtädtiſchen Badeanſtalt bei der Waldmühle im Hammerbache ermöglicht. Doch erſt in der zweiten Hälfte

Juni wird die Witterung günstig. Des Schwimmens kundig waren in den 7 Klassen der Reihe nach 9, 10, 18, 19, 14, 14, 17, im ganzen 101 Schüler.

Radfahrer gab es 2, 5, 17, 8, 11, 6, 4 im ganzen 53; die meisten benutzten das Zweirad, um aus ihren teilweise recht entlegenen Heimatsorten zur Schule zu fahren. 61 Schüler besuchten teils das ganze Jahr, teils in den Sommermonaten die Realschule von ihren Wohnorten aus zu Fuß oder mittels des Rades, und zwar Kuttnerplan 20, aus Michelsberg 7, aus Nacketendörflas 4, aus Heiligenkreuz 4, aus Thein, Bruck a. H., Kiesenreuth, Ottenreith, Josefhütte, Hollowing, Neudorf, Untergodtsch, Hohenjamny, je 1 aus St. Anna, Unterzedlitz, Obergodtsch, Khotitz, Schließ, Wafchagrün, Zaltau, Gröna.

Klassenausflüge fanden am 13. Juni statt. Es fuhren 30 Schüler der I. Klasse unter Führung Prof. Tomafcheks per Bahn nach Königswart, wo das fürstlich Metternich'sche Schloßmuseum besichtigt wurde. Nachmittags Marsch zum Forsthaus Glöckner nach kurzer Rast zurück nach Marienbad (Waldquelle, Kolonnade), von dort Bahnfahrt nach Plan. 60 Schüler der II. und III. Klasse wanderten mit den Klassenvorständen Gröbl und Dr. Urban auf den Wolfsberg (3 St.), besichtigten die Ruine, den „Göckersitz“ und gingen (1/2 St.) zum Bahnhofe der Josefhütte, von wo die Rückfahrt nach Plan erfolgte. Unter der Leitung des Prof. Scheiter zogen 25 Schüler der IV. Klasse über Wafchagrün, Michelsberg durch das Amstel-, Buch- und Ulmbachtal auf den Pfaffenhorn bei Marienbad, von wo der Weg über Hohendorf, Café Rübezahl, Aussichtsturm, Café Panorama zum Marienbader Bahnhof genommen wurde, um mit der Bahn nach Plan zurückzukehren. — 24 Schüler der VI. Klasse fuhren mit ihrem Klassenvorstand Nagele nach Tepl, von dort marschierten sie nach Petschau. Nachmittags Fußmarsch über Sangerberg, Glätze nach Königswart. Heimfahrt mit der Bahn.

Zahlreiche naturhistorische und geographische Spaziergänge wurden mit einzelnen Klassen in der unmittelbaren Umgebung Plans vorgenommen. Auch wurde das Elektrizitätswerk des Herrn Franz Hanika in der Herrenmühle von den Schülern der VII. Klasse unter Leitung Prof. Nageles besichtigt.

Der löbl. Sportklub zu Plan hat einigen Realschülern (nach Wahl des Lehrers) die Benützung seines Lawn-Tennis-Platzes gestattet.

XI. Chronik.

1905. 15. u. 17. Juli. Einschreibungen und Aufnahmeprüfungen in die I. Klasse (Erster Termin). Es werden 22 Schüler aufgenommen.

18. August. Die ortsanwesenden Mitglieder des Lehrkörpers nehmen an dem zur Feier des Allerhöchsten Geburtsfestes Seiner Majestät des Kaisers zelebrierten Hochamte.

15. September. Dienstesantritt der k. k. w. Lehrer Friedrich Tischer und Ferdinand Wagner.

16. September. Einschreibungen und Aufnahmeprüfungen in die I. Klasse (Zweiter Termin). Es werden 10 Schüler aufgenommen.

18. September. Einschreibungen und Aufnahmeprüfungen für höhere Klassen. Es werden zwei Schüler in die II., einer in die III. Klasse auf Grund einer Aufnahmeprüfung und 10 Schüler von anderen Realschulen in verschiedene Klassen aufgenommen.

19. September. Das Schuljahr wird eröffnet mit einem Festgottesdienste »Veni sancte Spiritus!« in der Anstaltskapelle.

20. September. Beginn des regelmäßigen Unterrichtes.

4. Oktober. Festgottesdienst in der Aula zur Feier des Allerhöchsten Namensfestes Sr. Majestät des Kaisers.

5. Oktober nachm. und 6. Oktober vorm. Empfang der Sakramente der Buße und des Altars seitens der kath. Realschüler.

18. November. Feierlicher Trauergottesdienst für weiland Ihre Majestät die Kaiserin Elisabeth.

6. Jänner. Konzert des Damenkomités zu Gunsten der Suppen- und Speiseanstalt für unbemittelte und für auswärtige Schüler.

26. und 27. Jänner. Herr Konfistorialrat Vikar Schmid inspiziert den kath. Religionsunterricht.

30. Jänner. Se. k. u. k. Apostolische Majestät haben mit allerhöchster Entschließung v. 30. Jänner 1906 dem Präsidenten des k. k. Landes Schulrates für Böhmen dem Geh. Rate Sr. Exz. dem Herrn Statthalter Karl Grafen v. Coudenhove das Großkreuz des Leopoldordens zu verleihen geruht.

31. Jänner. Se. k. u. k. Apostolische Majestät haben dem k. k. Landes Schulinspektor Dr. Josef Muhr mit Allerh. Entschließung vom 31. Jänner 1906 den Orden der eisernen Krone zu verleihen geruht.

1. Feber. Inspektion des kath. Religionsunterrichtes durch Herrn Vikar Josef Schmid.

10. Feber. Schluß des I. Semesters.

14. Feber. Es werden 3 Schüler von anderen Realschulen aufgenommen. Beginn des II. Semesters.

7. März. Herr k. k. Landesjanitätsinspektor MUDr. Gellner besichtigt das Realschulgebäude in janitärer Beziehung.

8. 9. 10. April. Österliche Rekolektionen für die kath. Schüler.

21. April. Beginn der Jugendspiele auf dem Realschulspielplatze.

24. u. 25. April. Herr Schulrat A. Friehl inspiziert den Unterricht im Freihandzeichnen.

5. u. 17. Mai. Herr Konfistorial-Rat Vikar J. Schmid inspiziert den kath. Religionsunterricht.

7. — 11. Mai. Schriftliche Maturitätsprüfungen. Sämtliche 25 Schüler der VII. Klasse unterziehen sich ihnen.

10. Juni. Schauturnen auf dem Jugendspielplatze.

13. Juni. Klassenausflüge.

14. Juni. Die katholische Schülerschaft nimmt teil an der eucharistischen Prozession der Fronleichnamsfeier durch Aufstellung auf dem Marktplatze.

21. Juni. Gottesdienst vor dem Unterrichte in der Anstaltskapelle zur Feier des Patrons derselben St. Aloysius für die kath. Schüler.

10. Juli nachm. und 11. Juli vorm. Empfang der Sakramente der Buße u. des Altars von den katholischen Realschülern.

14. Juli. Schluß des II. Semesters. Dankamt und Zeugnisverteilung.

16. — 20. Juli. Mündliche Maturitätsprüfungen.

XII. Statistik der Schüler.

	K l a s s e							Z am
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	
1. Zahl.								
Zu Ende 1904/5	39	37	26	32	29	27	19	20
Zu Anfang 1905/1906	36	36	31	27	23	26	24	20
Während des Schuljahres eingetreten	2*	.	1	.	.	.	1	.
Im ganzen also aufgenommen	38*	36	32	27	23	26	25	20
Darunter:								
Neu aufgenommen und zwar:								
aufgestiegen	33	2	2	1	1	1	2	4
Repetenten	1	1	.	2	1	1	.
Wieder aufgenommen und zwar								
aufgestiegen	31	29	25	18	22	22	14
Repetenten	5	2	.	1	2	2	.	1
Während des Schuljahres ausgetreten	1	6*	2	.	3	1	.	1
Schülerzahl zu Ende 1905/1906	37	30	30	27	20	25	25	19
Darunter: Öffentliche Schüler	37	30	30	27	20	25	25	19
Privatisten
2. Geburtsort (Vaterland).								
Plan	10	7	7	1	1	6	4	3
Böhmen außer Plan	23	20	23	26	18	17	20	14
Niederösterreich	2	1	1	.
Steiermark	1
Tirol	1
Galizien	1
Ungarn	1
Preußen	1	.	.
Rußland	1	.	.	1	.	.	.
Summe	37	30	30	27	20	25	25	19
3. Muttersprache.								
Deutsch	37	28	28	26	19	25	25	18
Cechoslawisch	1	2	1
Russisch	1	.	.	1	.	.	.
Summe	37	30	30	27	20	25	25	19
4. Religionsbekenntnis.								
Katholisch des lat. Ritus	33	27	29	26	18	23	24	18
Evangelisch A. K.	1
Griech.-orthodox	1	.	.	1	.	.	.
Mosaisch	4	1	1	1	1	2	1	1
Summe	37	30	30	27	20	25	25	19
5. Lebensalter.								
11 Jahre (geb. 1895)	1
12 „ („ 1894)	20	1	2
13 „ („ 1893)	7	9	1	1
14 „ („ 1892)	8	12	9	1	.	.	.	3
15 „ („ 1891)	1	5	15	8	1	.	.	3
16 „ („ 1890)	3	4	7	2	1	.	1
17 „ („ 1889)	1	8	11	5	.	2
18 „ („ 1888)	3	4	9	5	2
19 „ („ 1887)	2	4	9	1
20 „ („ 1886)	5	9	1
21 „ („ 1885)	1	1	.
22 „ („ 1884)	1	.
Summe	37	30	30	27	20	25	25	19

*) Davon ein Schüler der II. Kl., der am Beginne des 2. Sem. in die I. Kl. zurück

XIII. Verzeichnis der Schüler.

Die Namen der Vorzugsschüler sind mit Sternchen versehen, die der im Laufe des Schuljahres abgegangenen eingeklammert. Das Vaterland ist nur dann angegeben, wenn es nicht Böhmen ist.

I. Klasse.

- | | |
|---|---|
| 1 Andres Friedrich aus Plan. | 20 Hüber Ernest aus Plan. |
| 2 Angermann Karl aus Plan. | 21 Kaiser Josef aus Neudorf. |
| 3 Badiseitz Ferdinand aus Plan. | 22 Kleidorfer Karl aus Wurken. |
| 4 Bauer Heinrich aus Leitmeritz. | 23 Liebl Josef aus Neudorf. |
| 5 Becker Oskar aus Chodau. | 24 Lindner Josef aus Bruck a. H. |
| 6 Böllmann Johann aus Groß-Jedlersdorf in N.-Ö. | 25 Löffler Karl aus Plan. |
| 7 Braun Rudolf aus Plan. | 26 Lorenz Adolf aus Falkenau. |
| 8 Buxbaum Oswald aus Abaschin. | 27 *Ortmann Anton aus Plan 21. I. 1912. |
| 9 Cécil Franz aus Thein. | 28 Ortmann Anton aus Plan 9. XI. 1912. |
| 10 Ebert Wilibald aus Dux. | 29 Ortmann Rudolf aus Innsbruck in Tirol. |
| 11 Eibl Josef aus Muttersdorf. | 30 Oswald Wilhelm aus Hofikowitz. |
| 12 Fahrner Heinrich aus Dreihacken. | 31 (Paleček Josef aus Eger). |
| 13 Felbinger Andreas aus Heiligenkreuz. | 32 *Reimann Roland aus Ottenreith. |
| 14 Fleischer Ernst aus Kuttenplan. | 33 Schrott Anton aus Gofolup. |
| 15 Fritsch Josef aus Plan. | 34 Rudolf Söllner aus Wien in N.-Ö. |
| 16 Frötschl Wenzel aus Untersedlitz. | 35 Stingl Waldemar aus Kiesenreith. |
| 17 Fuchs Adolf aus St. Adalbert. | 36 Thummerer Robert aus Glashütten. |
| 18 Hieke Ludwig aus Hafendorf, Steiermark. | 37 Turba Johann aus Plan. |
| 19 *Horowitz Robert aus Hinterkotten. | 38 Witz Arthur aus Kuttenplan. |

II. Klasse.

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 1 Altmann Anton aus Michelsberg. | 18 Krämling Franz aus Chodau. |
| 2 *Barthlme Anton aus Tepl. | 19 Kraus Ernst aus Plan. |
| 3 *Baumgartl Karl aus Khoau. | 20 *Kroha Anton aus Maschakotten. |
| 4 Buberl Alexander aus Moskau in Rußland. | 21 (Mayerl Johann aus Kuttenplan). |
| 5 Buberl Karl aus Hammerhäufeln. | 22 Mülling Ernst aus Pilfen. |
| 6 Denk Wilhelm aus Neuheimhausen. | 23 (Olbrich Franz aus Nieder-Mohrau). |
| 7 Enderle Josef aus Turja-Bisttra in Ungarn. | 24 Pfeil Leopold aus Stanislaw in O. |
| 8 Friedl Heinrich aus Taus. | 25 *Pögl Engelbert aus Sangerberg. |
| 9 Friedrich Richard aus Neustadt. | 26 *Pompl Josef aus Glashütten. |
| 10 Hacker Karl aus Altwasser. | 27 (Prennig Stephan aus Eberndorf). |
| 11 Haibach Josef aus Piraumberg. | 28 Reimann Ekkehard aus Ottenreith. |
| 12 Hartl Josef aus Plan. | 29 *Scharnagl Franz aus Plan. |
| 13 Höfner Franz aus Michelsberg. | 30 Sollner Ferdinand aus Plan. |
| 14 Hufnagl Johann aus Plan. | 31 Sternkopf Josef aus Plan. |
| 15 Kellermann Rudolf aus Habakladrau. | 32 Thurner Alfred aus Plan. |
| 16 Kliebhan Georg aus Taubath. | 33 *Weis Johann aus Untergodtsch. |
| 17 Kohl Leonhard aus Sangerberg. | 34 (Wiederer Friedrich aus Plan). |
| | 35 *Wolf Josef aus Brand. |

III. Klasse.

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 *Bittner Franz aus Naketendörfles. | 11 Gierschick Engelbert aus Plan. |
| 2 *Borst Josef aus Kuttenplan. | 12 Hecht Ernst aus Plan. |
| 3 Buberl Franz aus Plan. | 13 Heller Alfred aus Drahowitz. |
| 4 Dietl Paul aus Marienbad. | 14 Ingrisch Ludwig aus Plan. |
| 5 Dujil Ladislav aus Hrušov. | 15 Kiffl Anton aus Theufing. |
| 6 Fahrner Josef aus Dreihacken. | 16 Kraus Rudolf aus Heiligenkreuz. |
| 7 Feinermann Georg aus Kuttenplan. | 17 Krünes Ernst aus Kuttenplan. |
| 8 *Frömpter Josef aus Gamnitz. | 18 Laštovka Wenzel aus Großenteich. |
| 9 Gebert Franz aus Altedlitz. | 19 Linhart Viktor aus Hradzen. |
| 10 Gerstner Franz aus Gröna. | 20 Marass Anton aus Marienbad. |

1 Menzel Johann aus Glitschau.
2 Modes Wilhelm aus Plan.
3 Prennig Josef aus Eberndorf in
Kärnten).
4 Radl Franz aus St. Katharina.
5 Rathai Wenzel aus Plan.
6 Schulz Rudolf aus Dux.

27 Seidl Johann aus Tiffa.
28 *Sorger Franz aus Altzedlisch.
29 *Sorger Georg aus Altzedlisch.
30 *Tropfch Karl aus Plan.
31 Wenig Johann aus Heiligenkreuz.
32 Zeidler Wilhelm aus Mies.

IV. Klasse.

7 Bär Anton aus Miltigau.
8 Baumgartl Josef aus Schließ
9 Behr Waldemar aus Hackenhäuser.
10 Böhler Elmar aus Kiejenreuth.
11 Bicklhorn Josef aus Naketendörflas.
12 Goldreich Erwin aus Prelauč.
13 Jaidl Rudolf aus Hangendorf.
14 Joler Karl aus Hollowing.
15 Jüber Johann aus Mies.
16 Köhler Edwin aus Müllersgrün.
17 Jenz Franz aus Landek.
18 Jiedler Hermann aus Blattnitz.
19 Jindner Josef aus Untergodrisch.
20 Jülling Alfred aus Pilsen.

15 Neuthardt Johann aus Michelsberg
16 Ondrák Anton aus Kladrau
17 Oswald Franz aus Horikowitz
18 Plail Josef aus Königswart.
19 Rahsl Karl aus St. Katharina.
20 Redtenbacher Ludwig aus Marienbad.
21 Reittenberger Johann aus Neumarkt.
22 Schleicher Josef aus Waschagrün.
23 *Schmid Franz aus Landek.
24 Steiner Karl aus Obergodrisch.
25 Theinl Karl aus Großmaierhöfen.
26 *Vaget Anton aus Kuttanplan.
27 Zenker Emil aus Plan.

V. Klasse.

1 Altmann Alois aus Michelsberg.
2 Huberl Eugen aus Moskau in Ruß-
land.
3 Jretschner Andreas aus Kurtschin.
4 Jiedl Josef aus Frauenreith.
5 Jiebert Friedrich aus Josefhütte.
6 Jaiser Rudolf aus Fugau.
7 Jarásek Rudolf aus Böhm.-Aicha.
8 Jellner Anton aus Mühlloh.
9 Jlebs Johann aus Schluckenau.
10 Jumpner Franz aus Neudorf.
11 Jomarek Eduard aus Tachau.

12 Krieglstein Karl aus Unter-Sekeřan.
13 (Lucha Josef aus Hollowing).
14 Lugner Adolf aus Plan.
15 Markl Anton aus Eger.
16 *Paradaiser Josef aus Uřchau.
17 Paula Franz aus Weferitz.
18 Rudl Ernst aus Staab.
19 Scharf Alois aus Staab.
20 *Schwarz Anton aus Stift Tepl.
21 (Stöhr Karl aus Plan).
22 *Weiner Bernhard aus Mirowitz.
23 (Weis Anton aus Naketendörflas).

VI. Klasse.

1 Böllmann Oskar aus Groß-Jedlers-
dorf in Niederösterreich.
2 Eibner Wilhelm aus Ferchenhaid.
3 Frömpter Hubert aus Naketendörflas
4 Büntner Johann aus Zaltau.
5 Hammer Georg aus Wolfersdorf.
6 Jecht Siegfried aus Plan.
7 Jerthan Johann aus Ströbt.
8 Jufnagl Josef aus Plan.
9 Jern Josef aus Falkenau.
10 Jraus Hubert aus Plan.
11 Jroha Franz aus Damrau.
12 Jenk Wilhelm aus Tachau.
13 Jüller Adolf aus Pawinow.

14 Ott Johann aus Plan.
15 Peter Karl aus Marienbad.
16 Prinz Josef aus Neustadt.
17 Schallner Albert a. Berlin i. Preußen.
18 Scharnagl Johann a. Tachauer Brand.
19 Schmidt Franz aus Böhmisches-Leipa.
20 Schulz Wilhelm aus Dux.
21 Strigl Franz aus Plan.
22 Swoboda Ferdinand aus Wierau.
23 *Tropfch Johann aus Plan.
24 Werner Anton aus Gesna.
25 (Wiedmann Heinrich aus Schluckenau)
26 Zeidler Anton aus Hollowing.

VII. Klasse.

1 Böhm Josef aus Heiligenkreuz.
2 Jail Karl aus Brand.
3 Juber Josef aus Abaschin.
4 Jecht Otto aus Plan.
5 Jergl Alfred aus Wiefzen.

6 Huska Franz aus Böhmisches-Doma
schlag.
7 Kollick Josef aus Tachau.
8 Koppmann Adolf aus Kuttanplan.
9 Mayer Josef aus Heiligenkreuz.

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 10 Neftler Max aus Neuhäusl. | 18 Steinkovský Reinhold aus Žižka. |
| 11 *Pellet Anton aus Michelsberg. | 19 Sterba Franz aus Wien, N.-Öste. |
| 12 Piekný Johann aus Grafengrün. | 20 Sternkopf Eduard aus Plan. |
| 13 Reimann Erich aus Obersekeřan. | 21 Waldmann Anton aus Pollschitz. |
| 14 Sattler Johann aus Obersekeřan. | 22 Weidl Johann aus Plan. |
| 15 Schneider Otto aus Plan. | 23 Wohlrab Alfred aus Luditř. |
| 16 Siegler Anton aus Untersekeřan. | 24 *Wolf Wilhelm aus Brand. |
| 17 Sperek Oskar aus Štěpánov. | 25 Wurdinger Ernst aus Saaz. |

XIV. Kundmachung bezüglich des Schuljahres 1906/7

Die Einschreibungen der Realschüler in die erste Klasse finden am 16. Juli 1906 von 8–11 Uhr, ferner am 17. September 1906 von 8–11 Uhr in der Direktionskanzlei statt.

Jeder Schüler, der in die erste Klasse aufgenommen zu werden wünscht, hat in Begleitung seines Vaters oder dessen Stellvertreters erscheinen und sich durch den **Tauf- oder den Geburtsschein** über das zurückgelegte oder im ersten Quartale des Schuljahres zur Vollendung gelangende zehnte Lebensjahr auszuweisen. Aufnahmewerber, die von einer öffentlichen Volksschule kommen, haben das vorgeschriebene **Frequentationszeugnis**, das die Noten aus der Religionslehre, der Unterrichtssprache und dem Rechnen enthält, vorzulegen. Die in einem Entlassungszeugnisse von der Volksschule verzeichneten Aufnahmewerber und die Privatschüler bedürfen eines Frequentationszeugnisses nicht. Die von Bürgerschulen kommenden Schüler haben statt des Frequentationszeugnisses das letzte Semesterzeugnis beizubringen.

Die **Aufnahmsprüfungen** zum Eintritte in die erste Klasse werden je an dem Tage der Einschreibung von 11 Uhr an vorgenommen werden.

Hiebei wird gefordert:

- 1) aus der Religionslehre: jenes Maß von Wissen, das in den ersten Jahreskursen der Volksschule erworben werden kann.
- 2) aus der deutschen Sprache: Fertigkeit im Lesen und Schreiben. Kenntnis der Elemente aus der Formenlehre, Fertigkeit in Analysieren einfach bekleideter Sätze, Bekanntschaft mit den Regeln der Orthographie.
- 3) aus dem Rechnen: Übung in den vier Grundrechnungsarten in ganzen Zahlen.

Die Aufnahmestaxe beträgt 4 K 20 h; der Lehrmittelbeitrag 2 K; der Jugendspielbeitrag 80 h; diese Beträge werden bei ungünstigem Erfolg der Aufnahmeprüfung dem Betreffenden zurückgestellt.

Eine Wiederholung der Aufnahmeprüfung, sei es an derselben oder an einer anderen Mittelschule, ist unzulässig.

Am 17. September werden von 8–9 Uhr auch diejenigen Schüler vorgeschrieben und sodann geprüft, die auf Grund einer **Aufnahmeprüfung in eine höhere Klasse** aufgenommen werden wollen. Für diese Prüfung ist die vorgeschriebene Taxe von 24 K außer den obenerwähnten Beträgen zu erlegen.

Diese Aufnahmeprüfung entfällt, wenn der Schüler sich mit einem Zeugnisse der I. Fortgangsklasse über die unmittelbar vorhergehende Klasse einer öffentlichen österreichischen Realschule ausweisen kann.

Schüler dieser Anstalt, die ihr Studium hier fortsetzen wollen, müssen sich am 17. September von 2–4 Uhr nachmittags in ihren Klassenzimmern unter Vorweisung des letzten Semesterzeugnisses zu melden und einen Lehrmittelbeitrag von 2 K, sowie einen Jugendbeitragsbeitrag von 80 h zu erlegen.

Das Schulgeld beträgt halbjährig 30 K und ist mittels Schulgeldraten für das erste Semester von den schulgeldpflichtigen Schülern der ersten Klasse bis zum 15. Dezember, von denen der übrigen Klassen bis zum 31. Oktober, für das zweite Semester von den schulgeldpflichtigen Schülern aller Klassen bis zum 31. März zu entrichten.

Mittellosen öffentlichen Schülern der I. Klasse kann die Zahlung des Schulgeldes bis zum Schlusse des I. Semesters gestundet werden, wenn sie nach den ersten zwei Monaten des Schuljahres im sittlichen Betragen, im Fleiße und im Fortgange in allen obligaten Lehrfächern (mit Ausnahme der Kalligraphie und des Turnens) mindestens die Note „befriedigend“ erworben haben. Die mit einem ordnungsmäßig ausgefüllten, nicht über 1 Jahr alten Mittellosigkeitszeugnisse belegten Gesuche um Stundung sind nach den Weisungen des Schulausschusses bis zum 26. September einzubringen. Schüler der ersten Klasse, denen die Stundung hohenorts gewährt worden ist, sind davon auf die Dauer ihrer Dürftigkeit von der Schulgeldzahlung definitiv befreit, als sie Semesterzeugnisse mindestens der ersten Fortgangsklasse und aus dem sittlichen Betragen und dem Fleiße wenigstens die Note „befriedigend“ erhalten.

Schüler der ersten Klasse, die schon ein Zeugnis an einer Mittelschule erworben haben, können um die Stundung der Schulgeldzahlung nachsuchen.

Mittellose Realschüler, die ein Realschulzeugnis I. Fortgangsklasse mit mindestens befriedigenden Noten aus Sitten und Fleiß erworben haben, können innerhalb der ersten acht Tagen des Semesters ein den hochlöbl. k. k. Landesschulrat gerichtetes, stempelfreies, mit den letzten Semesterzeugnisse und dem Mittellosigkeitszeugnisse versehenes Gesuch um Befreiung von der Schulgeldzahlung durch den Klassen- oder Vorstandsbeschluss bei der Direktion einbringen.

Blankette für Mittellosigkeitszeugnisse sind an der Anstalt zu haben.

Das neue Schuljahr wird am 18. September mit einem feierlichen Gottesdienste in der Anstalts-Kapelle um 8 Uhr eröffnet, an dem alle katholischen Schüler teilzunehmen haben. Nach dem Gottesdienste haben sich sämtliche Schüler in ihren Klassenzimmern zu versammeln, wo ihnen das Weitere bekannt gegeben wird.

Die Direktion erfüllt eine angenehme Pflicht, indem sie im Namen der Anstalt allen Förderern derselben sowie allen Gönnern der studierenden Jugend den innigsten Dank für die erwiesenen Wohltaten ausspricht.

Plan, im Juli 1906.

Augustin Ritschel,

k. k. Direktor.



8

Über die Transformation

und

Reduction vielfacher Integrale

durch

simultane Substitutionen.

Von

Emil Neugebauer.

Separatabdruck aus dem Jahresberichte der k. k. Staats-Oberrealschule
in Linz für das Schuljahr 1889—90.

Linz 1890.

Verlag der k. k. Staats-Oberrealschule.

Druck von J. Wimmer.

Berichtigungen.

Seite	5	Zeile	15	v. o.	welche sich	statt	welches ich
„	15	„	5	v. u.	welchem	„	welcher
„	44	„	1	v. u.	Winckler	„	Winkler.

*Se. Hochwohlgebohren Herrn K. K. Rector.
Rath Prof. Dr. Gustav. Peschka in besond.
er Gefachung n. Dankbarkeit v. f.
sammaligen Zeit.*

*K. K. Rector Rath
1885 Prof. Dr. Peschka
ord. öffentl. Hochschullehrer*

Über die Transformation

und

Reduction vielfacher Integrale durch simultane Substitutionen.

Von

Emil Neugebauer.

In der Transformation durch Einführung neuer Veränderlicher besitzt die Analysis ein wirksames Hilfsmittel für die verschiedenen Aufgaben der Integralrechnung. Abgesehen von den wesentlichen Rechnungsvortheilen, welche die Transformationen schon bei der Behandlung des einfachen Integrals mitunter darbieten, kommt ihnen eine höhere Bedeutung noch insoferne zu, als man mit ihrer Hilfe aus bekannten Resultaten neue, allgemeinere abzuleiten vermag, und umgekehrt, gegebene Integrale auf bekannte, in geschlossener Form auswertbare, oder auf die irreductiblen Grundformen von Integral-Transcendenten zurückzuführen instande ist. Die Transformationen dienen somit nicht nur zur Erschließung von Quellen für allgemeinere Ergebnisse, sondern auch insbesondere dazu, um verwandte Fragen auf ihren gemeinsamen Ursprung zurückzuleiten und hiedurch ein System in die unabsehbare Fülle des Stoffes zu bringen; um nur ein bekanntes Beispiel für die letztere Bemerkung anzuführen, sei an die mannigfachen Formen erinnert, unter denen die elliptischen Integrale auftreten und welches ich, wie Legendre zuerst nachgewiesen hat, durch gewisse Substitutionen auf drei Grundformen zurückführen lassen.

Eine nicht minder wichtige Rolle spielt die Einführung neuer Veränderlicher bei der Betrachtung der mehrfachen Integrale. Durch die wiederholten Integrationen häufen sich die Schwierigkeiten, und die Berechnung gestaltet sich oft so verwickelt und wenig übersichtlich, dass es schon als ein erheblicher Vortheil bezeichnet werden muss, wenn durch die Transformationen zur Klärung und Abkürzung des Verfahrens beigetragen wird. Dies tritt beispielsweise schon ein, wenn durch eine passend gewählte Substitution variable Integrationsgrenzen in constante verwandelt werden, wodurch sich unter gewissen allgemeinen Voraussetzungen die Integrationen in beliebiger Reihenfolge vornehmen lassen; kann hiebei auch eine Trennung der Variablen bewirkt werden, so zerfällt das vielsache Integral in ein Product einfacherer Integrale. Allein ganz abgesehen von diesen Rechnungserleichterungen gibt es auch Fälle, wo erst durch die Transformation die Möglichkeit einer ganzen oder theilweisen Lösung überhaupt vorbereitet, oder das Problem wenigstens in eine solche Fassung gebracht wird, welche einer Discussion leichter zugänglich ist.

In der vorliegenden Arbeit möge die Schlussformel für die simultane Substitution bei vielfachen Integralen, der Jacobi'schen Darstellung folgend, auf dem Wege successiver Transformationen entwickelt werden; es wird sich hiebei

Da bei der Transformation mittelst simultaner Substitutionen zu den neuen Differentialen stets eine Functional-Determinante hinzutritt, so soll vorerst jene wenigen Sätze über Functional-Determinanten, von denen später Gebrauch gemacht wird, zusammengestellt werden.

1. Sind vermöge der n Gleichungen:

die x Functionen der unabhängigen Variablen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, so wird die Determinante aus den partiellen Ableitungen:

die Functional-Determinante des Systems der x in Bezug auf ξ genau und nach Jacobi*) mit $\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \dots \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n}$, oder nach Donkin**) symbolisch nach Art eines Differential-Quotienten mit $\frac{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}$ bezeichnet.

*) De determinantibus functionalibus. Crelle Journal Bd. 22, p. 319—352. In dieser Abhandlung gab Jacobi zuerst eine zusammenhängende Theorie der Functional-Determinanten. S. a. Baltzer Determinanten, p. 127.

**) Philos. Trans. 1854, I., p. 72.

2. Wenn die Beziehungen zwischen den Variablen x und ξ implicite gegeben sind mittelst des Systems von n Gleichungen:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

so lässt sich die Functional-Determinante bilden, ohne dass erst diese Gleichungen aufgelöst werden müssten. Differenziert man nämlich die i^{te} Gleichung des Systems (2) unter der Voraussetzung, dass die x sämtlich Functionen von ξ sind, nach ξ_k , so erhält man:

$$\frac{\partial f_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_k} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_k} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \xi_k} = 0$$

oder:

$$-\frac{\partial f_i}{\partial \xi_k} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_k} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_k} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \xi_k} \quad (3)$$

Bildet man hierauf die Determinante:

$$\begin{vmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & -\frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \dots & -\frac{\partial f_1}{\partial \xi_n} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & -\frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & \dots & -\frac{\partial f_2}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial f_n}{\partial \xi_1} & -\frac{\partial f_n}{\partial \xi_2} & \dots & -\frac{\partial f_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_n}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix},$$

so erkennt man sofort, dass diese Determinante das Resultat der Multiplication zweier Determinanten ist:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_n} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}$$

Das Product dieser Determinanten kann nämlich, wie bekannt, wieder als Determinante dargestellt werden, und zwar wird das k^{te} Glied der i^{ten} Zeile erhalten, wenn man die i^{te} Zeile der ersten mit der k^{ten} Zeile der zweiten Determinante componiert. Man findet:

$$a_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_k} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_k} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \xi_k}.$$

Der hier rechts stehende Ausdruck ist mit dem in Gleichung (3) identisch; es ist also:

$$a_{ik} = -\frac{\partial f_i}{\partial \xi_k}$$

und man erhält:

$$(-1)^n \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix},$$

oder, wenn man gleichzeitig in der letzten Determinante die Zeilen mit Columnen vertauscht:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} = (-1)^n \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}}. \quad (4)$$

3. Aus dem Systeme (1) kann man sich durch successive Elimination das folgende abgeleitet denken:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1 (\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots \xi_n) \\ x_2 &= \varphi_2 (x_1, \xi_2, \xi_3 \dots \xi_n) \\ x_3 &= \varphi_3 (x_1, x_2, \xi_3 \dots \xi_n) \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi_n (x_1, x_2 \dots x_{n-1}, \xi_n). \end{aligned} \quad (5)$$

Reduciert man diese Gleichungen auf Null und bildet nach der allgemeinen Formel (4) die Functional-Determinante, so ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} = (-1)^n \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_3} & \dots & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_n} \\ 0 & -\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_3} & \dots & -\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_n} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_3} & \dots & -\frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} & -\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & -\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & -\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_3} & \dots & 1 \end{vmatrix}}.$$

Die Determinanten im Zähler und Nenner reducieren sich auf das Diagonalglied und die Functional-Determinante erscheint schließlich in Form eines Productes:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_3} \dots \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_n} \quad (6)$$

4. Sind $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ als explizite Functionen der x gegeben, so nehmen Gleichungen (2) die Form an:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) - \xi_1 = 0$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) - \xi_2 = 0$$

$$\varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) - \xi_n = 0.$$

Bildet man wieder die Functional-Determinante nach Formel (4), so erhält man:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} = (-1)^n \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}},$$

er, da $q_i = \xi_i$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}} \quad (7)$$

er, mit Gebrauch des Donkin'schen Symbols für die Functional-Determinanten:

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)} \cdot \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 1.$$

Daraus ergibt sich, dass die Functional-Determinanten zweier Systeme von Veränderlichen, wobei abwechselnd die Veränderlichen des einen Systems die Abhängige jener des anderen Systems betrachtet werden, einander reciprok sind.*)

*) Möbius, Crelle J. 12, p. 116.

II. Die Transformation des vielfachen Integrals.

1. Um die Grenzen der folgenden Entwicklungen von vornherein abstecken, sei hinsichtlich des n -fachen Integrals:

$$J = \int^n F(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1, dx_2, \dots, dx_n \quad (8)$$

vorausgesetzt, dass die Function F reell, eindeutig, endlich und stetig sei alle Werte der Variablen innerhalb eines vollkommen geschlossenen Gebietes über welches die Integration erstreckt wird. An Stelle der ursprünglichen Veränderlichen x sollen neue Veränderliche ξ eingeführt werden, welche jenen durch die Gruppe der n Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ x_2 &= f_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \end{aligned} \quad (9)$$

verknüpft sind. Hinsichtlich der Functionen f werde vorausgesetzt, dass dieselben reell, ferner nebst ihren sämtlichen ersten Ableitungen nach ξ endlich und stetig seien für alle Werte der Veränderlichen, welche dem gegebenen Integrationsgebiete entsprechen; eine weitere nothwendige Eigenschaft der Transformationsgruppe wird sich im Laufe der folgenden Entwicklungen ergeben.

Die Reihenfolge der auszuführenden Integrationen ist — selbstverständlich bei gehöriger Rücksichtnahme auf die hiedurch bedingte Umwandlung der Integrationsgrenzen — unter den gemachten Voraussetzungen eine beliebige. Eröffnet man die Reihe der auszuführenden Integrationen mit der Integration in Bezug auf x_n und führt statt dieser Veränderlichen die neue Veränderliche ξ_n ein mittelst der Gleichung

$$x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \xi_n),$$

welche man sich aus dem Systeme (9) durch Elimination von $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ abgeleitet denken kann, so hat man bekanntlich x_n durch φ_n und dx_n an die Stelle dieser Integration x_1, \dots, x_{n-1} als constant angesehen werden, durch $\frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_n}$ zu ersetzen. Man erhält als erstes transformiertes Integral:

$$J = \int^n F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \varphi_n) \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_n} dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} d\xi_n.$$

Die Grenzen nach ξ_n sind entsprechend jenen nach x_n zu bestimmen.

Beginnt man die Entwicklung dieses Integrals mit der Integration nach x_{n-1} , so kann an Stelle der genannten Veränderlichen wieder eine neue, ξ_{n-1} eingeführt werden. Zu diesem Zwecke denke man sich aus den $n-1$ ersten Gleichungen des Systems (9) die Größen ξ_1, \dots, ξ_{n-2} eliminiert und das Resultat auf die Form:

$$x_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-2}, \xi_{n-1}, \xi_n)$$

racht; für die angedeutete Transformation ist sodann x_{n-1} durch φ_{n-1} , und ξ_{n-1} durch $\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \xi_{n-1}} d\xi_{n-1}$ zu ersetzen, da bei dieser Integration $x_1 \dots x_{n-2}, \xi_n$ unverändert bleiben. Es ist demnach:

$$J = \int^n F(x_1 \dots x_{n-2}, \varphi_{n-1}, \varphi_n) \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \xi_{n-1}} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_n} dx_1 \dots dx_{n-1} d\xi_{n-1} d\xi_n.$$

Hierin sind die Grenzen nach ξ_{n-1} , entsprechend jenen nach x_{n-1} zu timmen.

Auf diese Weise fortfahrend, können successive statt $x_{n-2}, x_{n-3} \dots x_2, x_1$ Veränderlichen $\xi_{n-2}, \xi_{n-3}, \dots \xi_2, \xi_1$ eingeführt werden und man gelangt schließlich zu dem Resultate:

$$J = \int^n F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} \dots \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_n} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n.$$

Die hierin auftretenden Functionen φ zeigen genau das Bildungsgesetz früher in (I) betrachteten Systemes (5); folglich ist das Product der partialen Differential-Quotienten der Functional-Determinante der Veränderlichen x in Bezug auf die Veränderlichen ξ gleich (6), und man kann daher transformirte Integral schreiben:

$$J = \int^n F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n.$$

Bei Gebrauch dieser Formel ist es weder nöthig, die Functionen φ zu entwickeln, noch die verschiedenen Umwandlungen zu verfolgen, welche die Integrationsgrenzen während der wiederholten Aenderungen der Integrationsumgebung und der successiven Neueinführung der Veränderlichen ξ erfahren. Im Laufe der Transformationen werden nämlich auch die in den Functionen φ auftretenden x nach und nach durch ξ ersetzt und die Function F muss schließlich jene übergehen, welche man unmittelbar erhält, wenn man die x mit Hilfe des Systems (9) durch die Veränderlichen ξ ausdrückt. Was die Bezeichnung des transformierten Integrals anbelangt, so kann man dieselbe ebenfalls direct aus dem für das ursprüngliche Integral etwa durch Bedingungen der Form:

$$\left\{ C_0 < t(x_1 \dots x_n) < C_1 \right\}$$

ebenen Integrationsgebiete ableiten, wenn man in diesen Bedingungen die x im Sinne der Gleichungen (9) durch ξ ersetzt.

Bezeichnet man die Functionen, in welche F und t nach unmittelbarer Einführung der Veränderlichen ξ übergehen, beziehungsweise mit Φ und Θ ,

so lautet die Schlussformel für die simultane Substitution in mehreren Integralen:

$$\int^n F(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n = \int^n \Phi(\xi_1 \dots \xi_n) \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_n$$

Hiebei sind mittelst der gleichen Substitutionen die ursprünglichen Grenzbedingungen:

$$\left\{ C_0 < t(x_1 \dots x_n) < C_1 \right\} \text{ in } \left\{ C_0 < \Theta(\xi_1 \dots \xi_n) < C_1 \right\}$$

zu überführen.

Zu demselben Resultate gelangt man durch Verallgemeinerung des Verfahrens, welches Lagrange bei der Transformation des dreifachen Integrals benutzt hat; auf diesem Wege hat Catalan die Transformation des mehrfachen Integrals durchgeführt.**)

2. Es erübrigt noch die Betrachtung einer Bedingung, welcher die Transformationsgleichungen nebst den gemachten Voraussetzungen genügen müssen, wenn die Transformation eine zulässige sein soll. Man gelangt hiezu, indem man von der Definition des vielfachen Integrals ausgeht: das Integral J in ein anderes Integral J' transformieren heißt, die über ein bestimmtes Gebiet der Veränderlichen erstreckte Summe von Gliedern der Form $f(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n$ durch eine andere Summe darstellen, deren Glieder die Form $f_1(\xi_1 \dots \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n$ haben und deren analytischer Ausdruck das transformierte Integral J' ist, so daß nun jedes Glied der einen Summe innerhalb der anderen Summe — und jedes nur einmal — Vertretung finden, oder soll, kurz gesagt, eine Summe durch die andere vollständig erschöpft werden, und soll die transformierte Summe durch das Integral J' darstellbar sein, so ist nothwendig, daß die Veränderlichen ξ alle innerhalb des dem Integrale J' entsprechenden Summenraumes möglichen Wertgruppen — und zwar jede nur einmal — annehmen, während die Veränderlichen x alle innerhalb des zu J gehörigen Gebietes liegenden Wertgruppen durchlaufen.

Daraus erhellt, daß zwischen den ursprünglichen und neuen Veränderlichen innerhalb der Integrationsgebiete nicht nur stetige, sondern auch deutliche Beziehungen herrschen müssen. Dem Uebergang von einer bestimmten Wertgruppe zu einer Nachbar-Gruppe im Bereiche der x muss ein analoger Uebergang im Bereiche der ξ entsprechen, — jedem System der Differentialen somit ein bestimmtes, im allgemeinen von derselben Ordnung verschwindendes System von Differentialen $d\xi$ zugeordnet sein.

*) Nach den vorbereitenden Arbeiten Euler's über das Doppelintegral (Nov. Com. Petrop. 14 I, p. 72) und Lagrange's über das dreifache Integral (Mém. de l'Acad. de Paris 1773) wurde der allgemeine Ausdruck für das transformierte vielfache Integral zuerst von Jacobi (Crelle J. 12, p. 38 und det. funct. § 19, Crelle J. 22) entwickelt.

**) Mém. cour. p. l'acad. de Bruxelles t 14; s. a. Moigno Leçons II, p. 223.

Für den Zusammenhang zwischen den Differentialen ergeben sich aus dem Systeme (9) die n Gleichungen:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_n} d\xi_n \\ dx_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial \xi_n} d\xi_n \\ dx_n &= \frac{\partial f_n}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial f_n}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial \xi_n} d\xi_n, \end{aligned}$$

welche die Form linearer Gleichungen haben.

Damit nun zu jedem bestimmten Systeme der Differentiale dx im Sinne der obigen Ausführungen ein bestimmtes System der Differentiale $d\xi$ gehöre, ist nothwendig, dass die Determinante aus den Coëfficienten von Null verschieden sei. Denn verschwände die Determinante aus den Coëfficienten, so wäre für die betrachtete Wertegruppe der Veränderlichen das zu den dx gehörige System der $d\xi$ entweder unbestimmt, oder aber es würde die Ordnung des Unendlichkleinwerdens der $d\xi$ niedriger sein als jene der dx : im ersteren Falle könnten eindeutige Beziehungen zwischen den Veränderlichen x und ξ nicht mehr bestehen, im letzteren Falle nur dann, wenn die Determinante den Wert Null als Maximum oder Minimum annimmt, d. h. ihr Zeichen hiebei nicht ändert.

Dies gilt für alle Wertegruppen innerhalb des Gebietes, auf welches die Integration zu erstrecken ist; — dagegen kann die Determinante für Gruppen am Rande des Gebietes unbeschadet der Zulässigkeit der geplanten Transformation verschwinden, da Übergänge zu Gruppen jenseits des Randes nicht mehr in Betracht kommen.

Berücksichtigt man, dass die Determinante aus den Coëfficienten die Functional-Determinante der Veränderlichen x in Bezug auf ξ vorstellt, dass ferner die Differential-Quotienten innerhalb des gegebenen Gebietes als endlich und stetig vorausgesetzt wurden und sohin auch die Determinante innerhalb dieser Grenzen eine endliche und stetige Function ist, so gelangt man im Zusammenhalt mit den letzten Erörterungen zu dem Schlusse, dass die Functional-Determinante innerhalb des Integrationsgebietes ihr Zeichen nicht ändern darf, wenn die Transformation in der beabsichtigten Form als zulässig erklärt werden soll. Diese Bedingung lässt sich beim zwei- und dreifachen Integrale leicht geometrisch interpretieren, wie weiter unten gezeigt werden mag.

Bei der Transformation des einfachen bestimmten Integrals reducirt sich die Functional-Determinante auf einen einfachen Differential-Quotienten; derselbe muss bekanntlich innerhalb der Integrationsgrenzen ebenfalls zeichenbeständig sein, wenn die Transformation ohneweiters ein richtiges Resultat liefern soll: im entgegengesetzten Falle müsste das Integral durch Einschiebung neuer Grenzen in Theil-Integrale gespalten werden, und zwar entsprechen diese Zwischen-grenzen genau den Stellen, für welche der Differential-Quotient $\frac{dx}{d\xi}$ sein Zeichen wechselt, so dass dann in jedem der Theil-Integrale der aufgestellten Bedingung wirklich genügt wird.

Man erkennt aus diesen Betrachtungen, dass zwischen dem Verhalten des Differential-Quotienten und jenem der Functional-Determinante eine Uebereinstimmung herrsche, was im Einklange mit der Bemerkung Jacobi's am Schlusse der früher citierten Abhandlung. (de determin. funct. p. 352) steht, worin die Analogie zwischen dem einfachen Differential-Quotienten und der Functional-Determinante betont wird.*)

3. Die Formel (10) bedarf noch einer kleinen Ergänzung. Aus der Entwicklung ist ersichtlich, dass von der Reihenfolge, in welcher man die ξ den x entsprechen lässt, die Colonnenanordnung der Determinante und mithin auch das ihr durch das ganze Integrationsgebiet zukommende Zeichen abhängt. Nun liegen in gegebenen Fällen keine Anhaltspunkte darüber vor, in welcher Reihenfolge die neuen Variablen den ursprünglichen zugeordnet werden sollen; das Zeichen der Determinante ist deshalb unbestimmt und das transformierte Integral würde im allgemeinen nur den absoluten Wert des ursprünglichen wiedergeben können. Man kann indes leicht eine Uebereinstimmung auch hinsichtlich der Zeichen bewerkstelligen, indem man die Grenzen so bestimmt, dass die entsprechenden Differentiale gleiche Vorzeichen erhalten, oder einfacher, indem man unter der Voraussetzung, dass die unteren Grenzen in beiden Integralen sämtlich kleiner sind als die oberen, die Determinante mit dem positiven Vorzeichen nimmt.

III. Geometrische Ableitung.

1. Die erhaltenen Resultate lassen sich für das zwei- und dreifache Integral leicht mit Hilfe geometrischer Betrachtungen herleiten. Es mögen die betreffenden Entwicklungen — bloß um für die Zeichenbeständigkeit der Functional-Determinante andere Gesichtspunkte zu gewinnen — ihren Grundzügen nach hier angeführt werden.

Das Doppel-Integral

$$V = \iint F(x, y) dx dy \quad (11)$$

bezogen auf den Spielraum S der Veränderlichen x, y , bedeutet auf Grundlage rechtwinkliger Raumcoordinaten geometrisch interpretiert das Volumen des Cylinders, der von dem Flächenstück S der xy -Ebene und von der Fläche

*) Es heisst darin unter Hinweis auf die Schlussformel für die simultane Substitution: „Et haec formula egregie analogiam differentialis et Determinantis functionalis declarat.“ — In der That übernimmt bei der Verallgemeinerung der Probleme die Functional-Determinante die Rolle des einfachen Differential-Quotienten. Jacobi hat diese Analogie in späteren Arbeiten weit verfolgt und gelangte hiedurch zu einem allgemeinen Principe, von ihm das „Princip des letzten Multipliers“ genannt, welches in der Theorie der Differentialgleichungen von hervorragender Bedeutung ist. Diese Analogie lässt sich übrigens auch in den eingangs zusammengestellten Sätzen über Functional-Determinanten erkennen; hieraus rechtfertigt sich die Donkin'sche Bezeichnungsweise der Functional-Determinante nach Art eines Differential-Quotienten.

$z = F(x, y)$ begrenzt wird. Nach dieser Auffassung wird der Spielraum S in unendlich kleine Rechtecke $dx dy$ zerlegt und die über diesen Rechtecken liegenden Volumenelemente summiert.

Statt in Rechtecke kann der Spielraum S in anderweitige Flächenelemente zerlegt werden; dies geschieht durch die Substitutionen:

$$\begin{aligned} x &= f_1(\xi, \eta) \\ y &= f_2(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (12)$$

Für ein constantes $\xi = \xi_i$ bezeichnen diese Gleichungen analytisch eine Curve C_{ξ_i} , beim Variieren von ξ eine Schar solcher Curven C_ξ ; für ein constantes $\eta = \eta_k$ eine Curve C_{η_k} , beim Variieren von η eine Schar solcher Curven C_η . Die beiden Scharen überziehen den Spielraum S mit einem Netze, dessen Maschen die neuen Flächenelemente vorstellen. Damit alle Flächenelemente von S , und zwar jedes nur einmal als Basis eines Raumelementes in Betracht komme, ist erforderlich, dass dieses Netz den ganzen Spielraum überdecke, ferner dass es ein einfaches (nicht überschlagenes) sei. Hieraus ergeben sich die notwendigen Eigenschaften der Parametercurven C_ξ und C_η : Durch jeden Punkt innerhalb des Spielraumes S muss und darf nur eine Curve C_ξ und eine Curve C_η gehen; die gleichartigen Parametercurven C_ξ dürfen sich innerhalb S nicht schneiden, ebensowenig die Curven C_η .

Unter diesen Voraussetzungen bildet man das Volumenelement durch Multiplication des neuen Flächenelementes mit der zugehörigen Ordinate. Irgend ein Flächenelement dS wird eingeschlossen von zwei Nachbarpaaren von Parametercurven $C_\xi, C_\xi + d\xi, C_\eta, C_\eta + d\eta$; letztere schneiden sich in vier Punkten, deren Coordinaten beziehungsweise sind:

$$\begin{aligned} M_1 \left\{ \begin{aligned} x_1 &= f_1(\xi, \eta) \\ y_1 &= f_2(\xi, \eta) \end{aligned} \right. & M_2 \left\{ \begin{aligned} x_2 &= f_1(\xi + d\xi, \eta) \\ y_2 &= f_2(\xi + d\xi, \eta) \end{aligned} \right. \\ M_3 \left\{ \begin{aligned} x_3 &= f_1(\xi, \eta + d\eta) \\ y_3 &= f_2(\xi, \eta + d\eta) \end{aligned} \right. & M_4 \left\{ \begin{aligned} x_4 &= f_1(\xi + d\xi, \eta + d\eta) \\ y_4 &= f_2(\xi + d\xi, \eta + d\eta) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Der Inhalt des krummlinigen Viereckes $M_1 M_2 M_3 M_4$ kann der doppelten Fläche des Dreieckes $M_1 M_2 M_3$ gleichgesetzt und mithin durch eine Determinante aus den Coordinaten von M_1, M_2, M_3 ausgedrückt werden. Es gilt, und zwar auch dem-Zeichen*) nach:

$$dS = 2 \triangle M_1 M_2 M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Die Determinante ist stets positiv, wenn das Umkreisen des Dreiecks-umfanges in der Richtung $M_1 M_2 M_3$ in demselben Sinne erfolgt, in welcher positive Winkel in der xy -Ebene beschrieben werden; im entgegengesetzten Falle negativ. Hiernach unterscheidet man auch positive und negative Dreiecksflächen; Flächen gleichen Vorzeichens pflegt man auch „homolog“ zu nennen.

*) Cayley Cambr. math. J. 2. p. 268. Baltzer Det. p. 196.

Man überzeugt sich leicht, dass bei der vorausgesetzten Beschaffenheit des Netzes sämtliche analog gebildete und bezeichnete Dreiecke $M_1 M_2 M_3$ (der erste, zweite, dritte Dreieckspunkt entspricht beziehungsweise den Parametern $\xi, \eta; \xi + d\xi, \eta; \xi, \eta + d\eta$) homolog und die Determinanten gleich bezeichnet sein werden. Denn die Parametercurven werden bei wachsenden Argumente von einer Grenze des Gebietes bis zur anderen stets in einer Richtung durchlaufen und es stimmt diese Richtung mit jener in den Nachbarcurven überein. Von einem Dreiecke schließt man demgemäß auf die homologe Lage des Nachbar-Dreieckes und es bleibt dieser Schluss durch das ganze Gebiet aufrecht.

Würden sich aber — entgegen der vorausgesetzten Beschaffenheit des Netzes — beispielsweise zwei gleichartige Parametercurven schneiden, so wären die zu verschiedenen Seiten des Schnittpunktes liegenden Dreiecksflächen nicht mehr homolog und die ihnen entsprechenden Determinanten erhielten entgegengesetzte Zeichen. Man ersieht dies aus beistehender Figur, welcher die Richtung, in der die Parametercurven bei wachsendem Argumente durchlaufen werden, mit geradlinigen, die Drehrichtung beim Umkreisen der Dreiecksumfänge mit krummlinigen Pfeilen angedeutet ist.

Setzt man in die Determinante (13) für die Coordinaten die Werte ein, subtrahirt sodann die erste Columnne von der zweiten und dritten und sondert in der zweiten Columnne den Factor $d\xi$, in der dritten den Factor $d\eta$ ab, so ergibt sich für ein verschwindendes $d\xi$ und $d\eta$:

$$2 \triangle M_1 M_2 M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial \xi} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \\ f_2 & \frac{\partial f_2}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta.$$

Folglich wird die doppelte Dreiecksfläche, und zwar auch dem Zeichen nach, ausgedrückt durch die Functional-Determinante $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}$ multiplicirt mit den Differentialen $d\xi d\eta$.

Das Volumenelement ist:

$$dV = z \cdot dS = F[f_1(\xi, \eta), f_2(\xi, \eta)] \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta$$

und das ganze Volumen:

$$V = \iint \Phi(\xi, \eta) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta. \quad (14)$$

Das Integrationsgebiet hierfür ist im Sinne der Gleichungen (12) entsprechend dem Spielraume S zu bestimmen. Das Resultat steht in Uebereinstimmung mit der allgemeinen Formel (10).

Auf diesem Wege wird eine Interpretation der Functional-Determinante gewonnen dahin gehend, dass diese in Verbindung mit den Differentialen den Inhalt der neuen Flächenelemente ausdrücke. Weil in dem ursprünglichen Integrale sämtliche Flächenelemente positiv genommen werden, so ist nothwendig, dass auch die Functional-Determinante innerhalb des ganzen in Betracht kommenden Gebietes ihr Zeichen beibehalte; denn wechselte für einen endlichen Bereich innerhalb S die Determinante ihr Zeichen, so würde eine Reihe von Flächenelementen und mit ihnen die zugehörigen Volumenelemente mit entgegengesetztem Zeichen in die Rechnung treten, und das transformierte Integral würde nicht mehr das Volumen V ausdrücken.

Wie bereits früher auseinandergesetzt wurde, ändert die Determinante innerhalb des ganzen Integrationsgebietes ihr Zeichen nicht, wenn das Netz der Parametercurven die eingangs angegebene Beschaffenheit besitzt. Umgekehrt kann man aus den nothwendigen Eigenschaften des Netzes, deren Kriterium die Zeichenbeständigkeit der Functional-Determinante ist, durch bloße Anschauung das Vorhandensein eindeutiger und stetiger Beziehungen zwischen den ursprünglichen und neuen Veränderlichen innerhalb der Integrationsgebiete ableiten.

2. Dass die Außernachlassung der Bedingung hinsichtlich der Functional-Determinante unter Umständen zu einem unrichtigen Resultate führen kann, kann an einem einfachen Beispiele gezeigt werden. Es sei gegeben das Integral

$$V = \iint e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Die Integration sei zu erstrecken über ein Gebiet S , welches gegeben durch die Bedingung:

$$0 < x^2 + y^2 < r^2.$$

Das Integral bezeichnet das Volumen eines auf der xy -Ebene aufruhenden Kreiszylinders, welcher nach oben durch die Fläche $z = e^{-x^2-y^2}$ begrenzt wird.

Der Körper befindet sich durchaus oberhalb der xy -Ebene und das Volumen muss deshalb einen bestimmten positiven Wert haben.

Die unbestimmte Integration nach x und y ist in geschlossener Form nicht durchführbar; dagegen gelingt die Lösung sofort durch eine Transformation, wofür sich die Einführung von Polarcoordinaten als geeignet darstellt. Ist unter Beibehaltung der üblichen Bezeichnungsweise

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi,$$

ergibt sich als Wert der Functional-Determinante

$$\Delta = \rho,$$

und man erhält als transformiertes Integral:

$$\iint e^{-\varrho^2} \varrho \, d\varrho \, d\varphi.$$

Es erübrigt nur die Bestimmung des neuen Integrationsgebietes. Das ursprüngliche Integrationsgebiet ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt und dessen Radius r ist. Dieses Gebiet würde vollständig erschöpft, wenn man ϱ und φ alle möglichen Werte annehmen ließe, welche den Bedingungen entsprechen:

$$-r < \varrho < +r; \quad 0 < \varphi < \pi.$$

Hieraus würden sich die Grenzen ergeben: $\varrho_0 = -r$, $\varrho_1 = +r$; $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \pi$, und man erhielte

$$\int_{-r}^{+r} \int_0^\pi e^{-\varrho^2} \varrho \, d\varrho \, d\varphi = 0.$$

Dies wäre ein offenbar unrichtiges Resultat, was sich indes schon von der Ausführung der Rechnung dadurch verrathen würde, dass die Function der Determinante ϱ innerhalb der so bestimmten Grenzen ihr Zeichen wechselt.

Um das richtige Resultat zu erhalten, muss man ϱ und φ zwischen den Grenzen 0 und r , beziehungsweise 0 und 2π variiren lassen, wodurch gleichfalls der ursprüngliche Spielraum vollständig erschöpft wird. Die erforderlichen Grenzen sind deshalb: $\varrho_0 = 0$, $\varrho_1 = r$; $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 2\pi$, und man erhält den richtigen Wert:

$$V = \int_0^r \int_0^{2\pi} e^{-\varrho^2} \varrho \, d\varphi \, d\varrho = \pi (1 - e^{-r^2}).$$

Hier blieb die Functional-Determinante beständig positiv.

Im ersten Falle der Begrenzung bestehen die Parametercurven der φ aus unbegrenzten Geraden, welche sich im Ursprung schneiden; beim Wachsen von ϱ von $-r$ bis $+r$ wird für ein beliebiges φ stets der Ursprung durchschritten; daher muss dieser als innerhalb des Integrationsgebietes liegend angesehen werden. Je zwei in Bezug auf den Ursprung symmetrisch liegende Flächenelemente sind entgegengesetzt gleich und haben gleiche Ordinaten, woraus sich das Verschwinden des ersttransformierten Integrals erklärt.*)

Im zweiten Falle der Begrenzung dagegen sind die Parametercurven der φ halbbegrenzte Gerade (Strahlen); zufolge der Beschränkung von ϱ auf positive Werte erscheint der Schnittpunkt dieser Parametercurven an den Rändern des Integrationsgebietes gerückt, indem letzteres als Kreisabschnitt mit dem Centriwinkel 2π betrachtet wird.

*) Ähnliches ergäbe sich, wenn man die Intervalle, in denen sich ϱ und φ bewegen mit $\pm r$ und $\pm \frac{\pi}{2}$ bestimmen würde.

Nur nebenbei mag erwähnt werden, dass man aus dem betrachteten Doppel-Integral, wenn man die Grenzen von x und y mit $\pm \infty$ festsetzt und vorher die Veränderlichen trennt, nach dem Vorgange von Cauchy leicht das bekannte Resultat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

herzuleiten vermag.

3. Die Functional-Determinante ist noch einer zweiten Interpretation fähig. Betrachtet man nämlich wieder x, y und ξ, η als Punktkoordinaten, so wird vermöge der Transformationsgleichungen (12) jedes Gebilde der xy -Ebene in ein entsprechendes Gebilde der $\xi\eta$ -Ebene überführt. Sofern die Beziehungen zwischen beiden ebenen Systemen eindeutig und stetig sind, erinnert diese Transformation an die affine, in welche sie direct übergeht, wenn die Transformationsgleichungen linear sind. Bekanntlich bezeichnet man das constante Verhältniss, in welchem entsprechende Flächen bei affinen Systemen stehen, als „Modulus“ der Transformation und dieser Modulus wird unmittelbar durch die Determinante aus den Coëfficienten der Transformationsgleichungen ausgedrückt.

Bei der allgemeinen Transformation wird das Größenverhältniss entsprechender Flächenelemente durch die Functional-Determinante ausgedrückt, mithin könnte diese als Modulus der Transformation bezeichnet werden. Während aber bei der affinen Transformation im engeren Sinne der Modulus durchaus constant ist und das Verhältniss beliebig gross entsprechender Flächen ausdrückt, ist bei der Transformation im weiteren Sinne die Functional-Determinante im allgemeinen von den Variablen abhängig: der Modulus ändert sich hier also von Punkt zu Punkt und kann daher nur als Exponent des Verhältnisses unendlich kleiner entsprechender Flächen in Betracht kommen. *)

Auch von dieser Auffassungsweise der Functional-Determinante ausgehend, lässt sich die Nothwendigkeit ihrer Zeichenbeständigkeit bei der Transformation des Doppel-Integrals entwickeln.

4. Das dreifache Integral:

$$M = \iiint R(x, y, z) dx dy dz \quad (15)$$

bezogen auf ein bestimmtes geschlossenes Gebiet der Veränderlichen x, y, z kann auf Grundlage rechtwinkliger Raumkoordinaten als der Ausdruck für die

*) Bereits Möbius hat eine allgemeinere Art der affinen Transformation betrachtet, bei welcher geradlinige Gebilde im allgemeinen in krummlinige deformiert werden unter der Beschränkung, dass die Grössen der Flächen erhalten bleiben. Die nothwendige und hinreichende Bedingung hiefür ist, dass die Functional-Determinante gleich 1 sei, und aus dieser Bedingung wurden von Möbius die allgemeinen Formen der hiezu dienlichen Transformationsgleichungen abgeleitet. Mit Rücksicht auf die Erhaltung der Flächen kann diese Transformation als eine äquivalente bezeichnet werden. S. Crelle, J. XII., p. 109.

Masse eines das Integrationsgebiet erfüllenden Körpers angesehen werden, dessen Dichte γ in dem jeweiligen Punkte durch den Wert der Function $\gamma = F(x, y, z)$ gemessen wird.

Nach dieser Auffassung wird das Integrationsgebiet in unendlich kleine rechtwinkelige Parallelepipede zerlegt, die Masse jedes einzelnen Parallelepipeds durch Multiplication seines Volumens mit der zugehörigen Dichte bestimmt und hierauf durch Summieren der Massenelemente der Ausdruck für die Gesamtmasse gebildet.

Statt in rechtwinkelige Parallelepipede kann das Integrationsgebiet andersgestaltete Volumselemente zerlegt werden, was mittelst der Substitutionen geschieht:

$$\begin{aligned} x &= f_1(\xi, \eta, \zeta) \\ y &= f_2(\xi, \eta, \zeta) \\ z &= f_3(\xi, \eta, \zeta). \end{aligned} \quad (16)$$

Für ein constantes ξ bezeichnet dieses System die Gleichung einer Parameterfläche P_ξ in Gauss'schen Coordinaten, für variierende ξ eine Schaar solcher Parameterflächen; in analoger Weise ergeben sich noch zwei weitere Scharen von Parameterflächen P_η P_ζ .

Die drei Scharen der Parameterflächen zerlegen den Raum in unendlich kleine Zellen, welche die neuen Volumselemente darstellen. Sollen bei Bestimmung der Masse sämtliche Volumselemente des Integrationsgebietes und zwar jedes nur einmal, in Betracht kommen, so ist erforderlich, dass ein System der Zellen den ganzen Integrationsraum ausfülle und ein einförmig (nicht sich selbst durchdringendes) sei; hieraus ergeben sich für die Parameterflächen, beziehungsweise deren Gleichungen die nothwendigen Eigenschaften in ganz analoger Weise, wie für die Parametercurven bei der Transformation des Doppelintegrals.

Irgend eine Zelle wird gebildet durch drei Nachbarpaare ungleichartig Parameterflächen, denen die Parameter $\xi, \xi + d\xi; \eta, \eta + d\eta; \zeta, \zeta + d\zeta$ entsprechen. Die von den Flächenpaaren umschlossene Zelle hat die Form eines unendlich kleinen Parallelepipeds, dessen Volumen bis auf ein unendlich kleines höherer Ordnung genau durch das sechsfache Volumen eines Ecktetraeders ausgedrückt werden kann. Die Punkte eines Ecktetraeders haben die Coordinate

$$M_1 \begin{cases} x_1 = f_1(\xi, \eta, \zeta) \\ y_1 = f_2(\xi, \eta, \zeta) \\ z_1 = f_3(\xi, \eta, \zeta) \end{cases} \quad M_2 \begin{cases} x_2 = f_1(\xi + d\xi, \eta, \zeta) \\ y_2 = f_2(\xi + d\xi, \eta, \zeta) \\ z_2 = f_3(\xi + d\xi, \eta, \zeta) \end{cases} \quad M_3 \begin{cases} x_3 = f_1(\xi, \eta + d\eta, \zeta) \\ y_3 = f_2(\xi, \eta + d\eta, \zeta) \\ z_3 = f_3(\xi, \eta + d\eta, \zeta) \end{cases} \quad M_4 \begin{cases} x_4 = f_1(\xi, \eta, \zeta + d\zeta) \\ y_4 = f_2(\xi, \eta, \zeta + d\zeta) \\ z_4 = f_3(\xi, \eta, \zeta + d\zeta) \end{cases}$$

Das sechsfache Volumen des Tetraeders wird — und zwar auch durch das Zeichen nach — durch die Determinante bestimmt:

$$6 T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}.$$

Die Determinante ist positiv oder negativ, je nachdem von dem Eckpunkte M_4 aus betrachtet, die Buchstabenfolge der Grundfläche $M_1 M_2 M_3$ dem positiven oder negativen Drehungsinne entspricht.

Nach Substitution der Werte für die Coordinaten, Subtraction der ersten Colonne von den übrigen und Absonderung der Factoren $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, beziehungsweise bei der zweiten, dritten und vierten Colonne geht diese Determinante in die Functional-Determinante der ursprünglichen Veränderlichen in Bezug auf die neuen über, und man erhält das Volumen einer Zelle ausgedrückt durch:

$$dv = 6 T = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (\xi, \eta, \zeta)} d\xi d\eta d\zeta,$$

ner:

$$dM = F(f_1 f_2 f_3) dv = \Phi(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (\xi, \eta, \zeta)} d\xi d\eta d\zeta,$$

d:

$$M = \iiint \Phi(\xi, \eta, \zeta) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} d\xi d\eta d\zeta$$

transformiertes Integral. Das Integrationsgebiet ist entsprechend dem ursprünglichen zu bestimmen.

Da bei der ursprünglichen Integration sämtliche Volumenelemente positiv genommen wurden, so müssen, wenn das transformierte Integral wenigstens den absoluten Wert des ursprünglichen richtig wiedergeben soll, auch die neuen Volumenelemente sämtlich mit gleichem Zeichen in die Rechnung eingehen; gleich darf die Functional-Determinante durch das ganze Integrationsgebiet mit demselben Zeichen nicht ändern.

Die Zeichenbeständigkeit der Functional-Determinante steht im Einklange mit der oben angedeuteten nothwendigen Beschaffenheit des Zellensystems; umgekehrt gelangt man von der Zeichenbeständigkeit der Functional-Determinante ausgehend zu den allgemeinen Bedingungen, welchen die Parameter-Veränderlichen, beziehungsweise die Transformationsgleichungen genügen müssen, wenn die Transformation zulässig sein soll. Man findet, dass diese Bedingungen im Vorhandensein eindeutiger und stetiger Beziehungen zwischen den ursprünglichen und neuen Veränderlichen innerhalb des ganzen Integrationsgebietes gleichgültig sind.

Nach einer anderen Auffassung wird durch die Functional-Determinante ein Verhältnis gekennzeichnet, in welchem sich der Inhalt unendlich kleiner Theile ändert, wenn ein Gebilde des xyz -Raumes mittelst der Transformationsgleichungen (16) in ein entsprechendes Gebilde des $\xi\eta\zeta$ -Raumes überführt wird. Auch diese Auffassungsweise führt hinsichtlich der Transformation dreifachen Integrals zu Resultaten, welche mit den bereits erhaltenen in Einklang stehen.

5. Dass die Nichtbeachtung der Bedingung bezüglich der Zeichenbeständigkeit der Functional-Determinante zu einem unrichtigen Resultate

führen könne, möge auch hier an einem einfachen Beispiele gezeigt werden. Es liege vor das dreifache Integral:

$$M = \iiint F(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \quad (17)$$

bezogen auf alle positiven und negativen Werte der Veränderlichen, welche Bedingung entsprechen:

$$0 < x^2 + y^2 + z^2 < r^2.$$

Das Integral (17) wird die Masse einer Vollkugel ausdrücken, die Dichte in jedem Punkte durch den Wert der als beliebig vorausgesetzten Function F gemessen wird.

Bei der gegebenen Art der Argumentsverbindung bewährt sich in den meisten Fällen die Transformation nach räumlichen Polarcoordinaten als zweckmäßig. Es ist unter Beibehaltung der üblichen Bezeichnung:

$$x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = \rho \cos \vartheta.$$

Die Function unter dem Integralzeichen geht nach der Substitution in $F(\rho^2)$; als Wert der mit positivem Zeichen genommenen Functional-Determinante erhält man $\rho^2 \sin \vartheta$, und als transformiertes Integral:

$$M = \iiint F(\rho^2) \rho^2 \sin \vartheta d\rho d\varphi d\vartheta.$$

Behufs Bestimmung der neuen Grenzen kann man, wenn die Wurzeln nur auf positive Werte beschränkt werden, drei verschiedene Gruppen von Bedingungen erhalten, u. zw.:

$$1. \begin{cases} 0 < \rho < r \\ 0 < \varphi < 2\pi \\ 0 < \vartheta < \pi \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 0 < \rho < r \\ 0 < \varphi < \pi \\ 0 < \vartheta < 2\pi \end{cases} \quad 3. \begin{cases} -r < \rho < +r \\ 0 < \varphi < \pi \\ 0 < \vartheta < \pi. \end{cases}$$

Jede dieser drei Gruppen erschöpft das ursprüngliche Integrationsgebiet vollständig. Man überzeugt sich indes leicht, dass nur die erste und dritte Gruppe zulässig sind, weil nur diesen eine durch das ganze Gebietszeichenbeständige Functional-Determinante entspricht. Aus den genannten Gruppen ergeben sich beziehungsweise die Grenzen:

$$1. \begin{cases} \rho_0 = 0; \rho_1 = r \\ \varphi_0 = 0; \varphi_1 = 2\pi \\ \vartheta_0 = 0; \vartheta_1 = \pi \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \rho_0 = -r; \rho_1 = +r \\ \varphi_0 = 0; \varphi_1 = \pi \\ \vartheta_0 = 0; \vartheta_1 = \pi. \end{cases}$$

Die Integrationen in Bezug auf φ und ϑ lassen sich nach der Transformation ausführen; es wird für die erste Grenzengruppe:

$$M = 4\pi \int_0^r F(\rho^2) \rho^2 d\rho$$

und für die letzte:

$$M = 2\pi \int_{-r}^{+r} F(\rho^2) \rho^2 d\rho.$$

Man erkennt sofort, dass beide Werte identisch sind.

Dagegen wäre die Annahme der zweiten Gruppe der Grenzbedingungen unzulässig, wie sich aus dem Zeichenwechsel der Functional-Determinante innerhalb der Integrationsgrenzen schließen lässt; in der That würde man nach Substitution der zugehörigen Grenzen:

$$2. \begin{cases} \varphi_0 = 0; \varphi_1 = r \\ \psi_0 = 0; \psi_1 = \pi \\ \vartheta_0 = 0; \vartheta_1 = 2\pi \end{cases}$$

dem offenbar unrichtigen Werte $M = 0$ geführt werden.

Bei Zulassung negativer Winkel ergeben sich noch verschiedene andere Gruppen von Grenzbedingungen, welche je nach dem Verhalten der Functional-determinante innerhalb des Integrationsgebietes theils richtige, theils unrichtige Resultate liefern würden.

Das behandelte Beispiel gestaltet sich übrigens noch einfacher, wenn an $F = 1$ annimmt: die Aufgabe würde dann der Bestimmung des Kugelvolumens entsprechen.

IV. Beispiele.

Die Vortheile, welche die Transformationen vielfacher Integrale durch Einführung neuer Veränderlicher darbieten, sollen nun an einigen Beispielenörtert werden.

1. Es liege das dreifache Integral vor:

$$= \iiint F[a_1 x + b_1 y + c_1 z, a_2 x + b_2 y + c_2 z, a_3 x + b_3 y + c_3 z] dx dy dz \quad (18)$$

streckt auf ein Gebiet, welches durch die Bedingungen gegeben ist:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &< a_1 x + b_1 y + c_1 z < \alpha_1 \\ \beta_0 &< a_2 x + b_2 y + c_2 z < \beta_1 \\ \gamma_0 &< a_3 x + b_3 y + c_3 z < \gamma_1 \end{aligned} \quad (19)$$

β, γ seien Constante; das Integral drückt die Masse eines parallelepipedischen Körpers von variabler Dichte aus, dessen Grenzflächen durch die Bedingungen 19), und dessen Dichte durch den jeweiligen Wert der Function F gekennzeichnet sind.

Wollte man die Integration in der gegebenen Form durchführen, so würde man, abgesehen von der ziemlich verwickelten Argumentsverbindung der Function, die Hauptschwierigkeit bei der Bestimmung der Grenzen begegnen. Es müsste in allgemeiner Lage der Grenzebenen das Integral in nicht weniger als 21 Theil-

Integrale gespalten und für jedes derselben die drei Grenzenpaare beson-
ermittelt werden, wodurch sich die Rechnung ungemein weitläufig gestalten w

Eine simultane Substitution schafft rasch Abhilfe. Das Augenmerk
Wahl der Transformationsgleichungen wird darauf gerichtet sein müssen,
möglichst einfache Gestaltung der Grenzen zu erreichen; dies wird er-
wenn man die in den Grenzbedingungen (19) erscheinenden linearen For-
der Reihe nach den neuen Veränderlichen gleichsetzt. Hiernach sind die Tr-
formationsgleichungen:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= \xi \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= \eta \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= \zeta, \end{aligned}$$

für deren Annahme man die constanten Grenzen $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1$ er-
Die Function unter dem Integralzeichen geht über in $F(\xi, \eta, \zeta)$; die Function
Determinante kann mit Rücksicht auf Gleichung (7) unmittelbar hingeschrie-
werden, und zwar ist:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Mithin wird das transformierte Integral:

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \int_{\beta_0}^{\beta_1} \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} F(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta.$$

Abgesehen von der wesentlichen Vereinfachung der Function F , die ihr
Ursprung in der Uebereinstimmung der Grenzbedingungen mit der Argumen-
verbindung hat, liegt der eigentliche Erfolg der Transformation darin, dass
constanten Grenzen keinerlei Spaltung des Integrals erheischen, ferner dass
Integrationen ohne neuerliche Grenzenbestimmungen in beliebiger Reihenfolge
durchgeführt werden können.

Die angewandte Transformation ist eine affine im eigentlichen Sinne.
Setzt man $F=1$, so erhält man das Volumen des Integrationsgebietes:

$$V = \frac{(\alpha_1 - \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0)(\gamma_1 - \gamma_0)}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

2. Diente bei der letzten Aufgabe die Transformation zur Erzielung vo
Rechnungsvorteilen, so soll in den nachfolgenden Beispielen gezeigt werde
wie durch simultane Substitutionen die Möglichkeit einer Reduction des vie
fachen Integrals auf einfachere Integrale herbeigeführt werden kann. Derl
Reductionen lassen sich in ziemlich allgemeiner Form erledigen, indem nich
einmal die Kenntniss der zu integrierenden Function hiezu erforderlich ist; c
genügt, wenn die Art und Weise bekannt ist, wie die Veränderlichen innerhal
der Function mit einander in Verbindung treten. Diese als bestimmt voraus

setzte Form der Argumentsverbindung möge fortan kurz mit dem Ausdrucke „Structur der Function“ bezeichnet werden.*)

Es liege vor das Doppel-Integral:

$$J = \iint F(x + y) \, dx \, dy, \quad (20)$$

treckt auf alle positiven Werte der Veränderlichen, die mit der Bedingung traglich sind:

$$0 < x + y < c.$$

Die Function F sei beliebig. Das Integral gibt das Volumen eines dreieckigen Prismas an, das nach oben von einer Cylinderfläche begrenzt ist, deren Gestalt von der Function F abhängt.

Solange F nicht bekannt ist, lässt sich selbstverständlich keine der Integrationen in der ursprünglichen Gestalt ausführen; dagegen gelingt die Zurückführung auf ein einfaches Integral leicht mit Hilfe einer Transformation. Das Genmerk bei Wahl der Transformationsgleichungen wird darauf gerichtet sein, eine der Veränderlichen aus der Verbindung mit der unbestimmten Function F zu lösen, beziehungsweise nur eine der neuen Veränderlichen in die Function eintreten zu lassen. Dies geschieht einfach, indem man die lineare Form unter dem Functionszeichen einer neuen Veränderlichen ξ gleichsetzt. Zusätzlich der Wahl der zweiten Transformationsgleichung bleibt noch Spielraum zur Befriedigung anderweitiger Anforderungen: am einfachsten ist es wohl, eine der ursprünglichen Veränderlichen direct einer neuen gleichzusetzen, dass man die Transformationsgleichungen erhält:

$$\begin{aligned} x + y &= \xi \\ y &= \eta. \end{aligned}$$

Als Functional-Determinante findet man mit Rücksicht auf Gleichung (7) dort $J=1$. Als neue Integrationsgrenzen ergeben sich unter der Voraussetzung; dass zuerst nach η , dann nach ξ integriert wird: $\eta_0=0$, $\eta_1=\xi$; $\xi_0=0$, $\xi_1=c$; mithin ist:

$$J = \int_0^c \int_0^\xi F(\xi) \, d\xi \, d\eta.$$

*) Um die Wahl dieser Bezeichnungsweise noch näher zu rechtfertigen, sei an den Ausdruck für die Masse eines Körpers erinnert, dessen Dichte durch den jeweiligen Wert der Function $F[\varphi(x, y, z)]$ gemessen wird. F sei beliebig, die Form der Argumentsverbindung sei durch die gegebene Function φ bestimmt. Setzt man φ einer Constanten gleich, so wird hiedurch eine Fläche charakterisiert, längs welcher der Körper gleichmäßig dicht ist. Folglich kann der Körper mit Rücksicht auf die Dichtenvertheilung als schichtenartiger Structur bezeichnet werden, und zwar entsprechen die Schichten der „Structur“ der Function F .

Treten in F zwei Formen von Argumentsverbindungen auf: $F[\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z)]$, so setzt man diese Formen je einer beliebigen Constanten gleich, so wird hiedurch eine Linie gekennzeichnet, längs welcher F constant ist. Der Körper wird dann — was immer eine Function auch F sei — längs der Fasern, deren Verlauf der „Structur“ der Function entspricht, gleichmäßig dicht sein.

Die Integration nach η ist ausführbar; man erhält als reducirtes Int

$$J = \int_0^c F(\xi) \xi d\xi. \quad (21)$$

Das allgemeinere Integral: $\iint F(ax + by) dx dy$ mit der Grenzbedingung: $0 < ax + by < c$ lässt sich durch die Substitutionen $x = \frac{x'}{a}$; y auf die Form (20) bringen und dann reducieren; man erhält:

$$\iint F(ax + by) dx dy = \frac{1}{ab} \int_0^c F(\xi) \xi d\xi. \\ (0 < ax + by < c)$$

Ähnlich ist der Vorgang bei der Reduction des dreifachen Integr

$$M = \iiint F(x + y + z) dx dy dz \quad (22)$$

erstreckt auf alle positiven Werte der Veränderlichen, welche der Bedingung genügen:

$$0 < x + y + z < c$$

Die Structur der unbestimmten Function F wird durch eine einzige neuen Variablen ersetzt, woraus eine Transformationsgleichung folgt; die Wahl der übrigen kann noch verschiedenen anderen Umständen Rechnung getragen werden, jedoch empfiehlt sich wegen seiner Einfachheit das System

$$\begin{aligned} x + y + z &= \xi \\ y + z &= \eta \\ z &= \zeta \end{aligned}$$

Als Functional-Determinante ergibt sich (7) $J = 1$; die Grenzen, welche zuerst nach ζ hierauf nach η und schließlich nach ξ integriert wird, sind:

$$\zeta = \begin{cases} \eta \\ 0 \end{cases}; \eta = \begin{cases} \xi \\ 0 \end{cases}; \xi = \begin{cases} c \\ 0 \end{cases}$$

folglich:

$$M = \int_0^c \int_0^\xi \int_0^\eta F(\xi) d\zeta d\eta d\xi.$$

Nach Ausführung der Integrationen in Bezug auf ζ und η ist:

$$M = \frac{1}{2} \int_0^c F(\xi) \xi^2 d\xi. \quad (23)$$

Die vollständige Ausführung hängt von der näheren Kenntnis der Function F Wäre z. B. das Integral gegeben:

$$M = \iiint e^{k(x+y+z)^2} dx dy dz, \\ (0 < x + y + z < c)$$

welchem keine der Integrationen nach den ursprünglichen Veränderlichen erschlossener Form durchführbar ist, so erhält man mit Hilfe der letzten nel leicht den vollständigen Wert:

$$M = \frac{1}{2} \int_0^c e^{k\xi^2} \xi^2 d\xi = \frac{e^{kc^2} - 1}{6k}.$$

Als Reduction des allgemeineren Integrals:

$$M_1 = \iiint F(ax + by + cz) dx dy dz \\ (0 < ax + by + cz < \gamma)$$

st sich, wenn man vorher auf die Form (22) transformiert, schließlich:

$$M_1 = \frac{1}{2abc} \int_0^\gamma F(\xi) \xi^2 d\xi.$$

Die Reductionen (20)–(21), (22)–(23) sind auch geometrisch leicht zu pretieren.

Der Vorgang lässt sich auf das n -fache Integral ausdehnen. Das n -fache

$$J = \int^n F(x_1 + x_2 + \dots + x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (24)$$

gen auf alle positiven Werte der Veränderlichen, welche der Bedingung rechnen:

$$0 < x_1 + x_2 + \dots + x_n < c$$

mit Hilfe der Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= \xi_1 \\ x_2 + \dots + x_n &= \xi_2 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n &= \xi_{n-1} \\ x_n &= \xi_n \end{aligned}$$

in einfaches Integral reduciert werden.

Die Functional-Determinante wird leicht mit Hilfe der Gleichung (7) den; es ist:

$$\Delta = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}} = 1$$

Wenn man die Reihe der Integrationen in dem transformierten Integral mit der Integration nach ξ_n beginnt und mit jener nach ξ_1 schließt, so sind die unteren Integrationsgrenzen sämtlich Null, die oberen gleich derjenigen Veränderlichen, in Bezug auf welche die nächstfolgende Integration ausgeführt wird; die letzte obere Grenze ist c . Folglich ist:

$$J = \int_0^c \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \dots \int_0^{\xi_{n-1}} F(\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \dots d\xi_n$$

Nach Ausführung der $n-1$ möglichen Integrationen erhält man:

$$J = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^c F(\xi_1) \xi_1^{n-1} d\xi_1, \quad (25)$$

womit das n -fache Integral auf ein einfaches zurückgeführt ist.)*

Für das allgemeinere Integral:

$$J_1 = \int_0^c F(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ (0 < a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n < c)$$

findet man schließlich den Wert:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n (n-1)!} \int_0^c F(\xi) \xi^{n-1} d\xi. \quad (26)$$

Ebenso für:

$$\int_0^c F[a_1 x_1^m + a_2 x_2^m + \dots + a_n x_n^m] x_1^{m-1} \dots x_n^{m-1} dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{a_1 \dots a_n m^n (n-1)!} \int_0^c F(\xi) \xi^{n-1} d\xi. \\ (0 < a_1 x_1^m + \dots + a_n x_n^m < c)$$

Beide Reductionen werden vollzogen, wenn man zuerst durch leicht ersichtliche Substitutionen die Form (24) herstellt u. s. f. —

Das dreifache Integral:

$$M = \iiint \frac{F(x+y+z)}{(ax+by+cz)^m} dx dy dz \quad (28)$$

erstreckt auf alle positiven Werte der Veränderlichen, welche der Bedingungen entsprechen:

$$0 < x + y + z < h,$$

enthält neben der unbestimmten Function F noch eine bestimmte Function G der drei Veränderlichen.

*) Dieses Resultat steht im Einklange mit einer von Liouville angegebenen Formel, bei welcher das mehrfache Integral eines ähnlich gebauten Ausdrucks durch Gammafunctionen ausgedrückt wird.

Dasselbe lässt sich nach ganz analogem Vorgang und durch die gleichen Substitutionen wie beim Beispiele (22) auf ein einfaches Integral zurückführen. Man erhält zunächst nach Substitution der neuen Veränderlichen:

$$M = \int_0^h \int_0^\xi \int_0^\gamma \frac{F(\xi) d\xi d\gamma dz}{[\alpha\xi + (\beta-\alpha)\gamma + (\gamma-\beta)\zeta]^m}.$$

Nach Durchführung der Integrationen in Bezug auf ζ und γ ergibt sich die symmetrische Schlussformel:

$$M = \frac{1}{(m-1)(m-2)} \left[\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \alpha^{m-2} + \frac{1}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} \beta^{m-2} + \frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \gamma^{m-2} \right] \times \\ \times \int_0^h \frac{F(\xi) d\xi}{\xi^{m-2}} \quad (29)$$

Für $m = 0$ kommen wieder die Formeln (22) — (23) zum Vorschein. Ebenso findet man für das Integral:

$$M_1 = \iiint \frac{F(x+y+z) dx dy dz}{(1+\alpha x + \beta y + \gamma z)^m}$$

erstreckt auf alle positiven x, y, z von der Bedingung:

$$0 < x + y + z < h$$

auf Grund der gleichen Substitutionen nach einfacher Rechnung die Reduction:

$$M_1 = \frac{1}{(m-1)(m-2)} \left[\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \int_0^h \frac{F(\xi) d\xi}{(1+\alpha\xi)^{m-2}} + \frac{1}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} \int_0^h \frac{F(\xi) d\xi}{(1+\beta\xi)^{m-2}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \int_0^h \frac{F(\xi) d\xi}{(1+\gamma\xi)^{m-2}} \right]^* \quad (30)$$

Auch diese Integralformen lassen sich mit den zugehörigen Reductionen leicht auf mehr als 3 Veränderliche ausdehnen.

3. Es liege vor das Doppel-Integral:

$$V = \iint F\left(\frac{y}{x}\right) dx dy \quad (31)$$

bezogen auf ein Integrationsgebiet, das durch die Bedingung gegeben ist:

$$0 < x^2 + y^2 < a^2.$$

Das Integral betrifft die Cubatur aller Conoide, für welche die z -Achse die Leitlinie und die xy -Ebene Richtebene ist; im vorliegenden Falle der Begrenzung die Cubatur über einer mit dem Coordinatenursprung concentrischen kreisförmigen Basis. Mit Rücksicht auf die Unbestimmtheit der Function F

*) Diese Formel stimmt mit der in Schlömilch Comp. I. p. 482 für den speciellen Fall $m = 3$ auf anderem Wege erhaltenen Reduction im wesentlichen überein.

lässt sich in der vorliegenden Form keine der Integrationen durchführen. In huf's Ausscheidung einer der Variablen aus der unbestimmten Function F w man die Structur $\frac{y}{x}$ durch eine Function einer der neuen Veränderlichen ersetzen haben; dies bietet einen Anhaltspunkt für die Wahl der ersten Transformationsgleichung. Der Spielraum, der hinsichtlich der zweiten Transformationsgleichung offen bleibt, kann zur Erfüllung der Bedingung ausgenützt werden, dass in dem neuen Integrale auch die Grenzenpaare constant werden. Bei Bedingungen werden erfüllt, wenn man nach Polarcoordinaten transformiert, demnach ist:

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi; \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi; \quad \Delta = \rho; \quad \varphi_{0,1} = \begin{cases} 2\pi \\ 0 \end{cases}; \quad \rho_{0,1} = \begin{cases} a \\ 0 \end{cases}$$

und:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^a F(\operatorname{tg} \varphi) \rho \, d\varphi \, d\rho,$$

ferner nach Ausführung der auf ρ bezüglichen Integration:

$$V = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} F(\operatorname{tg} \varphi) \, d\varphi. \quad (32)$$

Die weitere Ausführung hängt von der Beschaffenheit der Function F ab für das Schraubenconoid beispielsweise ($F = k \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$) erhalte man $V = k a^2 \pi^2$ u. s. f.

Der Vorgang bleibt im wesentlichen derselbe, wenn das Integrationsgebiet nicht durch einen Kreis, sondern anderswie begrenzt wird. Man hat diese Begrenzung in Polarcoordinaten auszudrücken und hiernach die Grenzen für ρ und φ zu bestimmen, wobei sich allerdings die Bedingung, dass die Grenzen durchaus constant seien, im allgemeinen nicht mehr wird erfüllen lassen.

Das allgemeinere Integral:

$$V = \iint F\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{a x + b y + c}\right) dx \, dy$$

kann zunächst mittelst der Substitutionen:

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma &= \xi \\ a x + b y + c &= \eta \end{aligned}$$

auf die Form (31) gebracht werden, wodurch man erhält:

$$V = \frac{1}{a\beta - b\alpha} \iint F\left(\frac{\eta}{\xi}\right) d\xi \, d\eta.$$

Hiebei ist auf die entsprechende Transformation des Integrationsgebietes Bedacht zu nehmen; die weitere Entwicklung schließt sich dem vorher ange deuteten Falle an. Zur selben Gattung gehören auch die Integrale $\iint F\left(\frac{u_1}{u_2}\right) dx \, dy$, wo u_1, u_2 binäre Formen gleichen Grades sind.

4. Das Doppel-Integral:

$$V = \iint F\left(\frac{y^2}{x}\right) dx dy \quad (33)$$

erstreckt sich über alle positiven, mit den Bedingungen:

$$0 < \frac{y^2}{x} < p, \quad 0 < x < q$$

erträglichen Werten der Veränderlichen, kann ohne nähere Kenntnis der Function F auf ein einfaches reducirt werden. Man löst eine Variable aus der Verbindung mit der unbestimmten Function F , indem man die Structur durch eine Function bloß einer der neuen Veränderlichen, am einfachsten durch η^2 ersetzt. Dies liefert die erste Transformationsgleichung; als zweite kann man unmittelbar $x = \xi$ benützen. Folglich ist:

$$x = \xi; \quad y = + \eta \sqrt{\xi}; \quad \Delta = \sqrt{\xi}; \quad \xi_{0,1} = \begin{Bmatrix} q \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \eta_{0,1} = \begin{Bmatrix} \sqrt{p} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{und:}$$

$$V = \int_0^{\sqrt{p}} \int_0^q F(\eta^2) \sqrt{\xi} d\eta d\xi,$$

erner nach Ausführung der Integration in Bezug auf ξ :

$$V = \frac{2}{3} q \sqrt{q} \int_0^{\sqrt{p}} F(\eta^2) d\eta. \quad (34)$$

Geometrisch aufgefasst bezeichnet das Integral das Volumen eines halben parabolischen Cylinders mit in der xy -Ebene liegender Basis, welcher nach oben von einer Fläche begrenzt wird, deren Horizontalschnitte sämtlich Parabeln mit den Scheiteln in der z -Achse und den Achsen in der xz -Ebene sind.

Auf die Grundform (33) lässt sich das allgemeinere Integral:

$$J = \iint F\left[\frac{ax + \beta y + \gamma}{ax + by + c}\right] dx dy$$

mittels leicht ersichtlicher Substitutionen zurückführen und in ähnlicher Weise auf ein einfaches reducieren.

5. Bereits früher (III) wurde die Reduction des dreifachen Integrals:

$$M = \iiint F(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \quad (17)$$

verhelführt. Es erwies sich hiezu die Transformation nach räumlichen Polar-ordinaten als geeignet, indem diese die Structur der Function F in eine solche mit bloß einer Veränderlichen verwandeln. Für das etwas allgemeinere Integral:

$$M_1 = \iiint F\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx dy dz \quad (35)$$

erstreckt auf alle Werte der Veränderlichen, die der Bedingung genügen:

$$0 < \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < r^2,$$

lassen sich dieselben Transformationsgleichungen, nur der Reihe nach mit a , b multipliciert, benützen.

Man findet für $x = a \varrho \sin \vartheta \cos \varphi$, $y = b \varrho \sin \vartheta \sin \varphi$, $z = c \varrho \cos \vartheta$:

$$M_1 = 4 a b c \pi \int_0^r F(\varrho^2) \varrho^2 d\varrho. \quad (36)$$

Zur gleichen Gattung gehört das noch allgemeinere Integral:

$$M_2 = \iiint F(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2) dx dy dz, \quad (37)$$

bezogen auf ein Integrationsgebiet, das durch die Bedingung gegeben ist:

$$0 < a_{11}x^2 + \dots + a_{33}z^2 < r^2.$$

Wenn angenommen wird, dass die in der Structur erscheinende quadratische Form eine ordinäre und definite ist, d. h. wenn ihre Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, und wenn die Form im Bereiche der reellen Zahlen in Zeichen nicht zu wechseln vermag (Gauß, Disqu. arith. 271), so ist immer die Zurückführung des vorgelegten Integrals auf das Stamm-Integral (17) möglich. Unter den gemachten Voraussetzungen, — für welche auch vermöge der eingezeichneten Grenzbedingung das Integrationsgebiet vollkommen geschlossen erscheint, — lässt sich nämlich die quadratische Form auf unzählige Art durch die Summe dreier Quadrate darstellen. Bezeichnet man zur Abkürzung die Form mit u , ihre Determinante mit D und die Adjuncten der Glieder a_{23} , a_{33} beziehungsweise mit α_{23} , α_{33} , so wäre eine von diesen Darstellungen:

$$u = \left[\frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z}{\sqrt{a_{11}}} \right]^2 + \left[\frac{\alpha_{23}y - \alpha_{33}z}{\sqrt{a_{11}\alpha_{33}}} \right]^2 + \left[\sqrt{\frac{D}{\alpha_{33}}} z \right]^2.$$

Dem Coefficienten a_{11} kann stets das positive Zeichen ertheilt werden, da die Form definit, wenn dann auch α_{33} und D positiv sind.

Diese Darstellung wird zur Bildung der Transformationsgleichungen benützt für das System:

$$\frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z}{\sqrt{a_{11}}} = \xi$$

$$\frac{\alpha_{23}y - \alpha_{33}z}{\sqrt{a_{11}\alpha_{33}}} = \eta$$

$$\sqrt{\frac{D}{\alpha_{33}}} z = \zeta$$

d:

$$u = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2; \quad \Delta = \frac{1}{\sqrt{D}}$$

1:

$$M_2 = \frac{1}{\sqrt{D}} \iiint F(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) d\xi d\eta d\zeta.$$

$$\left\{ 0 < \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < r^2 \right\}$$

Die weitere Transformation und Reduction erfolgt wie früher gezeigt; es ist:

$$M_2 = \frac{4\pi}{\sqrt{D}} \int_0^r F(\rho^2) \rho^2 d\rho. \quad (38)$$

So findet man z. B. für das dreifache Integral:

$$\iiint F(2x^2 + 2xy + 10xz + 3y^2 + 8yz + 20z^2) dx dy dz$$

$$\left\{ 0 < 2x^2 + 2xy + \dots + 20z^2 < r^2 \right\}$$

den Substitutionen:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (2x + y + 5z) = \xi = \rho \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}} (5y + 3z) = \eta = \rho \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$\sqrt{\frac{33}{5}} z = \zeta = \rho \cos \vartheta$$

Reduction:

$$\frac{4\pi}{\sqrt{33}} \int_0^r F(\rho^2) \rho^2 d\rho.$$

Enthält die Structur neben den quadratischen Gliedern auch solche erster Dimension, so genügt bekanntlich eine bloße Verschiebung der Veränderlichen reellen Zahlengebiete, um die rein quadratische Form herzustellen; das Ergebnis der Reduction selbst wird hievon nicht berührt.

Im Sinne der Mechanik interpretiert, drückt das Integral die Masse eines beliebig liegenden ellipsoidischen Körpers aus, dessen Dichte nach Schichten wechselt, die mit der Begrenzung ähnlich und ähnlich gelegen sind. Der Transformation der Form auf die Summe dreier Quadrate entspricht das Beziehen Ellipsoide auf drei conjugierte Durchmesser.

6. Es liege das vierfache Integral zur Reduction vor:

$$J = \iiint\int F(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) dx dy dz dw, \quad (39)$$

streckt über alle Werte der Veränderlichen, welche der Bedingung genügen:

$$0 < x^2 + y^2 + z^2 + w^2 < r^2.$$

Die Transformationsgleichungen werden so zu wählen sein, dass die geformte Structur bloß eine der neuen Veränderlichen enthält. Da das gegebene Problem analog ist mit den bereits früher behandelten Fällen, wo die Structur aus der Quadratsumme zweier und dreier Veränderlicher bestand und wo die Einführung von Polarcoordinaten zum Ziele führte, so liegt die Vermuthung nahe, dass sich beim vorliegenden Integrale durch analog gebildete Substitutionen ein gleicher Zweck werde erreichen lassen. In der That bietet die Transformation nach Polarcoordinaten bereits den Keim für die Bildung jener Substitutionen in sich, welche die auf mehr Veränderliche erstreckte Structur in gleicher Weise reducieren: so wie man von den Transformationsgleichungen für ebene Polarcoordinaten

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi$$

zu den räumlichen Polarcoordinaten übergeht, indem man in diesen Gleichungen rechts den Factor $\sin \vartheta$ anschließt und die weitere Gleichung: $z = \rho \cos \vartheta$ hinzufügt, so erhebt man sich wieder von diesen zu den vierdimensionalen, indem man an den vorhandenen Kern den Factor $\sin \psi$ anschließt und die neue Gleichung: $w = \rho \cos \psi$ hinzutreten lässt. Die so gebildeten Transformationsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \sin \vartheta \sin \psi \\ y &= \rho \sin \varphi \sin \vartheta \sin \psi \\ z &= \rho \cos \vartheta \sin \psi \\ w &= \rho \cos \psi \end{aligned} \quad (40)$$

hiefür wird:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \rho^2,$$

und die Functional-Determinante:

$$\Delta = + \rho^3 \sin \vartheta \sin^2 \psi.$$

Das Integrationsgebiet wird vollständig erschöpft, wenn man $\rho, \varphi, \vartheta, \psi$ zwischen den Grenzen variieren lässt:

$$\rho_{0,1} = \begin{Bmatrix} r \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \varphi_{0,1} = \begin{Bmatrix} 2\pi \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \vartheta_{0,1} = \begin{Bmatrix} \pi \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \psi_{0,1} = \begin{Bmatrix} \pi \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Hiefür bleibt auch die Functional-Determinante gleichbezeichnet. Das transformierte Integral wird:

$$J = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi F(\rho^2) \rho^3 \sin \vartheta \sin^2 \psi \, d\varphi \, d\vartheta \, d\psi \, d\rho,$$

und nach Ausführung der hiedurch ermöglichten Integrationen in Bezug auf φ, ϑ, ψ :

$$J = 2\pi^2 \int_0^r F(\rho^2) \rho^3 \, d\rho. \quad (41)$$

Dies Verfahren lässt sich nun leicht auf beliebig viele Veränderliche ausdehnen. Für das n -fache Integral:

$$J_n = \int F(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (42)$$

erstreckt auf ein Gebiet, das der Bedingung entspricht:

$$0 < x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < r^2,$$

werden die Transformationsgleichungen in der gezeigten Art auf Grund der Transformationen nach Polarcoordinaten successive aufgebaut: man erhält das Schema für $m+1$ Variable aus jenem für m Variable, wenn man rechts mit dem Sinus des neu einzuführenden Winkels φ_m multipliciert und die Gleichung: $x_{m+1} = \rho \cos \varphi_m$ hinzutreten lässt. Etwas übersichtlicher noch wird das Schema, wenn man darin x_1 mit x_2 vertauscht hat; es lautet für n Variable:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \dots \sin \varphi_{n-1} \\ x_2 &= \rho \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \dots \sin \varphi_{n-1} \\ x_3 &= \rho \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \dots \sin \varphi_{n-1} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \rho \cos \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1} \\ x_n &= \rho \cos \varphi_{n-1}. \end{aligned}$$

Die Form $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ verwandelt sich hiefür in ρ^2 .

Die Functional-Determinante des Systems lässt sich ebenfalls leicht durch Schluss von m auf $m+1$ bilden. Entwickelt man nämlich die Determinante für $m+1$ Variable Δ_{m+1} nach den Gliedern der letzten Zeile, von denen bloß die erste und letzte von Null verschieden ist, so findet man, dass jede der gehörigen Unterdeterminanten — und somit auch die zu suchende Determinante selbst — der Functional-Determinante in Bezug auf m Variable proportional ist; der Factor, welcher zu Δ_m hinzugefügt werden muß, um Δ_{m+1} zu erhalten, ist $-\rho \sin^{m-1} \varphi_m$.

Folglich ist die Determinante des gegebenen Systems:

$$\Delta = (-1)^{n-1} \rho^{n-1} \sin \varphi_2 \sin^2 \varphi_3 \sin^3 \varphi_4 \dots \sin^{n-2} \varphi_{n-1}.$$

Die Functional-Determinanten sind abwechselnd positiv und negativ; für die Transformation kommt nur deren absoluter Wert in Betracht.

Mit Rücksicht auf die ursprüngliche Grenzbedingung ergeben sich für ρ die Grenzen 0 und r , für φ_1 die Grenzen 0 und 2π , für die übrigen Winkel durch φ_2 0 und π ; dabei bleibt die Functional-Determinante zeichenbeständig.

Mithin lautet das transformierte Integral:

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^\pi \sin \varphi_2 d\varphi_2 \int_0^\pi \sin^2 \varphi_3 d\varphi_3 \dots \int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi_{n-1} d\varphi_{n-1} \int_0^r F(\rho^2) \rho^{n-1} d\rho \quad (43)$$

Die $n-1$ ersten Integrationen lassen sich ausführen.

Weil bekanntlich:

$$\int_0^{\pi} \sin^{2m} \varphi \, d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} \pi \quad \text{und} \quad \int_0^{\pi} \sin^{2m+1} \varphi \, d\varphi = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2m+1)}.$$

so findet man für ein gerades n :

$$J_n = 2\pi \times 2 \cdot \frac{1}{2} \pi \times \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \pi \times \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot 2 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \pi \times \dots \times \frac{2 \cdot 4 \dots (n-4)}{3 \cdot 5 \dots (n-3)} \cdot 2 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n-2)} \\ \times \int_0^r F(\rho^2) \rho^{n-1} \, d\rho$$

oder:

$$J_n = \frac{2 \pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2}-1)!} \int_0^r F(\rho^2) \rho^{n-1} \, d\rho \quad (44)$$

und für ein ungerades n :

$$J_n = 2\pi \cdot 2 \times \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \times \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \pi \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot 2 \times \dots \times \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-4)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n-3)} \pi \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n-3)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (n-2)} \cdot 2 \cdot \int_0^r F(\rho^2) \rho^{n-1} \, d\rho$$

oder:

$$J_n = \frac{2 (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-4) (n-2)} \int_0^r F(\rho^2) \rho^{n-1} \, d\rho \quad (45)$$

Durch Specialisierung von F können aus diesen Resultaten mannigfaltige Formeln abgeleitet werden. Für $F=1$ beispielsweise erhält man, je nach n gerade oder ungerade ist:

$$J_{2m} = \frac{\pi^m}{m!} r^{2m} \quad \text{und} \quad J_{2m+1} = \frac{2 (2\pi)^m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+1)} r^{2m+1}.$$

Die Formeln enthalten jene für die Quadratur des Kreises und die Cubatur der Kugel als Specialfälle in sich.

Ferner für $F = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}}$ ergeben sich je nach geradem oder ungeradem n :

$$J_{2m} = \frac{\pi^m}{(m-1)!} \frac{r^{2m-1}}{2m-1}; \quad J_{2m+1} = \frac{2 (2\pi)^m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)} \frac{r^{2m}}{2m} \quad *)$$

Auf die Form des n -fachen Integrals (42) und die zugehörige Reduktion lässt sich eine Reihe noch allgemeinerer Integrale zurückführen. Der Fall, in dem die in der Structur auftretenden Quadrate bloß mit constanten Factoren behaftet erscheinen, möge hier übergangen und sogleich zur Betrachtung jener Gattung

*) Vergl. Jacobi „De binis quibuslibet functionibus homogeneis etc.“ Crelle Journ. 12, p. 56 u. ff.

on Integralen geschritten werden, in denen die Structur der Function aus einer beliebigen ordinären, definiten quadratischen Form zusammengesetzt ist.

In dem n -fachen Integrale:

$$S_n = \int^n F[\Sigma a_{ik} x_i x_k] dx_1 \dots dx_n \quad (46)$$

bezogen auf alle Werte der Veränderlichen, die der Bedingung genügen:

$$0 < \Sigma a_{ik} x_i x_k < r^2$$

bedeute $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ eine ordinäre definite quadratische Form der n Veränderlichen $x_1 \dots x_n$; bei dieser Voraussetzung ist auch das durch die angeführte Bedingung gegebene Integrationsgebiet vollkommen geschlossen.

Um das vorliegende Integral zunächst in das Stamm-Integral (42) zu überführen, hat man zu berücksichtigen, dass sich jede ordinäre definite quadratische Form von n Variablen durch die Summe der Quadrate von n linearen aggregaten der Veränderlichen darstellen lässt*); diese linearen Ausdrücke, der Reihe nach den neuen Veränderlichen $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ gleichgesetzt, liefern die erforderlichen Transformationsgleichungen. Obzwar nun die Bildung derselben auf dem von Gauss angegebenen Wege keiner Schwierigkeit unterläge, so ist doch deren Aufstellung nicht einmal nothwendig, außer es würden anderweitige Grenzbedingungen als die gegebene deren Entwicklung erfordern. Im vorliegenden Falle genügt die Kenntnis der Functional-Determinante der x in Bezug auf ξ .

Einem Satze von Hesse zufolge**) ist, wenn eine quadratische Form $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ mittelst linearer Transformationen in eine andere Form $\Sigma \alpha_{ik} \xi_i \xi_k$ überführt wird, die Determinante der transformierten Form gleich der Determinante der ursprünglichen Form, multipliciert mit dem Quadrate der Functional-Determinante der x in Bezug auf ξ . Bei der im gegebenen Falle beabsichtigten Transformation ist die transformierte Form:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2;$$

Die Determinante dieser Form ist $+1$. Bezeichnet man die Determinante der ursprünglichen Form $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ kurz mit D und die Functional-Determinante der x in Bezug auf ξ mit Δ , so ist nach dem Hesse'schen Satze:

$$1 = D \cdot \Delta^2 \quad \text{und} \quad \Delta = \frac{1}{\sqrt{D}}.$$

Mithin geht das allgemeine Integral (46) über in:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{D}} \int^n F(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n \quad (47)$$

$$0 < \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 < r^2$$

*) Gauss, Disqu. arith. 271; Lagrange, Mécanique t. 1. III.

**) Hesse, Crelle J. 28. p. 89.

Hiermit ist die Grundform des Integrals (42) erreicht; die weitere Reduction erfolgt wie dort, es ist für ein gerades n :

$$S_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}-1\right)! \sqrt{D}} \int_0^r F(\rho^2) \rho^{n-1} d\rho \quad (48)$$

und für ein ungerades n :

$$S_n = \frac{2(2\pi)^{\frac{n-2}{2}}}{1.3.5\dots(n-2)\sqrt{D}} \int_0^r F(\rho^2) \rho^{n-1} d\rho. \quad (49)$$

Die gleiche Reduction kommt zum Vorschein, wenn in dem Integrale (42) zur quadratischen Form u noch lineare Glieder hinzutreten, zu deren Verschaffung bekanntlich eine bloße Verschiebung der Veränderlichen im reellen Zahlengebietes genügt.

7. Es liege vor das Doppel-Integral:

$$J = \iint F(x^a + y^b) dx dy \quad (50)$$

bezogen auf alle positiven, mit der Bedingung

$$0 < x^a + y^b < r^2$$

verträglichen Werte der Veränderlichen.

Behufs Ausscheidung einer der Variablen aus der unbestimmten Function dient die Substitution:

$$x^{\frac{a}{2}} = \rho \cos \varphi; \quad y^{\frac{b}{2}} = \rho \sin \varphi.$$

Hiefür wird: $x^a + y^b = \rho^2$: die neuen Grenzen nach φ und ρ sind beziehungsweise 0 und $\frac{\pi}{2}$, 0 und r . Die ihrem Kriterium innerhalb des Integrationsgebietes genügende Functional-Determinante ist:

$$\Delta = \frac{4}{ab} \rho^{\frac{2}{a} + \frac{2}{b} - 1} \cos^{\frac{2}{a} - 1} \varphi \sin^{\frac{2}{b} - 1} \varphi.$$

Mithin wird das transformierte Integral:

$$J = \frac{4}{ab} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{a} - 1} \varphi \sin^{\frac{2}{b} - 1} \varphi d\varphi \int_0^r F(\rho^2) \rho^{\frac{2}{a} + \frac{2}{b} - 1} d\rho.$$

Zufolge der bekannten Relation:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{a} - 1} \varphi \sin^{\frac{2}{b} - 1} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right) \Gamma\left(\frac{1}{b}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$$

in B , Γ Euler'sche Beta- und Gamma-Functionen bedeuten, reducirt sich
s Integral auf:

$$J = \frac{2}{ab} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right) \Gamma\left(\frac{1}{b}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \int_0^r F(\rho^2) \rho^{\frac{2}{a}-1} \rho^{\frac{2}{b}-1} d\rho$$

1 weil $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(1+\alpha)$:

$$J = 2 \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \int_0^r F(\rho^2) \rho^{\frac{2}{a} + \frac{2}{b} - 1} d\rho. \quad (51)$$

Das Verfahren lässt sich auf das n -fache Integral ausdehnen; man findet für

$$J_n = \int_0^r F(x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + \dots + x_n^{a_n}) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

treckt auf alle positiven, der Bedingung $0 < x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + \dots + x_n^{a_n} < r^2$
sprechenden Werte die Reduction:

$$= 2 \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \Gamma\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)} \int_0^r F(\rho^2) \rho^{\frac{2}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \dots + \frac{2}{a_n} - 1} d\rho^* \quad (52)$$

Setzt man in dieser Formel $x_i^{a_i} = y$ und $\frac{1}{a_i} = \alpha_i$, so gelangt man zu der
er in einer Anmerkung erwähnten Liouville'schen Gleichung.

8. Es liege vor das Doppel-Integral:

$$V = \iint F\left(\frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^2 - y^2}\right) dx dy, \quad (53)$$

treckt auf alle positiven Werte der Veränderlichen, welche die Bedingung
bedingen:

$$0 < \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^2 - y^2} < a^2.$$

Das Integral betrifft die Cubatur einer Fläche, welche von horizontalen
nen nach Lemniscaten geschnitten wird, über einem Lemniscaten-Quadranten
Basis. Bei der Transformation nach Polarcoordinaten würde die Structur der
ction F in $\frac{\rho^2}{\cos 2\varphi}$ verwandelt; damit nun die Structur durch eine einzige
neuen Veränderlichen ausgedrückt werde, multipliciert man in den Trans-
nationsgleichungen für Polarcoordinaten die Variable ρ noch mit $\sqrt{\cos 2\varphi}$.
hin sind die Substitutionen:

$$x = \rho \sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi; \quad y = \rho \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi;$$

n wird

$$\frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^2 - y^2} = \rho^2.$$

*) Raabe, Crelle J. 28.

Die neuen Grenzen nach ϱ und φ sind beziehungsweise 0, a und 0, als Functional-Determinante ergibt sich: $\Delta = \varrho \cos 2\varphi$. Das transformirte Integral lautet:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \, d\varphi \int_0^a F(\varrho^2) \varrho \, d\varrho,$$

oder, wenn man das erste Integral ausführt und im zweiten $\varrho^2 = t$ setzt:

$$V = \frac{1}{4} \int_0^{a^2} F(t) \, dt. \quad (54)$$

Das über die ganze Lemniscate: $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$ erstere Integral wäre:

$$V_1 = \int_0^{a^2} F(t) \, dt$$

Diese Reduction kann wieder als Typus für die Transformation und Reduction einer Reihe allgemeinerer, zur gleichen Gattung gehöriger Integrale gelten.

9. In den bisherigen Beispielen wurde angenommen, dass die Structur unbestimmten Function F eine eintheilige sei, d. h. nur aus einer bestimmten Functionsform bestehe. Ist die Structur mehrtheilig, treten darin mehrere wesentlich verschiedene Functionsformen auf, deren Verknüpfung untereinander zufolge der Unbestimmtheit der Function F eine beliebige ist, so müssen die transformierte Structur auch entsprechend mehr der neuen Veränderlichen aufgenommen werden; sonach ist die Reduction des vielfachen Integrals einer unbestimmten Function mit k -theiliger Structur höchstens auf ein k -faches möglich.

So kann z. B. das vierfache Integral

$$J = \iiint \int F(x^2 + y^2 + z^2 + w^2, w) \, dx \, dy \, dz \, dw, \quad (55)$$

erstreckt auf alle mit den Bedingungen:

$$0 < x^2 + y^2 + z^2 + w^2 < r^2, \quad a < w < b$$

verträglichen Werte der Veränderlichen, in welchem die Structur aus verschiedenen Functionsformen besteht, so lange F unbestimmt bleibt, höchstens auf ein Doppel-Integral reducirt werden; denn die Structur lässt sich nicht auf weniger als zwei der neuen Veränderlichen darstellen.

Da der zweite Theil der Structur ohnehin die möglichst einfache Gestalt besitzt, so ist es überflüssig, an Stelle von w eine neue Veränderliche einzuführen; die Transformation wird sich nur auf den ersten Theil der Structur

beziehungen haben, wofür sich aus ersichtlichen Gründen die räumlichen Polar-
ordinaten als geeignet darbieten. Die Transformationsgleichungen lauten daher:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \vartheta \cos \varphi & z &= \rho \cos \vartheta \\ y &= \rho \sin \vartheta \sin \varphi & w &= \rho. \end{aligned}$$

Die Grenzen nach φ, ϑ, w sind beziehungsweise $0, \sqrt{r^2 - w^2}; 0, 2\pi; 0, \pi$
und a, b . Die positiv genommene Functional-Determinante ist $\rho^2 \sin \vartheta$, folglich
wird das transformierte Integral:

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{r^2 - w^2}} \sin \vartheta d\vartheta \int_a^b \int_0^{\sqrt{r^2 - w^2}} F(\rho^2 + w^2, w) \rho^2 dw d\rho$$

und nach Ausführung der möglichen Integrationen:

$$J = 4\pi \int_a^b \int_0^{\sqrt{r^2 - w^2}} F(\rho^2 + w^2, w) \rho^2 dw d\rho. \quad (56)$$

Eine gleiche Reduction besitzt das allgemeinere auf eine analoge Be-
ziehung erstreckte Integral:

$$S = \iiint \iiint F(x^2 + y^2 + z^2 + w^2, \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w) dx dy dz dw.$$

Mittelst einer orthogonalen Substitution, für welche man die in der
Form auftretende lineare Form zur Bildung einer der Transformations-
gleichungen benützt, wird nämlich unmittelbar die Form (55) erreicht.

10. Die bisherigen Beispiele über die Anwendung der simultanen Sub-
stitutionen ließen sich noch um ein Bedeutendes vermehren. Unter den mannig-
fachen sonstigen Formen von Transformationen, welche den jeweiligen Zwecken
anpassen sind, wäre wegen ihrer Wichtigkeit die zuerst von Lamé benützte
Transformation nach elliptischen Coordinaten hervorzuheben, die, seither in der
Analysis vielfach angewandt, insbesondere bei Betrachtungen über Flächen
vierten Grades zu eleganten Resultaten geführt haben. Reichlichen Stoff zur
Vermehrung der Aufgaben würden auch verschiedene Probleme der mathemati-
schen Physik, so die Bestimmung von Schwerpunkten, Trägheitsmomenten,
Untersuchungen über fernwirkende Kräfte etc. darbieten. Doch mögen die bisher
geführten Beispiele, welche den Gebrauch der simultanen Substitutionen, ins-
besondere soweit dieselben eine Reduction des Integrals ermöglichen, ihren
Anspruch nach zur Anschauung brachten, genügen, und es möge nur noch
das Wesentliche derselben in allgemeiner Darstellung zusammengefasst werden.

V. Reduction des vielfachen Integrals.

1. Ist das n -fache Integral:

$$J = \int^n F[f_1, f_2, \dots, f_k] dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (57)$$

gegeben, in welchem F eine unbestimmte Function bezeichnet, während $f_1, f_2 \dots f_k$ ($k < n$) bestimmt gegebene Functionen der Veränderlichen x_1 bis x_k vorstellen, so ist im Principe durch Anwendung einer Transformation die Reduction des vorliegenden Integrals auf ein k -faches möglich.

Bei Wahl der Transformationsgleichungen ist darauf zu achten, dass die Structur der unbestimmten Function F möglichst wenig der neuen Veränderlichen eintreten; sind die Functionsformen f von einander unabhängig, ist der Eintritt von mindestens k der neuen Veränderlichen erforderlich. Mithin werden k Transformationsgleichungen nach dem Schema zu bilden sein;

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$$

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k).$$

Die noch übrigen $n - k$ Transformationsgleichungen, welche die weiteren einzuführenden Veränderlichen enthalten, dürfen beliebig gewählt werden; durch sie eröffnet sich ein Spielraum, der sich vermöge der Verfügbarkeit über die Functionsformen φ_1 bis φ_k noch erweitert, kann zur Berücksichtigung anderer weitiger Anforderungen, etwa zur Vereinfachung der Rechnung, zu leichter Bestimmung der neuen Grenzen etc. nach Thunlichkeit ausgenützt werden. Man sei allgemein:

$$\varphi_{k+1}(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n) = 0$$

$$\varphi_{k+2}(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n) = 0$$

$$\varphi_n(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n) = 0.$$

Hiemit ist das System der Transformationsgleichungen vollständig und die Abhängigkeit der ursprünglichen Variablen von den neuen hinreichend bestimmt.

Bei Bildung der Functional-Determinante Δ gewährt es häufig einen Vortheil, sich der Gleichung (6, I) zu bedienen. Das transformierte Integral lautet

$$J = \int^n F[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k] \Delta d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n.$$

Dieses Integral ist auf ein Gebiet zu erstrecken, welches aus dem ursprünglich gegebenen mit Hilfe der gewählten Transformationsgleichungen abgeleitet wird.

Der Erfolg dieser Transformation besteht darin, dass die unbestimmte Function F von den Veränderlichen $\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \dots, \xi_n$ unabhängig ist. Bei

ent man in dem Integrale die Entwicklung mit der Integration nach ξ_n und breitet bis zu jener nach ξ_{k+1} inclusive fort, so bleibt bei diesen sämtlichen Integrationen die Function F unberührt und kann deshalb vor die entsprechenden Integralzeichen gesetzt werden. Folglich ist, um dies auch in der Schreibweise sichtlich zu machen:

$$I = \int F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k) \left[\int \Delta d\xi_{k+1} d\xi_{k+2} \dots d\xi_n \right] d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_k.$$

Die in der Klammer stehenden $n - k$ Integrationen betreffen bloß die functional-Determinante Δ , also eine an sich vollkommen bestimmte Function; bei Ausführung dieser Integrationen, die man durch zweckmäßige Wahl der Transformationsgleichungen zu erleichtern trachtet, und nach Substitution der Grenzen reducirt sich der Klammerausdruck auf eine Function Φ , welche bloß die Veränderlichen ξ_1 bis ξ_k enthalten kann; damit ist auch die Reduction des ursprünglichen Integrals auf ein k -faches vollzogen. Es ist dann:

$$J = \int F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k) \Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_k. \quad (58)$$

Sind einzelne der Functionsformen f in dem ursprünglichen Integrale durch andere derselben Reihe ausdrückbar, so lässt sich eine entsprechend weiter gehende Reduction des Integrals bewerkstelligen.

Eine gleiche Reduction lässt sich auf im wesentlichen analogen Wege wirken, wenn sich an Stelle der unbestimmten Function mit k -theiliger Structur das Product von k willkürlichen Functionen mit eintheiligen Structuren unter den Integralzeichen befindet.

2. Es lässt sich nicht verkennen, dass dieses allgemein skizzierte Verfahren unter Umständen auf bedeutende Schwierigkeiten betreffs der Grenzenbestimmung stoßen kann. Ist das Integrationsgebiet der Structur der Function gemessen, wie dies bei vielen Problemen der Natur der Sache nach der Fall ist und auch bei den durchgeführten Beispielen angenommen wurde, so gestaltet sich die Grenzenbestimmung in der Regel noch verhältnismäßig leicht; dagegen complicirt sich dieselbe bedeutend, wenn die ursprüngliche Begrenzung nicht mit der Structur der Function F im Einklange steht. Es bleibt in diesen Fällen die Frage der Erwägung offen, ob dann nicht die Anwendung des sinnreichen, zuerst von Lejeune Dirichlet angegebenen Verfahrens mittelst des sogenannten „discontinuirlichen Factors“ zum Ziele führe, vermöge dessen sich die Grenzen des Integrals in beliebiger Weise bis zur nöthigen Rundung erweitern lassen, ohne dass dadurch das Integral seinen Wert ändert.

Der discontinuirliche Factor ist eine Function in Integralform, welche innerhalb gewisser, dem gegebenen Integrationsgebiete angepasster Grenzen den Wert 1 hat, außerhalb dieser Grenzen aber verschwindet. Durch Multiplication des vielfachen Integrals mit dem discontinuirlichen Factor wird verhindert, dass dasselbe trotz beliebiger Erweiterung der Grenzen andere als die innerhalb der ursprünglichen Begrenzung liegenden Elemente aufnehme.

Die einfachste Form des discontinuierlichen Factors wird durch das Integr

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} \cos(\alpha t) dt$$

dargestellt. Dieses Integral hat den Wert 1, so lange α zwischen -1 und $+1$ liegt und wird 0, wenn α diese Grenzen überschreitet. Sind nun die Grenzen des vielfachen Integrals etwa durch die Bedingung gegeben

$$a < \Theta(x_1, x_2, \dots, x_n) < b,$$

welche man leicht mittelst:

$$\frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(b-a) < \Theta(x_1, x_2, \dots, x_n) < \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)$$

in die Bedingung:

$$-1 < \frac{2\Theta - (a+b)}{b-a} < +1$$

umwandeln kann, so lassen sich in dem Integrale

$$J = \int \dots \int F(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

durch Hinzufügung des gedachten Factors die ursprünglichen Grenzen beliebig auch von $-\infty$ bis $+\infty$ erweitern, ohne dass dasselbe seinen Wert ändert; ist dann:

$$J = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) \cos\left(\frac{2\Theta - (a+b)}{b-a} t\right) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

In weiterer Verallgemeinerung des Verfahrens können auch Fourier'sche Integrale als discontinuierliche Factoren angewandt werden; man kann dann innerhalb der Integrale noch über eine willkürliche Function verfügen, welche jener Factor enthält, und diese zur Vereinfachung des Differentials benützt

Linz, im Mai 1890.

*) Winkler Crelle J. B. 54.

V FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK

UTGIFVET AF

K. SVENSKA VETENSKAPSAKADEMIEN I STOCKHOLM

BAND 4. N:o 21.

DELANDÉ FRÅN LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

BER DIE RESTGLIEDER

EINIGER FORMELN FÜR

HANISCHE QUADRATUR

VON

H. P. NIELSEN



UPPSALA & STOCKHOLM

ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

RLIN

LONDON

PARIS

DER & SOHN
STRASSE

WILLIAM WESLEY & SON
28 ESSEX STREET, STRAND

LIBRAIRIE C. KLINCKSIECK
11 RUE DE LILLE

1908

Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium.

N:o 36

ber die Restglieder einiger Formeln für mechanische Quadratur.

Von

H. P. NIELSEN.

Assistent, Kopenhagen.

ilt am 12. Februar 1908 durch K. BOHLIN und C. V. L. CHARLIER.

a dem zweiten Bande von »Die Mechanik des Himmels» Professor C. V. L. CHARLIER bemerkt der Verfasser Seite ass eine Untersuchung über das Restglied in der Reihe och nicht vorliegt, und dass eine solche Untersuchung er allergrössten Bedeutung für den praktischen Rechner ürde. — Ich werde im folgenden eine Methode für die itung dieser und ähnlicher Reihen angeben, wodurch zugleich einen Ausdruck für das Restglied bekommt.

1.

ch gehe von der NEWTON'schen Interpolationsformel mit von CAUCHY gefundenen Restglied (Oeuvres P. V. S. Formel (3), Ausgabe von 1885)

$$\left. \begin{aligned} & f(x_1) + (x-x_1)\delta^1(x_1, x_2) + (x-x_1)(x-x_2)\delta^2(x_1, x_2, x_3) + \dots \\ & + (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_{n-1})\delta^{n-1}(x_1, x_2 \dots x_n) + \\ & + (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n) \frac{f^n(u)}{n} \end{aligned} \right\} (1)$$

In dieser Formel bedeuten $f(x)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... die den Argumenten x , x_1 , x_2 , ... entsprechenden Funktions-

werte, während $\delta^1(x_1, x_2)$, $\delta^2(x_1, x_2, x_3) \dots$ die divisionen, also

$$\delta^1(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$\delta^1(x_2, x_3) = \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}$$

$$\delta^2(x_1, x_2, x_3) = \frac{\delta^1(x_1, x_2) - \delta^1(x_2, x_3)}{x_1 - x_3}$$

u. s. w.,

sind. Es ist in (1) vorausgesetzt, dass $f(x)$ und ihre Differentialquotienten in dem Intervalle reell und endlich sind, welches von dem Argumenten x, x_1, x_2, \dots genommen wird. u ist ein in diesem Intervalle Wert von x .

2.

Multipliziert man die Gleichung (1) mit $\frac{dx}{\omega}$ und man zwischen a und $a + \omega$, erhält man

$$\frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} f(x) dx = f(x_1) + A_1 \delta^1(x_1, x_2) + A_2 \delta^2(x_1, x_2, x_3) + A_{n-1} \delta^{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) + R,$$

wo

$$A_p = \frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_p) dx$$

$$R = \frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \frac{f^n(u)}{[n]} dx.$$

In dem Falle, dass $(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ Zeichen wechselt, wenn x von a bis $a + \omega$ variiert, ist nach bekannten Satz aus der Integralrechnung

$$R = \frac{f^n(u_1)}{[n]} \cdot \frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) dx = A_n$$

einer der Werte ist, den u annehmen kann, also ein
 ler in dem von den Argumenten $a, a + \omega, x_1, x_2, \dots x_n$
 ommenen Intervall liegt. Unter der genannten Be-
 g kann (2) also

$$\left. \begin{aligned} \int_a^{a+\omega} f(x) dx = & f(x_1) + A_1 \delta^1(x_1, x_2) + A_2 \delta^2(x_1, x_2, x_3) + \dots \\ & + A_{n-1} \delta^{n-1}(x_1, \dots x_n) + A_n \frac{f^n(u_1)}{\underline{n}} \end{aligned} \right\} (3)$$

eben werden.

3.

n kann jetzt zeigen, dass die Formel (9) S. 49 und
 rmeln (A), (B) und (C) S. 51 in »Die Mechanik des
 ls, II« mit zugehörigen Restgliedern spezielle Fälle
 undenen Formel (3) sind.

n die Formel (9) herzuleiten setzen wir

$$\begin{aligned} x_1 &= a + \omega \\ x_2 &= a \\ x_3 &= a - \omega \\ x_4 &= a - 2\omega \\ &\dots \dots \dots \\ x_n &= a - (n - 2)\omega. \end{aligned}$$

wir in den Ausdrücken für die dividirten Differenzen
 Verte ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta^1(x_1, x_2) &= \frac{f(a + \omega) - f(a)}{\omega} = \frac{1}{\omega} f_0^I(a + \tfrac{1}{2}\omega) \\ \delta^1(x_2, x_3) &= \frac{f(a) - f(a - \omega)}{\omega} = \frac{1}{\omega} f_0^I(a - \tfrac{1}{2}\omega) \\ &\dots \dots \dots \\ \delta^2(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\delta^1(x_1, x_2) - \delta^1(x_2, x_3)}{2\omega} = \frac{1}{\omega^2} \underline{2} f_0^{II}(a), \\ \delta^3(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{1}{\omega^3} \underline{3} f_0^{III}(a - \tfrac{1}{2}\omega), \\ &\dots \dots \dots \\ \delta^{n-1}(x_1, x_2 \dots x_n) &= \frac{1}{\omega^{n-1}} \underline{n-1} f_0^{(n-1)}(a - \frac{n-3}{2}\omega). \end{aligned}$$

Die Bedingung im Artikel (3) ist genügt, und (3) gibt dann, wenn man zugleich $A_p = \omega^p \lfloor p \cdot B_p$ s

$$\frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} f(x) dx = f(a + \omega) + B_1 f_0^{\text{I}}(a + \tfrac{1}{2}\omega) + B_2 f_0^{\text{II}}(a) \\ + B_3 f_0^{\text{III}}(a - \tfrac{1}{2}\omega) + \dots + B_{n-1} f_0^{(n-1)}(a - \tfrac{n-3}{2}\omega) + B_n \omega^n$$

wo

$$B_p = \frac{1}{\omega^p \lfloor p} \cdot \frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} (x-a-\omega)(x-a)(x-a+\omega) \dots \\ (x-a+(p-2)\omega) dx$$

und

$$a - (n-2)\omega < u_1 < a + \omega \dots$$

Führt man die Substitution $x = a + \omega z$ ein, wi

$$B_p = \frac{1}{\lfloor p} \int_0^1 (z-1)z(z+1)(z+2)\dots(z+p-2)$$

simplifiziert. Das Restglied kann infolge (6)

$$B_n \omega^n f^n(a + \omega - \mathcal{J}(n-1)\omega) \dots$$

geschrieben werden, wo \mathcal{J} positiv und kleiner als 1

Die Formel (4) ist mit der Formel (9) S. 4 Mechanik des Himmels, II» identisch. Die Koeffizienten mittelst (7) besonders leicht berechnet. Die ersten werden

$$B_1 = \int_0^1 (z-1) dz = -\tfrac{1}{2},$$

$$B_2 = \frac{1}{\lfloor 2} \int_0^1 (z^2 - z) dz = -\tfrac{1}{12}$$

$$B_3 = \frac{1}{\lfloor 3} \int_0^1 (z^3 - z) dz = -\tfrac{1}{24}$$

$$B_4 = \frac{1}{\lfloor 4} \int_0^1 (z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z) dz = -\tfrac{19}{720}$$

$$B_5 = \int_0^1 (z^5 + 5z^4 + 5z^3 - 5z^2 - 6z) dz = -\frac{3}{160}$$

$$B_6 = \int_0^1 (z^6 + 9z^5 + 25z^4 + 15z^3 - 26z^2 - 24z) dz$$

$$= -\frac{863}{60480}.$$

lt man z. B. in der Formel (4) $n = 6$, bekommt man

$$x=f(a+\omega)-\frac{1}{2}f_0^I(a+\frac{1}{2}\omega)-\frac{1}{12}f_0^{II}(a)-\frac{1}{24}f_0^{III}(a-\frac{1}{2}\omega)$$

$$(a-\omega)-\frac{3}{160}f_0^V(a-\frac{3}{2}\omega)-\frac{863}{60480}\omega^6f^6(a+\omega-9\cdot5\omega).$$

4.

hnlicher Weise wird die Formel (A) in »Die Mechanik
nels» hergeleitet, wenn man

$$x_1 = a$$

$$x_2 = a + \omega$$

$$x_3 = a + 2\omega$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_n = a + (n-1)\omega$$

ie dividirten Differenzen werden dann

$$\delta^1(x_1, x_2) = \frac{f(a+\omega)-f(a)}{\omega} = \frac{1}{\omega}f_0^I(a+\frac{1}{2}\omega)$$

$$\delta^2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\omega^2}\frac{1}{2}f_0^{II}(a+\omega)$$

$$\delta^3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{\omega^3}\frac{1}{3}f_0^{III}(a+\frac{3}{2}\omega)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\delta^{n-1}(x_1, x_2 \dots x_n) = \frac{1}{\omega^{n-1}}\frac{1}{n-1}f_0^{(n-1)}(a+\frac{n-1}{2}\omega).$$

der Formel (3) bekommt man dann, wenn $A_p = \omega^p \underline{p} \cdot C_p$
wird,

$$\frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} f(x) dx = f(a) + C_1 f_0^{\text{I}}(a + \tfrac{1}{2}\omega) + C_2 f_0^{\text{II}}(a + \omega) \\ + C_{n-1} f_0^{(n-1)}(a + \tfrac{n-1}{2}\omega) + C_n \omega^n f^n(u_1)$$

wo

$$C_p = \frac{1}{\omega^p \underline{p}} \cdot \frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} (x-a)(x-a-\omega)(x-a-2\omega) \dots \\ (x-a-(p-1)\omega) dx \\ = \frac{1}{\underline{p}} \int_0^1 z(z-1)(z-2)(z-3) \dots (z-p+1) dz$$

und

$$a < u_1 < a + (n-1)\omega.$$

Das Restglied kann also

$$C_n \omega^n f^n(a + \vartheta(n-1)\omega) \dots \dots \dots$$

geschrieben werden, wo $0 < \vartheta < 1$.

Die Formel (9) ist mit der Formel (A) in »Die Mechanik des Himmels« identisch. Die Koeffizienten können immer berechnet werden; diese Arbeit kann man aber hier nicht machen da

$$C_p = (-1)^p \cdot B_p.$$

Setzt man nämlich in (10) $z = 1 - y$, bekommt man

$$C_p = \frac{(-1)^p}{\underline{p}} \int_0^1 (y-1)y(y+1) \dots (y+p-2) dy = (-1)^p \frac{1}{\underline{p}} \int_0^1 (1-y)y(y-1) \dots (y-p+1) dy$$

Also ist für $n = 6$

$$\frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} f(x) dx = f(a) + \tfrac{1}{2} f_0^{\text{I}}(a + \tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{1}{12} f_0^{\text{II}}(a + \omega) + \tfrac{1}{24} f_0^{\text{III}}(a + 2\omega) \\ - \tfrac{1}{720} f_0^{\text{IV}}(a + 3\omega) + \tfrac{1}{1680} f_0^{\text{V}}(a + \tfrac{5}{2}\omega) - \tfrac{1}{60480} \omega^6 f^6(a + 3\omega)$$

5.

Die Formel (B) in »Die Mechanik des Himmels« ist identisch mit (3) wenn man in (3)

$$\begin{aligned} x_1 &= a \\ x_2 &= a - \omega \\ x_3 &= a - 2 \omega \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= a - (n - 1) \omega \\ A_p &= \omega^p \lfloor p \cdot D_p \end{aligned}$$

hierdurch findet man

$$\left. \begin{aligned} f(x) dx &= f(a) + D_1 f_0^I(a - \tfrac{1}{2} \omega) + D_2 f_0^{II}(a - \omega) + \dots \\ &+ D_{n-1} f_0^{(n-1)}(a - \tfrac{n-1}{2} \omega) + D_n \omega^n f^n(u_1), \end{aligned} \right\} (12)$$

$$\left. \begin{aligned} &\cdot \frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} (x-a)(x-a+\omega)(x-a+2\omega) \dots (x-a+(p-1)\omega) dx \\ &= \frac{1}{\lfloor p \rfloor} \int_0^1 z(z+1)(z+2) \dots (z+p-1) dz \end{aligned} \right\} (13)$$

$$a - (n - 1) \omega < u_1 < a + \omega$$

glied kann

$$D_n \omega^n f^n(a + \omega - \mathfrak{J} \cdot n \omega) \dots\dots\dots (14)$$

en werden.
die ersten Werte der Koeffizienten bekommt man
3)

$$\begin{aligned} D_1 &= \int_0^1 z dz = \tfrac{1}{2} \\ D_2 &= \frac{1}{\lfloor 2 \rfloor} \int_0^1 (z^2 + z) dz = \tfrac{5}{12} \\ D_3 &= \frac{1}{\lfloor 3 \rfloor} \int_0^1 (z^3 + 3z^2 + 2z) dz = \tfrac{3}{8} \end{aligned}$$

$$D_4 = \frac{1}{\underline{4}} \int_0^1 (z^4 + 6z^3 + 11z^2 + 6z) dz = \frac{2}{7} \frac{5}{2} \frac{1}{0}$$

$$D_5 = \frac{1}{\underline{5}} \int_0^1 (z^5 + 10z^4 + 35z^3 + 50z^2 + 24z) dz =$$

$$D_6 = \frac{1}{\underline{6}} \int_0^1 (z^6 + 15z^5 + 85z^4 + 225z^3 + 274z^2 + 120z) dz =$$

$$= \frac{1}{6} \frac{9}{0} \frac{8}{4} \frac{7}{8} \frac{0}{0}$$

so dass (12) für $n = 6$

$$\frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} f(x) dx = f(a) + \frac{1}{2} f_0^{\text{I}}(a - \frac{1}{2}\omega) + \frac{5}{12} f_0^{\text{II}}(a - \omega) + \frac{3}{8} f_0^{\text{III}}(a - \frac{3}{2}\omega)$$

$$+ \frac{2}{7} \frac{5}{2} \frac{1}{0} f_0^{\text{IV}}(a - 2\omega) + \frac{9}{2} \frac{5}{8} \frac{7}{8} f_0^{\text{V}}(a - \frac{5}{3}\omega) + \frac{1}{6} \frac{9}{0} \frac{8}{4} \frac{7}{8} \frac{0}{0} \omega^6 f^6(a + \omega)$$

wird.

6.

Die Formel (C) findet man, wenn man

$$n = 2m$$

$$x_1 = a$$

$$x_2 = a + \omega$$

$$x_3 = a - \omega$$

$$x_4 = a + 2\omega$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_{n-1} = a - (m-1)\omega$$

$$x_n = a + m\omega$$

setzt. Hierdurch wird

$$\delta^1(x_1, x_2) = \frac{1}{\omega} f_0^{\text{I}}(a + \frac{1}{2}\omega)$$

$$\delta^2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\omega^2 \underline{2}} f_0^{\text{II}}(a)$$

$$\delta^3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{\omega^3 \underline{3}} f_0^{\text{III}}(a + \frac{1}{2}\omega)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$^{n-2}(x_1, x_2 \dots x_{2m-1}) = \frac{1}{\omega^{2m-2} \underline{2m-2}} f_0^{(2m-2)}(a),$$

$$^{n-1}(x_1, x_2 \dots x_{2m}) = \frac{1}{\omega^{2m-1} \underline{2m-1}} f_0^{(2m-1)}(a + \frac{1}{2}\omega).$$

man diese Ausdrücke in (3) einsetzt, bekommt man, wenn $A_p = \omega^p \underline{p} \cdot E_p$ setzt,

$$\left. \begin{aligned} dx = & f(a) + E_1 f_0^I(a + \frac{1}{2}\omega) + E_2 f_0^{II}(a) + E_3 f_0^{III}(a + \frac{1}{2}\omega) + \dots \\ & + E_{2m-1} f_0^{(2m-1)}(a + \frac{1}{2}\omega) + E_{2m} \omega^{2m} f^{2m}(u_1) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$a - (m-1)\omega < u_1 < a + m\omega$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\underline{2p}} \cdot \frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} (x-a)(x-a-\omega)(x-a+\omega)(x-a-2\omega) \dots (x-a-p\omega) dx, \\ & = \frac{1}{\omega^{2p+1} \underline{2p+1}} \cdot \frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} (x-a)(x-a-\omega)(x-a+\omega) \dots \\ & \quad (x-a-p\omega)(x-a+p\omega) dx \end{aligned}$$

wenn man die Substitution $x = a + \omega(z + \frac{1}{2})$ macht,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\underline{2p}} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (z^2 - (\frac{1}{2})^2)(z^2 - (\frac{3}{2})^2) \dots \left(z^2 - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^2\right) dz \dots \quad (16) \\ & \frac{1}{\underline{2p+1}} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (z^2 - (\frac{1}{2})^2)(z^2 - (\frac{3}{2})^2) \dots \\ & \quad \left(z^2 - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^2\right) \left(z + \frac{2p+1}{2}\right) dz \end{aligned}$$

weist nun leicht, dass

$$E_{2p+1} = \frac{1}{2} E_{2p}.$$

$$\frac{1}{\underline{2p+1}} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (z^2 - (\frac{1}{2})^2)(z^2 - (\frac{3}{2})^2) \dots \left(z^2 - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^2\right) z dz + \frac{1}{2} E_{2p},$$

das Integral aber verschwindet, da die Funktion unter dem Integralzeichen ungerade ist. Man kann deshalb die folgende Formel (15)

$$\frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} f(x) dx = f(a) + \frac{1}{2} f'_0(a + \frac{1}{2}\omega) + E_2 [f''_0(a) + \frac{1}{2} f'''_0(a + \frac{1}{2}\omega)] + E_{2m-2} [f^{(2m-2)}_0(a) + \frac{1}{2} f^{(2m-1)}_0(a + \frac{1}{2}\omega)] + E_{2m} \omega^{2m} f^{(2m)}(u_1)$$

schreiben. Nun ist aber

$$f^{(p)}_0(a) + \frac{1}{2} f^{(p+1)}_0(a + \frac{1}{2}\omega) = f^{(p)}_{\frac{1}{2}}(a + \frac{1}{2}\omega),$$

und wir bekommen also die Formel in der Gestalt

$$\frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} f(x) dx = f_{\frac{1}{2}}(a + \frac{1}{2}\omega) + E_2 f''_{\frac{1}{2}}(a + \frac{1}{2}\omega) + \dots + E_{2m-2} f^{(2m-2)}_{\frac{1}{2}}(a + \frac{1}{2}\omega) + E_{2m} \omega^{2m} f^{(2m)}(u_1)$$

die mit der Formel (C) in »Die Mechanik des Himmels« von Laplace einstimmt. Das Restglied kann die Form

$$E_{2m} \omega^{2m} f^{(2m)}(a + \frac{1}{2}\omega \pm \vartheta(m - \frac{1}{2})\omega), \dots$$

annehmen, wo $0 < \vartheta < 1$. Die Koeffizienten kann man nach (16) berechnen, die auch

$$E_{2p} = \frac{2}{2^p} \int_0^{\frac{1}{2}} (z^2 - (\frac{1}{2})^2)(z^2 - (\frac{3}{2})^2) \dots (z^2 - (\frac{2p-1}{2})^2) dz$$

geschrieben werden kann. Setzt man $z = \frac{1}{2}y$, nimmt man die Formel die Gestalt

$$E_{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \int_0^1 (y^2 - 1^2)(y^2 - 3^2)(y^2 - 5^2) \dots (y^2 - (2p-1)^2) dy$$

an.

Die ersten Werte werden

$$E_2 = \frac{1}{2^2} \int_0^1 (y^2 - 1) dy = -\frac{1}{12},$$

$$E_4 = \frac{1}{2^4} \int_0^1 (y^4 - 10y^2 + 9) dy = \frac{1}{720},$$

gang, in meinen Vorlesungen als Ausgangsformel habe, bildet hier einen unnötigen Umweg. Die von NIELSEN gefundenen Ausdrücke für das Restglied sind noch nicht in solcher Form, dass sie der praktische Benutzer benutzen kann; es unterliegt aber keinem Zweifel, unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die $f(x)$ hieraus für die Praxis bequeme Restformeln ziehen kann.



Tryckt den 4 juni 1908.

J.-A. NORMAND,
CORRESPONDANT DE L'INSTITUT.

EXPRESSIONS ALGÈBRIQUES APPROXIMATIVES
DES
TRANSCENDANTES LOGARITHMIQUES ET EXPONENTIELLES;

Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séances du 2 et du 16 février 1903.

INSTITUT DE FRANCE.

ACADÉMIE DES SCIENCES.

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. CXXXVI, p. 277 (séance du 2 février 1903).

Expressions algébriques approximatives des transcendantes logarithmiques et exponentielles ;

PAR M. J.-A. NORMAND.

« Les transcendantes logarithmiques et exponentielles expriment une des lois naturelles les plus générales : aussi figurent-elles dans un grand nombre de formules de Science appliquée.

» Il existe un intérêt d'autant plus grand à remplacer par des formules algébriques, n'exigeant pas l'usage des Tables, ces transcendantes, que celles-ci n'expriment souvent que des lois approximatives : tel est le cas, entre beaucoup d'autres, pour la radiation et la conductibilité de la chaleur.

» *Logarithmes.* — Les séries connues n'étant suffisamment convergentes que dans un très petit rayon, les savants qui se sont déjà occupés du problème en ont cherché la solution dans le calcul approché, par interpolation, des intégrales définies : elle peut être trouvée ailleurs.

» La meilleure série exprimant directement le logarithme d'un nombre y est

$$(1) \quad \log y = 2 \left[\frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{y-1}{y+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{y-1}{y+1} \right)^5 + \dots \right].$$

» Sa convergence, qui s'étend à toutes les valeurs positives de y , mais qui diminue très rapidement quand y augmente, peut être accrue indéfiniment pour des valeurs élevées de la variable, tout en restant suffisante pour les faibles valeurs, par un double procédé.

» *Premier procédé.* — Si l'on remplace dans (1) y par $y^{\frac{1}{n}}$, il vient :

$$(2) \quad \log y = 2n \left[\frac{y^{\frac{1}{n}} - 1}{y^{\frac{1}{n}} + 1} + \frac{1}{3} \left(\frac{y^{\frac{1}{n}} - 1}{y^{\frac{1}{n}} + 1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{y^{\frac{1}{n}} - 1}{y^{\frac{1}{n}} + 1} \right)^5 + \dots \right].$$

» Pour n infiniment grand, la série se réduit au premier terme

$$(3) \quad \log y = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \frac{y^{\frac{1}{n}} - 1}{y^{\frac{1}{n}} + 1},$$

de même que l'expression limite ordinairement considérée :

$$\log y = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(y^{\frac{1}{n}} - 1 \right),$$

mais, tandis que celle-ci, pour des valeurs peu élevées de n , est extrêmement erronée, la formule (3) fournit alors des approximations parfois suffisantes. Si n est une puissance de 2, le calcul exige une ou plusieurs extractions de racines carrées. Ces opérations sont, il est vrai, assez pénibles pour rendre peu propres au calcul des logarithmes les séries renfermant des racines de la variable : aussi, l'utilité de ces séries consiste-t-elle principalement, comme on le verra, à fournir des expressions approximatives simples des exponentielles.

» *Deuxième procédé.* — Si, dans les séries (1) et (2) on remplace y par $\frac{y}{\alpha}$, il vient :

$$(4) \quad \log y = \log \alpha + 2 \left[\frac{\frac{y}{\alpha} - 1}{\frac{y}{\alpha} + 1} + \frac{1}{3} \left(\frac{\frac{y}{\alpha} - 1}{\frac{y}{\alpha} + 1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{\frac{y}{\alpha} - 1}{\frac{y}{\alpha} + 1} \right)^5 + \dots \right]$$

et

$$(5) \quad \log y = \log \alpha + 2n \left\{ \frac{\left(\frac{y}{\alpha} \right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{y}{\alpha} \right)^{\frac{1}{n}} + 1} + \frac{1}{3} \left[\frac{\left(\frac{y}{\alpha} \right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{y}{\alpha} \right)^{\frac{1}{n}} + 1} \right]^3 + \frac{1}{5} \left[\frac{\left(\frac{y}{\alpha} \right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{y}{\alpha} \right)^{\frac{1}{n}} + 1} \right]^5 + \dots \right\}.$$

» Par exemple, soit $\alpha = 4$ dans la série (4), on a :

$$(6) \quad \log y = 1,386294 + 2 \left[\frac{y-4}{y+4} + \frac{1}{3} \left(\frac{y-4}{y+4} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{y-4}{y+4} \right)^5 + \dots \right].$$

» On a de même, en faisant $\alpha = 10$ et $\alpha = 100$ dans (5)

$$\begin{aligned} \log y &= 2,302585 + 2n \left\{ \frac{\left(\frac{y}{10} \right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{y}{10} \right)^{\frac{1}{n}} + 1} + \frac{1}{3} \left[\frac{\left(\frac{y}{10} \right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{y}{10} \right)^{\frac{1}{n}} + 1} \right]^3 + \frac{1}{5} \left[\frac{\left(\frac{y}{10} \right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{y}{10} \right)^{\frac{1}{n}} + 1} \right]^5 + \dots \right\}, \\ \log y &= 4,605170 + 2n \left\{ \frac{\left(\frac{y}{100} \right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{y}{100} \right)^{\frac{1}{n}} + 1} + \frac{1}{3} \left[\frac{\left(\frac{y}{100} \right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{y}{100} \right)^{\frac{1}{n}} + 1} \right]^3 + \frac{1}{5} \left[\frac{\left(\frac{y}{100} \right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{y}{100} \right)^{\frac{1}{n}} + 1} \right]^5 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

» *N. B.* — On simplifie les calculs en adoptant pour α une puissance de 10.

» La série (5) est susceptible de fournir directement les logarithmes hyperboliques, sur une étendue d'autant plus considérable de l'échelle des nombres que α et n sont plus grands.

» Pour obtenir des expressions approximatives qui font l'objet principal de cette Note, il suffit généralement de conserver les deux premiers termes des séries, termes dont les coefficients sont légèrement modifiés, afin de compenser la suppression du reste et de fournir les logarithmes exacts de quelques nombres déterminés.

» Quand la formule approximative est rigoureusement exacte pour un nombre y_1 inférieur à α , elle l'est également pour un nombre y_2 supérieur à α , tel que $y_1 y_2 = \alpha^2$. Si, au contraire, elle donne lieu à une erreur absolue ε pour le nombre y_1 , elle donne lieu à une erreur égale mais de signe contraire $-\varepsilon$ pour le nombre y_2 .

» Avec deux termes de la série seulement, les séries exactes (6), (7) et (8) peuvent généralement être remplacées par les formules approximatives suivantes :

» Pour $\alpha = 4$, la formule (6) devient :

$$(9) \quad \log y = 1,386294 + 1,97627 \frac{y-4}{y+4} + 0,92847 \left(\frac{y-4}{y+4} \right)^3.$$

» L'erreur, nulle pour les valeurs suivantes de y : 1, 2, 4, 8, 16 et pour les inverses de ces nombres : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ne dépasse pas $+\frac{1}{140}$ pour $y = 20$.

Elle est loin de celle ($\frac{1}{26}$) trouvée par Poncelet, pour $y = 4\frac{1}{2}$ seulement, par application de la méthode de Simpson (1).

» Pour les valeurs de y comprises entre 1 et 0, l'approximation des nouvelles formules est aussi grande que pour les nombres supérieurs à l'unité, à la condition de mettre la variable sous la forme $\frac{1}{y}$ et d'affecter le second membre du signe —.

» Pour $\alpha = 10$ et $n = 4$, la formule (7) devient :

$$(10) \quad \log y = 2,302585 + 7,99453 \frac{\left(\frac{y}{10}\right)^{\frac{1}{4}} - 1}{\left(\frac{y}{10}\right)^{\frac{1}{4}} + 1} + 2,86977 \left[\frac{\left(\frac{y}{10}\right)^{\frac{1}{4}} - 1}{\left(\frac{y}{10}\right)^{\frac{1}{4}} + 1} \right]^3.$$

» L'erreur, nulle pour les valeurs suivantes de y : 1, 2, 10, 50, 100, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{400}$, atteint $-\frac{1}{725}$ pour $y = 300$ et $-\frac{1}{140}$ pour $y = 1000$.

» Pour $\alpha = 100$ et $n = 4$, la formule (8) devient :

$$(11) \quad \log y = 4,605170 + 7,9679 \frac{\left(\frac{y}{100}\right)^{\frac{1}{4}} - 1}{\left(\frac{y}{100}\right)^{\frac{1}{4}} + 1} + 3,2097 \left[\frac{\left(\frac{y}{100}\right)^{\frac{1}{4}} - 1}{\left(\frac{y}{100}\right)^{\frac{1}{4}} + 1} \right]^3.$$

» L'erreur, nulle pour les valeurs suivantes de y : 2, 10, 100, 1000, 5000, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{5000}$, ne dépasse pas $-\frac{1}{190}$ pour $y = 20000$.

» La formule (11), qui présente, il est vrai, le défaut d'exiger une double extraction de racines carrées de la variable, fournit donc des valeurs algébriques approximatives souvent suffisantes ^{des logarithmes} de la presque totalité de l'échelle des nombres.

» Il y a souvent avantage, principalement pour établir des expressions approximatives des exponentielles, à ne conserver que le premier terme des séries, en modifiant légèrement le coefficient de ce terme ; mais il faut alors adopter une valeur de n plus élevée, par exemple : 8. On trouve ainsi les deux formules

$$(12) \quad \log y = 2,302585 + 16,10 \frac{\left(\frac{y}{10}\right)^{\frac{1}{8}} - 1}{\left(\frac{y}{10}\right)^{\frac{1}{8}} + 1}$$

(1) *Cours de Mécanique appliquée aux machines*, 2^e Partie, 1876, p. 22.

et

$$(13) \quad \log y = 4,605170 + 16,10 \frac{\left(\frac{y}{100}\right)^{\frac{1}{8}} - 1}{\left(\frac{y}{100}\right)^{\frac{1}{8}} + 1}.$$

» La première convient principalement pour les valeurs de y jusqu'à 300; la deuxième, peu exacte pour les très petits nombres, fournit encore une approximation souvent suffisante pour $y = 5000$.

» L'erreur de la formule (12), nulle pour $y = 10$, atteint $-\frac{1}{150}$ pour $y = 2$; $+\frac{1}{847}$ pour $y = 50$; $-\frac{1}{3120}$ pour $y = 100$; $-\frac{1}{194}$ pour $y = 300$.

» L'erreur de la formule (13), nulle pour $y = 100$, atteint $+\frac{1}{13}$ pour $y = 2$; $+\frac{1}{1560}$ pour $y = 10$; $-\frac{1}{1005}$ pour $y = 50$; $+\frac{1}{1360}$ pour $y = 200$; $-\frac{1}{4680}$ pour $y = 1000$; $-\frac{1}{163}$ pour $y = 5000$; $+\frac{1}{97}$ pour $y = 10000$.

» Les expressions algébriques approximatives des logarithmes fournissent facilement celles des exponentielles : celles-ci offrent le grand avantage d'être rationnelles. »

INSTITUT DE FRANCE.

ACADÉMIE DES SCIENCES.

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. CXXXVI, p. 436 (séance du 16 février 1903).

*Expressions algébriques approximatives des transcendentes
logarithmiques et exponentielles ;*

PAR M. J.-A. NORMAND.

« *Exponentielles.* — Par définition, on a

$$e^x = e^{\log y} = y.$$

» Il suffit donc d'égaliser x à l'une des expressions déjà trouvées de $\log y$.
En l'égalant à (2), il vient

$$x = 2n \left[\frac{y^{\frac{1}{n}} - 1}{y^{\frac{1}{n}} + 1} + \frac{1}{3} \left(\frac{y^{\frac{1}{n}} - 1}{y^{\frac{1}{n}} + 1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{y^{\frac{1}{n}} - 1}{y^{\frac{1}{n}} + 1} \right)^5 + \dots \right].$$

» La série étant réduite à son premier terme, on a

$$(14) \quad y = e^x = \left(\frac{2n + x}{2n - x} \right)^n,$$

N.

expression rigoureusement exacte pour n infiniment grand, de même que l'expression

$$e^x = \lim \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n,$$

mais beaucoup moins ~~exacte~~^{inexacte} que cette dernière pour des valeurs peu élevées de n .

» Si l'on adopte (5) comme expression de $\log y$, n étant assez grand pour que la série puisse être réduite à son premier terme, il vient

$$(15) \quad e^x = \alpha \left(\frac{k - \log \alpha + x}{k + \log \alpha - x} \right)^n.$$

» k est le coefficient très voisin de $2n$ du terme unique $\frac{\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} + 1}$, ce qui

pour les valeurs $\alpha = 10$ et 100 , $n = 8$, $k = 16, 10$ des formules (12) et (13) donne

$$(16) \quad e^x = 10 \left(\frac{13,797415 + x}{18,402585 - x} \right)^8,$$

$$(17) \quad e^x = 100 \left(\frac{11,494830 + x}{20,705170 - x} \right)^8.$$

» Les valeurs de e^{-x} , d'un usage fréquent, sont évidemment les inverses des précédentes.

» La formule (16), rigoureusement exacte pour $e^x = 10$, donne de bonnes valeurs depuis $e^x = 1$ jusqu'à $e^x = 200$. La formule (17), rigoureusement exacte pour $e^x = 100$, donne de bonnes valeurs depuis $e^x = 4$ jusqu'à $e^x = 2000$.

» On obtient une autre expression de e^x en renversant la série (5) de ma-

nière à développer $\frac{\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} + 1}$ suivant les puissances impaires de $(x - \log \alpha)$.

Si l'on ne conserve que deux termes de la nouvelle série, en réduisant à la valeur approximative $\frac{0,08}{n^2}$ le coefficient négatif du second, pour compenser

les termes négligés, on obtient

$$(18) \quad e^x = \alpha \left[\frac{2n + x - \log \alpha - \frac{0,08}{n^2} (x - \log \alpha)^3}{2n - x + \log \alpha + \frac{0,08}{n^2} (x - \log \alpha)^3} \right]^n.$$

» Avec $n = 8$ et $\alpha = 100$, on a

$$(19) \quad e^x = 100 \left[\frac{11,394830 + x - 0,00126(x - 4,605170)^3}{20,605170 - x + 0,00126(x - 4,605170)^3} \right]^8.$$

» Cette formule est moins simple que les précédentes; mais elle fournit des chiffres d'une exactitude remarquable dans des limites très étendues : les unes et les autres offrent l'avantage d'être rationnelles.

» Le Tableau suivant donne les résultats comparés des formules (16), (17) et (19) :

Valeurs de x .	Valeurs de e^x par les formules			
	exactes.	(16).	(17).	(19).
0	1,000	1,001	0,900	1,000
1	2,718	2,725	2,613	2,716
2,302585	10,000	10,000	9,985	9,996
4,605170	100,000	100,15	100,000	100,000
6,214608	500,000	528,3	495,1	500,1
6,907755	1000,000	1108,2	1001,5	1000,4
9,210340	10000,000	»	11082	10000,4

» La série exponentielle classique n'est utilisable que pour des valeurs très peu élevées de x . Ainsi, pour $e^{2,302585} = 10$, la somme des onze premiers termes, pénibles à calculer, laisse encore une erreur de $-\frac{1}{152}$.

» Mais la convergence de la série peut être augmentée par le double procédé déjà utilisé pour accroître celle de la série de $\log y$ et cela au point de rendre le calcul, sans Tables de logarithmes, de $e^x = 10000$, par la série modifiée, plus facile que celui de $e^x = 10$ par l'ancienne.

» On a, en effet, identiquement

$$e^x = e^\alpha \left(e^{\frac{x-\alpha}{n}} \right)^n$$

d'où

$$(20) \quad e^x = e^\alpha \left[1 + \frac{1}{n}(x - \alpha) + \frac{1}{2n^2}(x - \alpha)^2 + \frac{1}{2.3n^3}(x - \alpha)^3 + \dots \right]^n.$$

(4)

» Si l'on adopte, par exemple, $e^x = e^{4,605170} = 100$ et $n = 16$, on obtient la série très convergente

$$(21) \quad \left\{ e^x = 100 \left[1 + \frac{x - 4,605170}{16} + \frac{(x - 4,605170)^2}{512} + \frac{(x - 4,605170)^3}{24576} + \frac{(x - 4,605170)^4}{1572864} + \dots \right]^{16} \right.$$

» Cette formule, appliquée au calcul de $e^{9,210340} = 10\,000$ en limitant à 6 le nombre des termes et celui des décimales de chaque terme, donne

$$e^x = 100 \times \overline{1,333529}^{16} = 10\,000,9, \quad \text{erreur} + \frac{1}{44000}.$$

» Appliquée au calcul de $e^0 = 1$ pour lequel la série ordinaire est beaucoup plus avantageuse, on obtient

$$e^0 = 100 \times \overline{0,749885}^{16} = 0,9998, \quad \text{erreur} - \frac{1}{5000}.$$

» Il serait certainement facile d'obtenir une bonne expression approximative de e^x en limitant le nombre des termes de (21) à 3 ou 4, et en modifiant les coefficients ainsi que nous l'avons fait pour $\log y$.

» Bien que l'élévation à la 16^e puissance entraîne quatre multiplications supplémentaires, et bien qu'elle exige que les termes soient calculés avec une ou deux décimales de plus, l'avantage qui résulte de la transformation de la série connue est considérable. Cette transformation peut être appliquée à la série ordinaire de a^x , ainsi qu'à beaucoup d'autres, d'un emploi trop limité sous leur forme actuelle.

» Les transcendentes de la forme a^x équivalent à $e^{x \log a}$. Les expressions déjà trouvées de e^x sont donc applicables, à condition d'y remplacer x par $x \log a$.

» Comme exemple, on peut citer la formule de la radiation de la chaleur

$$(22) \quad R = 37,5 \cdot 1,0077^t = 37,5 e^{0,00767t},$$

t exprimant la température centigrade au-dessus de zéro.

» Aux très hautes températures, l'exposant de e est très élevé; la valeur de $\alpha = 100$ dans (17) est insuffisante. Avec $\alpha = 1000$, on a

$$(23) \quad R = 37\,500 \left(\frac{9,1922 + 0,00767t}{23,0077 - 0,00767t} \right)^8.$$

» Cette formule comparée avec (22) donne : à 500° , 1700^{cal} au lieu de 1730^{cal} ; à 1000° , 80400^{cal} au lieu de 80000^{cal} ; à 1200° , 373300^{cal} au lieu de 372900^{cal} .

» Le sujet est loin d'être épuisé : il serait facile de donner, par exemple, des expressions approximatives de γ^a , a étant voisin de l'unité, d'un usage continu en Thermodynamique et calculable uniquement, aujourd'hui, par les Tables. »

DEVÁTÁ

ROČNÍ ZPRÁVA

ČESKÉ

ZEMSKÉ VYŠŠÍ REÁLKY

V LIPNÍKU

ZA ŠKOLNÍ ROK 1903—1904.

OBSAH:

Kvadratura výrazu: $dx = \frac{(y^2 + b^2) dy}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 + b^2)^2}}$. Napsal professor *Karel Novák*.

Dvě posmrtné vzpomínky (Augustin Losert, Frant. Schenk). Napsal ředitel *Fr. Jansa*.

Zprávy školní. Sestavil ředitel *Fr. Jansa*.



V LIPNÍKU 1904.



Kvadratura výrazu

$$dx = \frac{(y^2 \pm b^2) dy}{\sqrt{4a^2 y^2 - (y^2 \pm b^2)^2}}$$

K. NOVÁK.

K výrazu, který zde budeme integrovati, dospěje se řešením následujících úloh:¹⁾

A) Vyšetřiti rovnici křivky vytvořené ohniskem kuželovky, která se valí po pevné přímce aniž by se smýkala.²⁾

B) Ustanoviti rotační plochy, které mají ve všech ech stálé střední zakřivení.³⁾

C) Vyhledati rovinnou křivku, která otáčejíc se kolem v téže rovině položené uzavře daný objem nejmenší chou.⁴⁾

Ve zvláštním případě, když b rovná se nulle, zjednoduší se naše diferenciální rovnice ve tvar:

$$dx = \frac{y dy}{\sqrt{4a^2 - y^2}}.$$

A její řešení dává:

$$x - x_0 = -\sqrt{4a^2 - y^2}$$

$$\text{nebo } (x - x_0)^2 + y^2 = 4a^2.$$

To jest rovnice kruhu.

Jinak konstanty a a b mají v úloze A) význam poloos oné kuželovky valící se po přímce. Proto jest účelno k snazšímu rozeznávání pří-
tů dalších zavést místo nich číselnou výstřednost ε a parametr p .

Jest pak:

$$a^2 = \frac{p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}$$

¹⁾ Serret—Harnack, Lehrbuch d. Dif. u. Integ.-Rechnung. Leipzig 1885. 2. H. pag. 149. et seq. a pag. 377 a 378.

²⁾ Viz také Časopis pro pěstování mat. a fys. roč. VIII. str. 166 a násled. trochoidách ohnisk kuželošek, když půdicí jest přímka«. Dr. Ant. Sucharda.

³⁾ Viz tamtéž str. 10. a násled. »O rovnovážných tvarech kapalin nepodrobených vnějšímu tlaku«. Dle Plateaua vzdělal Dr. August Seydler.

⁴⁾ Viz také Dr. F. J. Studnička, Základové vyšší matematiky díl III. str. 291.

$$b^2 = \pm \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}$$

a tudíž

$$dx = \frac{p^2 + (1 - \varepsilon^2) y^2}{\sqrt{-y^4(1 - \varepsilon^2)^2 + 2p^2 y^2(1 + \varepsilon^2) - p^4}} dy \dots$$

Rozeznávejme tři případy

I. $\varepsilon^2 = 0$, II. $\varepsilon^2 = 1$, III. $\varepsilon^2 > 1$, IV. $\varepsilon^2 < 1$.

I.

Když jest $\varepsilon^2 = 0$, bude

$$dx = i \frac{y^2 + p^2}{y^2 - p^2} dy.$$

Přihlížíme-li pouze k výsledkům reálným, bude:

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad y^2 = p^2,$$

$$y = \pm p.$$

Střed kruhu, který se valí po přímce, vytvoří opět přímku dící rovnoběžnou.

II.

Když jest $\varepsilon^2 = 1$, nabude rovnice (1.) tvaru:

$$dx = \frac{\frac{p}{2}}{\sqrt{y^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2}} dy.$$

Bude tedy:

$$x = \frac{p}{2} l \left[\frac{2y}{p} + \frac{2}{p} \sqrt{y^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2} \right] + C.$$

Volíme-li mezní podmínky tak, aby pro $x = 0$ bylo $y = \frac{p}{2}$, t. stojí-li osa valící se paraboly v počátku kolmo na ose úseček, držíme:

$$C = 0$$

$$x = \frac{p}{2} l \left[y + \sqrt{y^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2} \right] - l \frac{p}{2}.$$

$$y = \frac{p}{4} \left(e^{\frac{2x}{p}} + e^{-\frac{2x}{p}} \right).$$

Ohnisko paraboly, valící se po přímce, vytvoří řetězovku.

Případy III. a IV. vedou k integrálům elliptickým.¹⁾

Učiníme polynom ve jmenovateli rovnice (1.) součinem, pak bude:

$$\frac{4(1 - \varepsilon^2)^2 + 2p^2y^2(1 + \varepsilon^2) - p^4}{y(1 + \varepsilon) - p} [y(1 + \varepsilon) + p] [p - y(1 - \varepsilon)] [p + y(1 - \varepsilon)] =$$

Okolnost, že poslední výraz představuje čtyřnásobnou plochu trojúhánka daného stranami $y\varepsilon$, y , p vedla mne k zavedení nové neodproměnné ϱ tak, aby bylo:

$$= y^2 + p^2 - 2yp \cos \varrho \quad (2.)$$

Pak jest:

$$\frac{[y(1 + \varepsilon) - p] [y(1 + \varepsilon) + p] [p - y(1 - \varepsilon)] [p + y(1 - \varepsilon)]}{4p} = 2yp \sin \varrho$$

$$\frac{yp \sin \varrho}{p \cos \varrho - y(1 - \varepsilon^2)} d\varrho \quad (3.)$$

Rovnice (1.) nabývá potom tvaru:

$$= \frac{yp \cos \varrho}{p \cos \varrho - y(1 - \varepsilon^2)} d\varrho \quad (4.)$$

emž dle rovnice (2.)

$$\frac{p}{1 - \varepsilon^2} [\cos \varrho \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \sin^2 \varrho}] \quad (5.)$$

$$= \frac{p}{\varepsilon^2 - 1} \cos \varrho d\varrho \pm \frac{p}{\varepsilon^2 - 1} \cdot \frac{\cos^2 \varrho \cdot d\varrho}{\sqrt{\varepsilon^2 - \sin^2 \varrho}} \quad (6.)$$

Dříve než odlišíme případ III. od IV., zjednejme si z rovnic (3.) a (4.)

$$\frac{dy}{dx} = tg \varrho.$$

Poněvadž $tg \varrho$ pro každé $\varrho = n\pi$, nabývá hodnoty nulla, tedy pořadí hodnoty maximální nebo minimální, skládají se křivky vyjádřené icemi (5.) a (6.) z oblouků periodicky se opakujících.

III.

Když jest $\varepsilon^2 > 1$, upravíme rovnici (6.) na tvar:

$$= \frac{p}{\varepsilon^2 - 1} \cos \varrho d\varrho \pm \frac{p}{\varepsilon} \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 \sin^2 \varrho}} \pm \frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 \sin^2 \varrho}$$

Pak bude:

$$x = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \sin \varrho \mp \frac{p}{\varepsilon} F\left(\varrho, \frac{1}{\varepsilon}\right) \pm \frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} E\left(\varrho, \frac{1}{\varepsilon}\right) + C.$$

¹⁾ V článku »o trochoidách ohnisk kuželoseček« Dr. Ant. Sucharda vyšetřuje vztah mezi pořadnicí a obloukem trochoidy.

Volíme-li mezní podmínky tak, aby pro $x=0$ bylo

$y = \frac{p}{\varepsilon + 1} = e - a, \varphi = 0$, bude realná osa valící se hyperboly v počátku státi kolmo na ose úseček a její hořejší větev se bude této půdnicí týkati.

Potom jest

$$x = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \sin \varphi + \frac{p}{\varepsilon} F\left(\varphi, \frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} E\left(\varphi, \frac{1}{\varepsilon}\right) \dots \dots \dots$$

a při tom dle rovnice (5).

$$y = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \cos \varphi + \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 \sin^2 \varphi} \dots \dots \dots$$

Znaménko hořejší platí pro jedno, dolejší pro druhé ohnisko.

Křivku tuto nazval Plateau *nodoidou*. Běh její podobá se prodloužené cykloidě.¹⁾

IV.

Když jest $\varepsilon^2 < 1$, zavedeme místo proměnné φ proměnnou ψ aby bylo

$$\sin \varphi = \varepsilon \sin \psi \dots \dots \dots$$

Odtud jest

$$d\varphi = \varepsilon \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} d\psi$$

$$dx = + \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \cos \psi d\psi - \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \psi} d\psi.$$

Pak bude:

$$x = + \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \sin \psi - \frac{p}{1 - \varepsilon^2} E(\psi, \varepsilon) + C.$$

Volíme-li mezní podmínky tak, aby pro $x=0$ bylo

$$y = \frac{p}{1 + \varepsilon} = a + e, \psi = 0,$$

bude hlavní osa valící se ellipsy v počátku na ose úseček, jakožto půdnicí státi kolmo.

Potom jest

$$C = 0$$

$$x = + \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \sin \psi - \frac{p}{1 - \varepsilon^2} E(\psi, \varepsilon) \dots \dots \dots$$

a při tom dle rovnic (5.) a (9).

$$y = + \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \cos \psi - \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \psi} \dots \dots \dots$$

Znaménko hořejší platí opět pro jedno, dolejší pro druhé ohnisko.

Křivku těmito rovnicemi vyjádřenou nazval Plateau *onduloio*.

Běh její podobá se běhu cykloidy zkrácené.¹⁾

¹⁾ J. S. Vaněček, Křivé čáry rovinné i prostorové, str. 55. a obr. 66.

DVĚ
POSMRTNÉ VZPOMÍNKY.

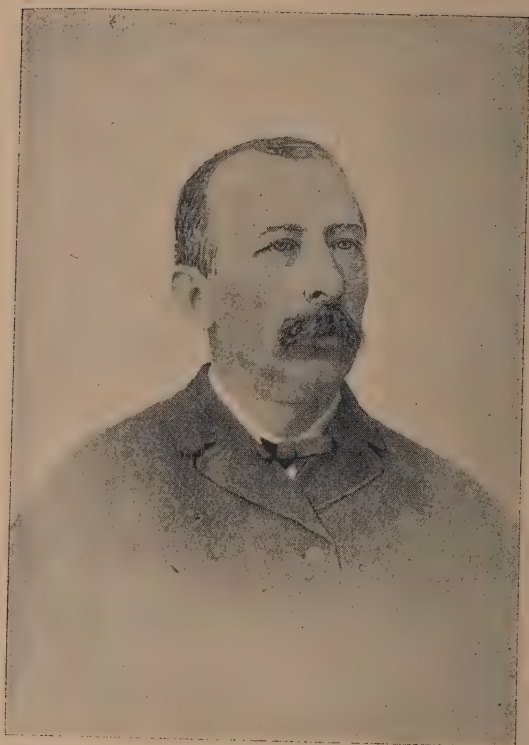
I.

AUGUSTIN LOSERT,
MĚŠTAN LIPNICKÝ, MECENÁŠ ČESKÉ REÁLKY.

II.

FRANTIŠEK SCHENK,
SUPPLUJÍCÍ UČITEL ZDEJŠÍHO ÚSTAVU.





AUGUSTIN LOSERT,
MĚŠTAN LIPNICKÝ, MECENÁŠ ČESKÉ REÁLKY.

* 1841 † 1903.

I.



MĚŠTAN LIPNICKÝ, MECENÁŠ ČESKÉ REÁLKY.

AUGUSTIN LOSERT.

Muž mimo Lipník skoro neznámý, bývalý mistr barvířský
 pníku, skromný, málomluvný, sotva jej bylo viděti na ulici.
 čnosti nevyhledával, miloval klid; a jakkoliv k boji za právo a
 vatou vždy povzbuzoval, sám zůstával opodál jako divák — ale
 plný rozechvění a starosti, jak boj skončí. Patřil ve městě
 pickým osobnostem, jistého originálního, starodávneho stříhu.
 oektivý, měl i své chvíle mrzutého staromládenectví, ale i chvíle,
 srdce jeho i ruka byla štědře otevřena. V jeho duši dávno bylo
 dnuto o jeho velkém majetku. Často v hovoru činil na to na-
 . . . »no, až umřu, bude Vám lepší . . .«. Tím myslíval, že po-
 jeho majetek v národních potřebách místních.

Jeho velká šetrnost mu byla namnoze zazlívána; leč byla to
 vost pouze sama k sobě. K dobré věci a měkkému, prosebnému
 nebyl nikdy tvrdým, ani skoupým. Neměl žádných potřeb ani
 , byl v žití odměřeným, nemiloval požitků života, ač mu prostředky
 lovaly, že by byl mohl rozkoší světa užívat. Od mládí byl vy-
 án ve skromné šetrnosti; a tato vlastnost byla částí vlastní jeho
 sti.

Otec jeho Jan Losert pocházel z blízkých Drahotouš, kde se
 il u rodičů barvířství. Oženiv se s Františkou Josefou Večeřovou,
 ou obchodníka z Hranic, přestěhoval se do Lipníka a provozoval
 svoji živnost. Měl jen malý majetek; barvil a tisknul ručními
 y plátno a nosil je na zádech na jarmarky. Do rance zavázal kus
 a a to bylo denní živobytí. Žil s manželkou svou v práci a
 ivosti tak skromně, že často jen jednou týdně se v domácnosti
 o — jak pamětníci vypravují. A tak vychován byl i jejich jediný
 Augustin Dominik Losert, který se narodil dne 28. února 1841
 pníku. Chodil zde k Piaristům do školy obecné a dvojtřídní reálky
 ěl tudíž vychování školní pouze německé. Pak se učil doma bar-
 ví a vyučiv se chodil a jezdil po jarmarcích, stával u svého krámku,
 ával na trzích, jak to za mlada činil jeho otec. Tak strádali groš
 groši, žili v starostech, práci a odříkání, přičinili se, aby jejich
 eslo mělo skutečně zlaté dno. A mělo.

R. 1861 byl Augustin odveden k vojsku. Stalo se tak buď opo-
 utím nebo v tiché naději, že odveden nebude — a nebyl před
 odem »z vojny vyplacen,« jak tehdy u majetných bylo zvykem.

Až teprve po odvodu byla chyba napravena a mladý voják za 12 týdnů vyplacen.

Celý další život rodičů Losertových s jejich jediným Augustinem plynul, jak výše pověděno, idyllicky a jejich největším štěstím byla příčinnivá práce. Otec Jan Losert zemřel v Lipně 12. února 1888 máje věku 74 let, brzy na to matka 8. září 1897 75 let.

Po smrti rodičů zdědil všecek jejich majetek Augustin zanechav řemesla barvířského, věnoval veškeré síly své podnikatelským: společenskému pivovaru a společenské továrně na láhve v Lipníku a vložil do nich skoro celý svůj zděděný majetek. O tyto dva závody staral se jako jejich správce horlivě a účinně při tom všeho, co by nás posílilo na poli národohospodářské práce národním. Zůstal svobodný, žil skromně, potřeboval málo, byl šetrný, opatrný, nevydal krejcaru zbytečně a tak jmění jeho se zdvojnásobilo se.

Nebyl mužem řečí a planých frází; tiše vždy poslouchal a svým svérázným způsobem pověděl svůj zdravý soud. Byl spravedlivý, cenil po zásluze vzdělání jiných, jsa si sám dobře vědom nedostatků vlastních.

Podporoval rád všecko ušlechtilé a cítil srdcem pravého vlastence. K chudíně byl dobročinný a dával bez hluku, »aby nebylo pravice, co dává levice«; netoužil po uznalosti. Za svého života zvláště v letech posledních — měl stálé vědomí a přání, jež časem složil, aby po něm zůstala památka; z lidu že majetek měl a lidu chce vrátit.

Při zakládání české matičné reálky v Lipníku r. 1895 přikrápěl Aug. Losert jeden z prvních podporu 2000 korun.

Roku 1896 jel v prázdninách se svými přáteli do Ruska a svým odjezdem napsal vlastní rukou dne 2. června 1896 zápis, který budtež zde uvedena jeho slova, týkající se veřejných ochot.

Poslední vůle.

»Kdyby se Pánu Bohu zalíbilo a já náhle zemřel svobodný a bez novější při dobrém a zdravém rozumu se svým majetkem jak násl.

Dům číslo 127 na Bečvě a v městě dům číslo 71 a všechny připisované role ať se prodají a zpeněží; podíly mně patřící v pivovarním pivovaru v Lipníku, podíl v sladovně a podíl v továrně na láhve viny také v Lipníku ať se zpeněží. V pivovaru mám uložený majetek asi 41.000 zlatých, jak se zjistí v kanceláři pivovarské, i s úroky předu běžícím, doma jest v pokladně v ceně asi 24.000 zlatých st. papírů, okolo 40 dukátů, zlaté hodinky a asi pět prstenů. Vytěžením níže z jmenovaných movitostí a nemovitostí a naznačených hotovostí *určuji: pro střední školu českou v Lipníku 60.000 zlatých.* chudé v Lipníku na každoroční podělování o novém roku 2.000 zlatých a ustanovují Občanskou jednotu v Lipníku, aby tento úkol na sebe *převzala; totiž aby se jmenovaných 2.000 zlatých vyplývajících*

* Roku 1896 byla v Lipníku česká matičná reálka, která měla teprve 1. a svůj první školní rok 1895/6.

*asloužilé chudé rozdala. Kapitál 2.000 zlatých ať zůstane uložen
nu účelu pro vždy netknut.* — — — — —

— *»Dva tisíce zlatých na nemocnici v Lipníku. Za to žádám, by
emocní za moje rodiče Jana a Josefu Losertovy a za mne na náš
ní den pomodlili. Na pomník na hřbitově pro moje rodiče a pro
s pěknou ohradou a českým nápisem a vyzděnou kryptou 1.000
ich. Žádám, aby Občanská jednota dbala, aby naše hroby na budoucí
e stavu slušném udržovala a dohled na splnění mé vůle vedla.*

*Deset tisíc zlatých ustanovují pro chudé sirotky obého pohlaví.
ásí-li se sirotci z mé přízně odkudkoliv, mají přednost. Míním totiž,
jmenovaných 10.000 zlatých uloženo bylo na úrok a ustanoveno
nadací po padesáti zlatých ročně; k provedení zmíněného ustano-
ukládám Občanské jednotě aneb jejímu následníku.* — —

— *Spolky »Lípa«, »Hospodářský«, »Vysloužilci«, »Hasiči«, »Sokoli«,
oličtí tovaryši«, přeju si, aby se účastnili pohřbu mého a odkazují
ému z jmenovaných spolků jedno sto zlatých.* — —

— — *Deset tisíc zlatých pro chudé žáky na české reálce
pníku uloží se pro vždy jako základní kapitál a úroků přeju si,
se užilo k podělení deseti schopných, ctnostných, zasloužilých ža-
ů a z přízně mé žadatelé mají na toto ustanovení přednost.*

*Na uspořádání mého pohřbu ustanovuju, na vystrojení a podělení
ých 500 zlatých.* — — — — —

Přeju si, aby se tato ustanovení přesně provedla.

V Lipníku dne 2. června leta Páně 1896.

Aug. Losert.

Závět tato jest pravým obrazem šlechetného srdce Losertova. V ní
ví jeho vlastenecká duše, cit humaní k chudině, sirotkům a strá-
ím nemocným. Odkázáno tu skoro celé jmění jeho: 169.200 korun
očiným a vlasteneckým účelům.

Losert patřil k hloučku energických mužů v Lipníku, kteří se
a provedli myšlenku založiti českou soukromou reálku v Lipníku.
i z jeho práce, úspor a odříkání nejvíce obdařena. Zjev toho prostého
e z lidu nechť jest zářivým příkladem naší mládeži, dorostu národa
ho, na jejíž budoucnost starostlivě pamatoval.

Čest budiž jeho vzácné památce!



II.



SUPPLUJÍCÍ UČITEL

FRANTIŠEK SCHENK.

Letošního roku navštívila poprvé smrt sbor učitelský z ústavu, aby si vybrala obět v řadě mezi nejmladšími a zkosila plný naděje, lásky k práci a vlasti. Doprovodili jsme se svými dne 2. března 1904 ke hrobu FRANTIŠKA SCHENKA, supplu učitele našeho ústavu.

Bylo v tom skonu mladého muže něco tragického, co člo srdcem zatřeše. Jako když chodec po těžké pouti a bojích s překá vysílen, leč nadějí udržován a nezlomnou, železnou vůlí stane u ja cíle svých tužeb, u cíle, ve kterém se pro něho skrývalo štěstí — a tu nalezne smrt.

Fr. Schenk narodil se r. 1870 v Přibyslavi v Čechách. Byl 3 roky, když se otec jeho se svými třemi dětmi přestěhoval do Ti kde František navštěvoval obecnou školu, gymnasium a tam r. maturoval. V době gymnasijských studií r. 1885 mu otec zemřel ve T. K učitelství měl Fr. Schenk přirozenou náklonnost a odebral s zkoušce maturitní na rok na učitelský ústav do Brna. Na to by (1891—2) podučitelem v Říčanech, dva roky (1892—4) podučite. pět roků (1895—9) učitelem při české škole v Lipníku. V té dob sáhl učitelské způsobilosti pro školy obecné, pro školy měšťansk odb. a z němčiny. Znal i anglicky, francouzsky a rusky.

Byl muž povahy vzácně pevné a čisté, nadšený pracovník náš života střídmého a prostého, ale veliké lačnosti po vědění a t Každou uloženou jemu práci konal s přísností a přesností sobě vl s upřímnou ochotou a láskou. Roku 1897 byl jednatelem Škols spolku, na kterém celou tíhou spočívala starost o vydržování e matičné reálky v Lipníku. Tu plnil své povinnosti s příkladnou horlí Svým šetrným a skromným životem nastrádaný groš obětoval je knihy a účely národní a každou prázdnou chvíli věnoval na vzd sebe a práci národní.

Když roku 1897 v nedostatku o středoškolské síly učitelské Fr. Schenk povolán na výpomoc na zdejší českou reálku, kde měsíce vyučoval, uzrálo v jeho duši rozhodnutí, že opustí školu obec kde už osm roků působil, a odebere se do Prahy na universitu, se připravil na učitelství středoškolské. Odešel, opustil dobré své m poněvadž v sobě cítil, že může více v životě vykonati, předurč

zlomně svůj cíl a nic ho nezvrátilo, nezadrželo. Přemohl všechny překážky svou houževnatou, úsilovnou energií.

Po universitních studiích od 1898—1903 složil státní zkoušky oboru historického a vrátil se šťasten po překonaných obtížích i strá-ní jako vítěz sám nad sebou r. 1903—4 na staré působiště do Lipníka přijal místo supplujícího učitele na české reálce. Radostně vítal český přítel osvědčeného pracovníka, s radostnou chutí a láskou ujal se Schenk nového svého úřadu, pro který měl vzácné pochopení a který se mu stal vším na světě.

Když si všechno to připomeneme, teprve poznáme, jak mnoho vy-pěl, když neúprosná plicní choroba začala jeho mladý život podhlo-vat. Dosažený cíl se znovu vzdaloval, ztrácel a zůstávala jen hrozná lest zklamání. Se školou se loučil se slzami v očích a činil přípravy odjezdu na jih, aby tam našel své ztracené zdraví. Když napsal piš, aby objednal okružní lístek na cestu, dne 29. února 1904 za-vácen byl náhlým chrlením krve a zhasl — — — — —

Odešel jako těžká výčitka životu, který mu tolik odepřel. Škoda ch krásných nadějí, vědomostí a vloh, té chuti k životu a práci! Jeho ácný charakter posvěcuje jeho památku a může být vzorem nejen mladým duším, které vzdělával a které jeho rakev s kvítím dopro-zely, ale i mužům zralým, kteří zdatnost a zdravou sílu národa spatřují a v mravním charakteru jednotlivců. — —



Zprávy školní.

I. sbor učitelský.

A. Změny ve školním roku 1903—4.

1. Opustili ústav na počátku škol. r. 1903—4.

- a) **Franta Zděnek**, professor, jmenován byv skutečným učitelem při české zemské reálce v Kroměříži.
- b) **Havlíček Václav**, supplující učitel, jmenován byv skutečným učitelem při c. k. průmyslové škole v Plzni.
- c) **Rais Ludvík**, provisorní skut. učitel, jmenován byv skutečným učitelem při zemské reálce v Holešově.
- d) **Zachoval Jan**, supplující učitel, jmenován byv supplujícím učitelem při české zemské reálce v Hodoníně.

2. Ustanoveni byli:

- a) **Dvořák Antonín**, supplující učitel zdejší, provisorním učitelem při zdejším ústavu výnosem zemského výboru mor. ze dne 19. srpna 1903, č. 50.771; skutečným učitelem zdejším výnosem zem. výboru mor. ze dne 21. listopadu 1903, č. 71.529.
- b) **Komberec Václav**, supplující učitel zdejší, provisorním učitelem při zdejším ústavu výnosem zemského výboru mor. ze dne 19. srpna 1903, č. 52.041; skutečným učitelem zdejším výnosem zem. výboru mor. ze dne 21. listopadu 1903, č. 71.260.
- c) **Mráček Jakub**, supplující učitel při české zemské reálce v Kroměříži, provisorním skut. učitelem při zdejším ústavě výnosem zem. výboru mor. ze dne 2. března 1904, č. 15.398; skutečným učitelem zdejším výnosem zem. výboru mor. ze dne 11. června 1904, č. 35. Nastoupil zde dne 1. března 1904.
- d) **Demkow Ladislav**, supplující učitel při české zemské reálce v Kroměříži, supplujícím učitelem zdejším výnosem zem. výboru mor. ze dne 20. října 1903, č. 65.092.
- e) **Herman Stanislav**, kandidát professury, supplujícím učitelem zdejším výnosem zem. výboru mor. ze dne 20. října 1903, č. 65.092.
- f) **Schenk František**, kandidát professury, supplujícím učitelem zdejším výnosem zem. výboru mor. ze dne 21. září 1903, č. 58.000.
- g) **Vordren Vincenc**, kandidát professury, supplujícím učitelem zdejším výnosem zem. výboru mor. ze dne 20. října 1903, č. 65.000.

3. Zemřel.

Schenk František, supplující učitel dne 29. února 1904.

B. Stav sboru učitelského na konci škol. roku 1903 - 4.

a) Pro předměty hlavní.

o lé	J m é n o a h o d n o s t	Předměty, kterým učil	Ve třídě	Počet hodin týdně	Poznámka
	Jansa Frant., ředitel.	jazyk francouzský, měřictví a rýsování	III b IV. IV.	12	Správce pokračo- vací průmyslové školy spojené s reálkou.
	P. Dušek Bedř., professor.	náboženství jazyk český	I.—VII. IV.	21	Třídní IV. tř. Exhortator niž- šího a vyš. odd., správce knihovny a pokladny chu- dých žáků.
	Dvořák Ant., skutečný učitel.	jazyk český jazyk německý	IIIb, V III b, IV. V., VII.	19	Třídní V. tř.
	Hradilík Fr., professor.	kreslení	II.—VII.	24	Správce obou kreslírén, sbírek kreslířských a školních progra- mů.
	Komberec Václ., skutečný učitel.	mathematika descr. geometrie krasopis	V., VII. V., VI., VII. I a, I b	20	Třídní VII. tř. Správce rýso- vny a sbírek pro ma- thematiku a geo- metrii.
5	Kout Rudolf, professor.	jazyk německý jazyk francouzský lučba	I b III a IV., V., VI.	19	Třídní I b tř., správce sbírek chemických a žá- kovské laboratoře.
7	Mráček Jakub, skutečný učitel.	jazyk český zeměpis dějepis	I b IV. IV., V. VI., VII.	18 od 1. března 1904	Správce knihovny žakovské a země- pisného musea Nastoupil zde 1. března 1904.
8	Novák Karel, professor.	dějepis mathematika fysika	IIIa, IIIb IV., VI. IIIb, VI. VII.	22	Správce sbírek fysikálních.

Číslo řadné	J m é n o a h o d n o s t	Předměty, kterým učil	Ve třídě	Počet hodin týdně	Poznámky
9	Voborník Václ., professor.	jazyk český jazyk německý	III a VI, VII. III a VI,	17	Třídní VI. t správce knihovny učitelské.
10	Zázvorka Josef, skutečný učitel.	mathematika fysika přírodopis	II. IV. Ia, Ib, II. V. VI. VII	18	Třídní II. t správce sbírky přírodních věd
11	Vejchoda Jaroslav, skutečný učitel tělocviku.	jazyk český jazyk německý tělocvik	I a I a I.—VII.	29	Třídní Ia, správce tělocviku a náradí ke hře tělocvičným
12	Demkow Lad., supplující učitel.	zeměpis mathematika měřictví a rýso- vání kreslení krasopis	I b, III a III b I b, III b I b, II, III b I b II.	23	Třídní III
13	Herman Stan., supplující učitel.	zeměpis dějepis mathematika fysika měřictví a rýso- vání kreslení	I a, II, II I a, III a, III a I a, III a, I a	23	Třídní III
—	Schenk Frant., supplující učitel, zemřel dne 29. února 1904.	jazyk český zeměpis dějepis	I b IV IV.—VII.	18 do 7. ledna 1904	Správce knihovny žakovské měřičného mu Vyučoval až 7. ledna 1904
14	Vordren Vinc., supplující učitel.	jazyk český jazyk německý jazyk francouzský.	II II V., VI., VII.	20	—

b) Pro předměty vedlejší:

Číslo řadné	Jméno a hodnost	Předměty, kterým učil	Počet oddělení	Počet hodin týdně	Poznámka
—	Kout Rudolf, professor.	Praktická lučební cvičení v laboratoři	2	4	viz č. 6.
—	Dvořák Ant., skutečný učitel.	těsnopis	2	4	viz č. 3.
15	Hlobil Felix, odb. uč. při zem. ústavu pro hluchoněmé, vedlejší uč. zpěvu a hry houslí	zpěv hra houslí	3 1	6 2	správce sbírky hudebnin.
16	Osecký Adolf, ředitel kůru.	hra houslí	4	8	—

Školník: Richter Richard.

Náboženství evangelickému vyučoval na ústavě pan **František**
udký, evangelicko-reformovaný kazatel z Olomouce, který dojížděl do
 pnika.

Přehled číselný:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
ředitel třídy	profesorů třídy			učitelů			supplentů		vedlejších učitelů		Počet všech učitelů		Dovolenou měli
VII.	VII.	VIII.	IX.	skuteč- ných	provi- sorních	tělo- cviku	zkou- šených	ne- zkou- šených	domá- cích	cizích	bez vedle- jších	s cizími vedle- jšími	
1	—	—	5	4	—	1	—	3	2	2	13 s ředi- telem 14	15 s ředi- telem 16	—

II. Osnova učebná.

A. V předmětech hlavních.

a) Látka učebná s přehledem hodin vyučovacích.

Vyučování ve školním roce 1903—1904 dělo se dle osnovy uč. stanovené výn. c. k. min. kultu a vyuč. 23. dubna 1898, čís. 1 a 30. srpna 1898, čís. 19.502, c. k. zem. šk. r. mor. 15. září a 7. 1898, čís. 10.291.

Vyučování povinnému tělocviku děje se dle osnovy, stanovené c. k. min. kultu a vyuč. 12. února 1897, č. 17.261 ex 1896 se zn. nařízenou c. k. min. kultu a vyuč. 10. května 1898, čís. 9.227 a zem. šk. r. mor. 6. června 1898, čís. 5.188.

Přehled učebných hodin.

Předměty	I	II	III	IV	V	VI	VII	Souh
Náboženství	2	2	2	2	2	2	2	14
Jazyk český	5	5	3	3	3	3	4	20
Jazyk německý	6	5	4	3	3	3	3	27
Jazyk francouzský	—	—	5	4	4	3	3	19
Zeměpis	3	2	2	2	—	—	—	9
Dějepis	—	2	2	2	3	3	3	15
Mathematika	3	3	3	3	5	4	5	20
Přírodopis	2	2	—	3	2	2	3	11
Chemie	—	—	—		3	2	—	5
Fysika	—	—	3	2	—	4	4	13
Měřičtví a rýsování, descriptivní geometrie	1	2	2	3	3	3	2	16
Kreslení	4	4	4	4	3	2	3	24
Krasopis	1	1	—	—	—	—	—	2
Tělocvik	2	2	2	2	2	2	2	14
Úhrnem	29	30	32	33	33	33	34	224

Přehled písemných úkolů:

e třídě	České	Německé	Francouzské	Mathe- matické
I.	Do vánoc týdně diktát. Potom měsíčně 4 úkoly t. j. 2 diktáty, 1 školní a 1 domácí střídavě.	Od vánoc do konce I. pol. 4 diktáty. Ve II. pol. 14 úkolů t. j. 7 diktátů a 7 školních střídavě.	—	Ve všech třídách v každém pololetí 4 práce školní; mimo to krátká cvičení domácí s hodiny na hodinu, jež se však neukládají, případně-li hodina vyučovací již na druhý den.
II.	Měsíčně 3 úkoly t. j. 1 diktát, 1 školní a 1 domácí střídavě.	Za pololetí 12 úkolů t. j. 4 diktáty, 4 domácí a 4 školní střídavě.	—	
III.	Za pololetí 8—9 úkolů střídavě školních a domácích.	Za pololetí 8 úkolů t. j. 2 diktáty, 3 školní a 3 domácí střídavě.	Od vánoc do konce I. polol. 4 diktáty. Ve II. pol. 12 úkolů t. j. 6 diktátů a 6 školních střídavě.	
IV.	Za pololetí 7 úkolů, střídavě školních a domácích.	Za polol. 7 úkolů t. j. 4 školní a 3 domácí střídavě.	Za polol. 9 úkolů t. j. 3 diktáty, 3 školní, 3 domácí střídavě.	
V.—VII.	Za pololetí 5—6 úkolů většinou domácích.	Za polol. 7 úkolů střídavě školních a domácích.	Za polol. 8 úkolů t. j. 4 školní a 4 domácí střídavě.	

Učebná osnova, předepsaná pro jednotlivé třídy a předměty, podrobně byla uveřejněna v šesté a sedmé výroční zprávě ústavu ve

školních rocích 1900—1901 a 1901—1902 a nebude se tudíž uveřejňovati.

b) Četba.

a) Čtené a memorované články.

1. V jazyku českém.

Ve třídě Ia. Z Bartošovy České čítanky pro první třídu pře-
vyloženo a z části reprodukováno 56 článků, z nichž memorováno
a přednášeno těchto 13: Hrob v cizině. (Přel. Fr. L. Čelako-
Lakomý a závistivý (Ant. Puchmajer). Vlaštovičky (Vladimír Šta-
stný). Zvony nedělní (Jos. V. Sládek). Kříž u lesa (Jos. V. Sládek). Zima
(Jos. V. Sládek). Ptáček v zimě (Moravská národ.). Vrabec a ků-
řák (Jar. Rubeš). Skřivánek (Jos. V. Sládek). Májový déšť (Jos. V. Slá-
dek). Pšenice (Vladimír Štastný). Domov (Jos. V. Sládek). Letní slunko
(Jos. V. Sládek).

Jaroslav Vejeř

Ve třídě Ib. Z Bartošovy České čítanky pro první třídu pře-
vyloženo a reprodukováno 57 článků, z nichž memorováno a
přednášeno těchto 15: 1. Vlaštovičky (Vlad. Štastný). 2. Křepel
podzim (Moravská národ.). 3. Lev a liška (Aesop). 4. Lev, vlk a
(Tolstoj). 5. Kovář (Svat. Čech). 6. Lev a myš (Tolstoj). 7. Domov
(Jos. V. Sládek). 8. Heřman z Bubna (S. K. Macháček). 9. Hrob v
(Ukrajinská). 10. Sv. Serapion (Vl. Štastný). 11. Vlaštovička (J.
Vinařický). 12. Ptáček v zimě (Moravská). 13. Ptáček u stodo-
ly (Al. Vinařický). 14. Anděl Páně (M. Čacká). 15. Zvony nedělní
(Jos. V. Sládek).

Jakub Mr.

Ve třídě II. Z Bartošovy České čítanky pro druhou třídu
čteno, vyloženo a reprodukováno 55 článků, a to: 2., 4., 6., 7., 10.,
12., 13., 16., 17., 19., 20., 23., 24., 25., 27., 28., 31., 32., 33., 36., 38.,
42., 45., 46., 48., 50., 51., 52., 56., 59., 61., 64., 66., 68., 70., 72., 75.,
79., 85., 86., 87., 89., 91., 92., 93., 95., 96., 97., 102., 113., 123.,
z nichž memorováno a přednášeno těchto 12: Čl. 19. Hrob v
skřivánka, čl. 23. Vrabčík, čl. 24. Naší konopce, čl. 27. Kajíc:
čl. 31. Zima, čl. 46. Dědeček a babička, čl. 48. Radost a žalost,
Štěstí I., čl. 70. Píseň, čl. 72. Motýli, čl. 106. Máj, čl. 127. V háji.

Vincene Vor.

Ve třídě IIIa. Z Bartošovy České čítanky pro třetí třídu
čteno a vyloženo 29 článků prosaických i básnických, z nichž me-
morováno a přednášeno těchto 9: 1. Ve změnách života (Slá-
dek). 2. Srdce (Sládek). 3. Legenda o Pánu Ježíši (Sv. Čech). 4. Vinet:
Čech). 5. Návrat z Palestiny (Jan z Hvězdy). 6. List (Vocel). 7.
a lesy (Klásterský). 8. Večerní (Hálek). 9. Kačena divoká (Česká národ.)

Václav Vobo.

Ve třídě IIIb. Z Bartošovy České čítanky pro třetí třídu
čteno a vyloženo 38 článků prosaických a básnických; memorováno
a přednášeno těchto 11 básní: 1. Jeseň (J. V. Sládek). 2. Ballad:
nická (J. Vrchlický). 3. Kačena divoká (Česká). 4. Ve změnách
(J. V. Sládek). 5. Učitelé moudrosti (Vl. Štastný). 6. Vánoční (Sv. Čech)

Blaze duši (Sv. Čech). 8. Zimní (J. Vrchlický). 9. List (J. E. Vocel).
Večerní (V. Hálek). 11. Poli a lesy (Ant. Klášterský).

Antonín Dvořák.

Ve třídě IV. Z Bartošovy České čítanky pro čtvrtou třídu přememorováno a rozebráno 40 článků prosaických a básnických, z nichž
1. Podzimní den (J. Vrchlický). 2. Ballada dětská (J. Neruda). 3. Nekonečný vesmír (J. Neruda).
Vyšehradu (E. Krásnohorská). 5. Píseň rolníkova (Sv. Čech). 6. Město
(J. Neruda). 7. Kamenný mnich (V. Štastný). 8. Tři doby v zemi
ké (B. Jablonský). 9. Tři pěvci (J. Vrchlický). 10. Vyslouzilec (Sv. Čech).

Bedř. Dušek.

Ve třídě V. Z Malé Slovesnosti od Bartoše, Bílého a Čecha přememorováno a vyloženo 78 článků. Z Výboru z literatury řecké a římské čteno
rykládáno z Iliady 5, z Odysseie 3 čl. Memorováno a přednášeno
lo těchto 9 básní: 1. Smrt (Moravská). 2. Se srdcem rekovým (J. Ne-
la). 3. Z písní »V přírodě« (V. Hálek). 4. Dívčí žalost (Česká). 5.
»Večerních písní« (V. Hálek). 6. Z »Kosmických písní« (J. Neruda).
Touha po domově. (Sv. Čech). 8. a 9. Dagmar, Hra o nevěstu (2 místa:
v. a 48 v.). Mimo to přečteny a vyloženy z Čechovy Dagmary
I., II., V., VII.

Antonín Dvořák.

Ve třídě VI. Z Výboru z literatury české doby staré od J. Pel-
na: Nejstarší písně duchovní. Z Alexandreidy I. zpěv verš 130.—275.,
2.—480., II. zpěv v. 438.—493., zpěv III. v. 41.—110., zpěv V. verš
—88. Z legendy o sv. Kateřině verš 145.—185., 240.—397. Bájka o lišce
džbánu. Ze Satir o řemeslnících: O konšelech nevěrných. Z kroniky
lemilovy: Předmluva. O Libušinu proroctví. Ot sedlské knieně Bo-
ny. Ot násilí, ježto král pánóm českým činil. Píseň Závišova. Z Nové
dy. Podkoní a žák. Z povídky o Alexandru Velikém (kapitola 110.
114.) Ze Životopisu Karla IV. Z Passionálu. Z Řečí besedních kap. 9.
26. — Z Výboru z literatury české doby střední od Jos. Grima: Hus,
Dcerky, z listů. Chelčický, z výkladů. Staří letopisové: Zpráva o smrti
že Jana Želivského. Z knihy Tovačovské: O sedání pauském. Z které
ičiny dsky psány počaty česky. O čtení desk nahlas. O schování
se desk. Z Knih devaterých: O sídu zemském, jak má osazen býti.
výbornosti starých práv českých. Dsky zápisné dvoje. Z Kroniky
ražské: O Paškovi a Hlavsovi. Z Kroniky Hájkovy: Svatoboje, krále
oravského, trest a pokání. Z Kosmografie: O Praze (část). Z Herbáře
atholiho: O jesenu. Z Muziky Blahoslavovy: Zprávy k samým věcem
ležitě. Z Filippiky proti misomusům. Z Předmluvy ke kronikám dvěma.
Kroniky Eneáše Sylvia: Obléhání Jana Roháče na Sioně. Z Diadochu:
mrt Mikuláše Zrinského. Ze Života Viléma z Rožmberka: O alchy-
istech. Z cestopisu Křištofa Haranta z Polžic: O našem se po městě
airu procházení. Z Příhod Vratislavových: Z Adrianopole do Cařihradu.
terak poselstvo císařské v Cařihradě bylo zajato. Vratislav se sou-
ruhy propuštěn z vězení. Z Žerotínovy Apologie. Z Historie církevní
avla Skály ze Zhoře: Příhoda jičínská. Z Komenského Didaktiky:
ozložení cvičení mládeže podle stupňů věku lidského na 4 školy.
Kšaftu. — Memorováno: 1. Hospodine pomiluj ny. 2. Svatý Václave.
Z Alexandreidy II. 438.—493 4. Řeč Rokycanova z básně Žižka od

Svat. Čecha. 5. Štítný, Srovnání světa s knihou. 6. Z Apologie Žtínovy: O zpuštění země moravské. 7. Ze Kšaftu J. Am. Konškého.

Václav Voborný

Ve třídě VII. Z Výboru z literatury české doby nové od Truhláře čteno: Pelcl: O založení staré Boleslavě. Puchmajer: Óda likosti božské. Pokorný lev. Pěnice a slavík. Jan Nejedlý: Lodí a žádosti. Jungmann, ze Ztraceného ráje: Vstup. Probuzení Satana. Slovesnosti: O postavení a úloze českého spisovatelstva. Jan Kolár: Na zříceninách severního Slovanstva. Ze Slávy Dcery. Šafařík, ze Slovanských Starožitností: Příčiny chudosti zpráv o Staroslovanech. Pátek, z Dějin: O dějinách českých. Čelakovský, z Ohlasu písní ruských: Opuštěná. Z Ohlasu písní českých: Toman a lesní panna. Zmizelá dívka. Z Růže stolisté. Z Epigrammů. Hálek: Zlatá babička. Z básně »V přírodě«. Neruda: Před fortanou Milosrdných. Matičce. Ballada o šijové. Ball. dětská. Z Písní kosmických. Z Prostých motivů. Heyduk: Pozor na křídélka. Z Dědova odkazu. Zeyer: ze Zpěvu o pomstě Igora. Sládek: Rodné brázdy. Vzchop se k žití! Sv. Čech: z Petrklíše: Mrtvým vlastencům. Krásnohorská: Důvěra. Vrchlický: Thorwaldsův Stín. Tomek: Obecné učení pražské za času Karla IV. Brandl: Z charakteristiky Dobrovského. Bartoš: O duchu národním. Gebauer: z Historické mluvnice jazyka českého. Memorováno: 1. Makbeth, jednání 5. 2. Kollár, Na zříceninách severního Slovanstva. 3. Čelakovský, Potem, krví svatá země . . . 4. Čelakovský, Bujný oř jest mluva naše. 5. Hálek, O jak že bys, ty stará horo . . 6. Hálek, By kvítka umluvit . . . 7. Neruda, Před fortanou Milosrdných. 8. Sládek, Rodné brázdy.

Václav Voborný

2. V jazyku německém.

Ve třídě Ia. a Ib. Z Říhovy Německé mluvnice a čítanky přeloženo, přeloženo a obměnami a otázkami procvičeno 56 cvičení. Memorovány a přednášeny básničky, články, anekdoty, rozmluvy a některé rčení: 1. Gesundheitsregel. 2. Der schlaue Hans. 3. Auf den Tod eines Affen. 4. Zum Abzählen. 5. Das Korn. 6. Der Hirsch und die Mücke. 7. Vergissmeinnicht. 8. An die Quelle. 9. An den Freund. 10. Hänschen Schlief. 11. Die Finger. 12. Das Kindesherz. 13. Morgengebet. 14. Ein Märchen. 15. Goldkäfer. 16. Glückwunsch. 17. Die Lerche und der Spatz. 18. Der Tannenbaum. 19. Österreichische Volkshymne. — Z oddílu II. (anekdoty, bájky atd.): 1., 2., 3., 4., 7. Ein vernünftiger Grund. 8. Gleiche Wesen. 9. Wie heiszeit du? 10. Zwei fleiszige Bediente. 11. Ein unfehlbares Mittel. 12. Nach dem Neuen Jahre. — Z oddílu III. (rozmluvy): 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9., 10., 11., 12., 13., 14., 15., 16., 17., 18., 19., 20., 21., 22., 23., 24., 25., 26., 27., 28., 29., 30., 31., 32., 33., 34., 35., 36., 37., 38., 39., 40., 41., 42., 43., 44., 45., 46., 47., 48., 49., 50., 51., 52., 53., 54., 55., 56. — Z oddílu V. (hádanky): 1.—16., 18., 19., 22., 25., 26., 31. — Z oddílu VI. (příslloví): 1.—3. — Z oddílu VII. (rčení): O zdraví, o nemoci, o počasí, prošení, díky, omluvy atd., ve škole. Z oddílu X. (písně): 1. Tannenbaum.

Jaroslav Vejchoda—Rudolf Koun

Ve třídě II.: Z Říhovy Německé mluvnice a čítanky pro nižší třídy středních škol přečteno, přeloženo a reprodukováno 58 článků z nichž memorováno a přednášeno těchto 23: 1. Da hast ein Gulden. 2. Der Frosch. 3. Im Mai. 4. Das schlaue Hänschen. 5. Der Knabe und der Papagei. 6. Der Blinde und das Licht. 7. Der Knecht im Schatten. 8. Der arme Mann und der Dieb. 9. Der Kaufmann u

Seemann. 10. Die Nusz. 11. Die Biene und die Taube. 12. Ent-
von Karlsbad. 13. Der kranke Knabe. 14. Der Jahrmart. 15. Der
an seinen Sohn. 16. Unreifes Obst. 17. Ein Brief. 18. Die blaue
1. 19. Anekdoty č. 3., 4., 6. 20. Die Biene und die Taube. 21. Das
bare Kräutlein. 22. Der betrogene Esel. 23. Der Wolf und das
mlein.

Vincenc Vordren.

Ve třídě III a. Z Říhovy Německé mluvnice a čítanky pro nižší
škol středních přečteny a procvičeny 62 články, z nichž memo-
no a přednášeno bylo zvláště těchto 21: 1. Der Aufstand der
rn 1525. 2. Gerechte Strafe. 3. Wallenstein. 4. Kaiser Josef II.
in Krankenbesuch. 6. Hochmut kommt vor dem Falle. 7. Bohumil
Heinrich. 8. Die Stadtmaus und die Feldmaus. 9. Die wilde Ziege.
Der betrogene Esel. 11. Der Wolf und das Lämmlein. 12. Der Wolf,
Fuchs und der Kranich. 13. Der Fuchs und der Bock. 14. Der Köhler
der Bleicher. 15. Die beiden Ziegen. 16. Der blinde und das Licht.
Der Knecht im Schatten. 18. Der arme Mann und der Dieb. 19. Der
mann und der Seemann. 20. Die Nusz. 21. Die Biene und die Taube.

Václav Voborník.

Ve třídě III b. Z Říhovy Německé mluvnice a čítanky pro nižší
škol středních přečteno, přeloženo, vyloženo a reprodukováno
článků německých, z nichž memorováno a přednášeno těchto
1. Der Aufstand der Bauern 1525. 2. Gerechte Strafe. 3. Wallenstein.
aiser Josef II. 5. An die Quelle. 6. Antwortschreiben. 7. Ein Kranken-
ch. 8. Die Himmelsgegenden. 9. Hochmut kommt vor dem Falle.
Die Stadtmaus und die Feldmaus. 11. Die Fledermaus. 12. Der Fuchs
die Trauben. 13. Die Grille und die Ameise. 14. Der Rabe und
Fuchs. 15. Die wilde Ziege.

Antonín Dvořák.

Ve třídě IV. Z Říhovy Německé mluvnice a čítanky pro nižší
škol středních přečteno, přeloženo, vyloženo a reprodukováno
článků německých, z nichž memorováno a přednášeno těchto
1. Karl der Grosse. 2. Aus der Mythologie der Germanen. 3. Die
eren Bewohner Deutschlands 4. Der Fuchs und der Tiger. 5. Der
kuck. 6. Die Grille und die Ameise. 7. Der Löwe und der Wolf.
Der Star. 9. Die Suppe. 10. Der Regen. 11. Der Nagel. 12. Kaiser
f II. als Arzt. 13. Die wilde Ziege. 14. Der betrogene Esel. 15. Der
e und der Fuchs.

Antonín Dvořák.

Ve třídě V. Z Trnkovy knihy Deutsches Lesebuch für die V. u.
Klasse der Mittelschulen (2. přeprac. vyd.) čteno, vyloženo a repro-
ováno 30 článků prosaických a básnických. Z Veselíkovy Sbírký
lů ku překladům na jazyk německý (část I., pro V. a VI. tř.) pře-
no 16 článků: Memorováno a přednášeno těchto 8 básní a
iků: 1. Das Bächlein (Goethe). 2. Der Schatzgräber (Goethe). 3. Bel-
ar (Heine). 4. Schwäbische Kunde (Uhland). 5. Beherzigung (Goethe).
Wanderlied (Eichendorff). 7. Soldat und Sohn (Aus »Österreichs
tsche Jugend«). 8. Die Äxte (Meisner).

Antonín Dvořák.

Ve třídě VI. Z čítanky Ant. Trnky čteny články: Die Bürgschaft.
reas Hofer. Auf der Alm. Der Tod des heiligen Wenzel. Die Hoff-
ig, Bezirk, Land, Reich. Österreich-Ungarn. Das Glück und die

Weisheit Z knihy »Leitfaden zur Geschichte der deutschen Literatur von Kummer-Stejskal« čteno: Die Artussage, die Gralsage, obsah P. vala, das Nibelungenlied, Gudrun. Ze »Sbírky úkolů« od Dra K. selika přeloženy články: Pověst o Pešíkovi. Potopa světa. Mojžíš. H. děti. Třetí válka punská. Vzduch. Válka proti námořským loupežník. Moc a užitek vody. — Z Vepřkova výboru básní Schillerových a Goe vých čteny ve škole: Wanderers Nachtlid. Ein gleiches. Wer nie Brot mit Tränen ass. Mignon. Erlkönig. Der Fischer. Die wander Glocke. Der Zauberlehrling. — Memorováno těchto 7 básní: 1. Bürgschaft (Schiller). 2. Die Hoffnung (Schiller). 3. Das Glück und Weisheit (Schiller). 4. Wanderers Nachtlid (Goethe). 5. Ein gleich (Goethe). 6. Wer nie sein Brot mit Tränen ass (Goethe). 7. Erlkönig (Goethe).

Václav Voborný

Ve třídě VII. Z Trnkovy knihy Deutsches Lesebuch čteno článků. Přčtena a vyložena Lessingova Minna von Barnhelm (Šolcovo). Z Mourkovy Cvičebné knihy ku překládání z češtiny němčiny přeloženo čl. 10. Dále přčteny obsahy hlavních děl klas. 18. století z rukověti »Leitfaden zur Geschichte der deutschen Literatur od Kummera a Stejskala. Memorovány byly básně: 1. Österre Doppeladler (Körner). 2. Das Bächlein (Goethe). 3. Das Lied des Hi (Schiller). 4. Wo? (Heine). 5. Frühling (Seidl). 6. Schwalbenlied (Stu Mimo to memorovány životopisy nejčelnějších spisovatelů německ

Antonín Drobný

3. V jazyku francouzském.

Vé třídě IIIa a IIIb z Šubrtovy učebnice přčteny, přlož a reprodukovány všechny články, mezi nimi přloženo 12 článků jazyk francouzský. Memorováno a přednášeno těchto 22 článků: 1. La famille. 2. La maison. 3. La conduite de l'enfant sage. 4. Adotes (Louis XIV.). 5. L'été à la campagne. 6. Ce que le grand-p raconte à ses petits enfants. 7. Prions et travaillons. 8. Le couteau la fourchette. 9. Le dîner. 10. Mot d'enfant. 11. L'abeille et l'homme. 12. La prise de la ville. 13. Les métiers de Jeannot. 14. Anecdote (tailleur est condamné à mort). 15. La voix de Dieu, le doigt de Dieu. 16. La montre. 17. La création du monde. 18. A la gare du chemin de fer. 19. La consolation dans le malheur. 20. Le Notre Père ou Pater. 21. Chez l'épicier et chez soi. 22. L'avare à qui on a volé l'argent.

Rudolf Kout. — Frant. Jans

Ve IV. třídě. Ze Šubrtovy učebnice a čítanky francouzské dílu přčteno a vyloženo 61 článků francouzských; mimo to přloženo 17 článků českých na jazyk francouzský. Memorováno a přednášeno: 1. Lettre de Christophe Colomb. 2. Colbert. 3. L'avare, le volé et le philosophe. 4. Jeanne d'Arc à ses juges. 5. Don Quichotte et les galériens. 6. Le petit Pierre. 7. Don Quichotte et les fromages. 8. Don Quichotte et les lions. 9. Corneille en voyage. 10. Le roi de bonheur accompli. 11. Le Sicilien et la mer. 12. Une cuisine savante. 13. Le tambour major. 14. Propos de Socrate. 15. Jupiter et la brebis. 16. Comment il faut faire l'aumône. 17. Le Bourgeois gentilhomme. 18. Kléber et les devoirs du soldat. 19. Comment l'empereur

poir I. conduisit un convoi funèbre. 20. Au plus grand poète de France. 21. L'agneau et le loup. 22. Ruse de peintre. *Fr. Jansa.*
 Ve třídě V. Ze Šubrtovy učebnice a čítanky francouzské III. dílu eno, přeloženo a reprodukováno článků 46 (osm básní). Ze Šubr-Chrestomathie française vyloženo 40 článků, a to: 1. Fables, 1, 2, 5, 6, 7; — II. Faits historiques: 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 6; — III. Narrations: 9, 14; IV. Histoire: 11, 15, 17, 29; — Géographie: 10; — VI. Sciences naturelles: 6, 7, 8; VII. Lecture e: 9, 12; — VIII. Lettres: 5, 10; X. Haranques et discours: 7; Poésie didactique: 4, 5, 6; — XIII. Poésie lyrique: 5, 15, 18. Memorováno a přednášeno bylo 10 básní: 1. L'abeille et l'ermi (Jussieu). 2. Le renard et la cigogne. 3. Tristesse. 4. Les sous du peuple (Béranger). 5. Tout-puissance du Dieu (Racine). 6. La et le bûcheron (Lafontaine). 7. L'aveugle et le paralytique (Flo-8. L'enfant et la grand-mère (Ratisbonne). 9. L'enfance (Hugo). a cigale et la fourmi (Lafontaine).

Vincenc Vordren.

Ve třídě VI. Ze Šubrtovy učebnice a čítanky francouzské III. dílu eno, přeloženo a reprodukováno 15 článků (§§ 12—27). Ze Šubrtovy stomathie française vyloženo 32 článků: II. Traits historiques: 3, , 16; III. Narrations: 3, 9, 14; — IV. Histoire: 6, 8, 13, 16, 25, 8; — V. Géographie: 6, 13, 15. — VII. Lecture morale: 1: Pascal, aire, Mme de Staël, Chateaubriand; 11, 12; — VIII. Lettres: 3, 4. — X. Haranques et Discours: 7; XI. Poésie épique: 6. — XII. Po-didactique: 7, 9; — XIII. Poésies lyrique: 1, 7, 8, 9, 16, 17; — Poésies dramatique: 1. Le Cid (Acte I., scènes III.—V., Acte II., e II.) Memorováno a přednášeno bylo článků 7: 1. Napoléon or Hugo). 2. La mort du loup (Vigny). 3. Deux chemins (Musset). a prière (Lamartine). 5. Les éléphants (Leconte de Lisle). 6. La ite (Lamartine). 7. Le chêne et le roseau (Lafontaine).

Vincenc Vordren.

Ve třídě VII. Ze Šubrtovy učebnice a čítanky francouzské dílu přečteno, přeloženo a reprodukováno 10 článků (25—35). Ze Šu-zy Chrestomathie française vyloženo 21 článků: III. Narrations: 12; Histoire: 3, 5, 7, 19, 21, 26; — V. Géographie: 4, 6; — XI. Poésie ue: 1, 2, 4, 6. XII. Poésie didactique: 1; — XIII. Poésie lyrique: 9, 12, 14, 16; — XIV. Poésie dramatique: Andromaque (Acte IV., e III. — Acte V, scène III.) Memorováno a přednášeno těchto článků: 1. Napoléon (Hugo). 2. Les embarras de Paris (Boileau). 3. La e pour tous (Hugo). 4. Le retour aux champs paternels. 5. L'Avare e IV., scène 7.). 6. La Saint Barthélemy (úryvky, Voltaire).

Vincenc Vordren.

β) Souvislá četba celých děl ve škole.

1. V jazyku českém.

Ve třídě V.: Svat. Čecha Dagmar. (I., II., V., VII. zpěv.)

Ve třídě VI.: Komenského Labyrint světa a ráj srdce. Vydal Bílý.

Ve třídě VII.: Makbeth od W. Shakespeara, přeložil J. V. Sládek. 1. vydání J. Bartochy.

2. V jazyku německém.

Ve třídě VI.: Goethe, Hermann und Dorothea, zpěv 1., 2.,

Ve třídě VII.: Lessing, Minna von Barnhelm, vydání Lea Čecha.

3. V jazyku francouzském.

Ve třídě VII.: Čten a vyložen: Molière, L'avare.

γ) Soukromá povinná četba.

1. V jazyku českém.

Ve třídě V. Dagmar: III., IV., VI. (Sv. Čech), Čerkes (Sv. Čech), Hanuman (Sv. Čech), Legenda o sv. Proch (Jar. Vrchlický), Pohorská vesnice (B. Němcová), Pan Amanuensis venku (Fr. J. Rubeš).

Ve třídě VI. J. Zeyer, Radúz a Mahulena, Vrchlický, Kytka ba romanci, legend. Čelakovský, Ohlas písní českých. Čech Sv., Jes contra Hrdlička. Jirásek, V cizích službách. Jirásek, Psohlavci.

Ve třídě VII. Bozděch, Baron Goertz. Jirásek, Emigrant. Sv., Slavie. Mácha, Máj. Kabelík, Výbor z prosy J. Nerudy. Vrchl Kytka lyriky.

2. V jazyku německém.

Ve třídě V. Grimm, Kinder- und Hausmärchen (Reclams A Prosch und Wiedenhofer, Die deutsche Heldensage. (Graesers Ver

Ve třídě VI. Schillers und Goethes Gedichte. (Auswahl). V Kl. Vepřek. Goethe, Dichtung und Wahrheit (Aus dem ersten Bu Vyd. Graeserovo. Goethe, Reineke Fuchs (Graeser). Goethe, Hermann und Dorothea, části ve škole nečtené.

Mimo to přečteny soukromě od žáků: Lessing, Minna von Barnhelm — četli: Bartoň, Baumgartl, Blaha, Cerha, Halla, Ku Tauber. Lessing, Emilia Galotti — Novák, Vaculík Method. Lessi Nathan der Weise — Choleva. Wieland, Oberon — Live Machanec. Herder, Cid — Hrabal, Ministr, Vaculík Fr. Goet Goetz von Berlichingen — Dohnal, Jarošek. Goethe, Egmont — Homolka, Jalůvka. Goethe, Torquato Tasso — Pečiva. Sch ler, Wallenstein — Marek. Schiller, Maria Stuart — Hap Hrubec, Malatík, Uhlíř. Schiller, Die Jungfrau von Orleans. Pešek, Sychrovský, Študent, Laštovica. Schiller, Die Braut v Messina — Fárek, Richter, Schiller, Wilhelm Tell — Grego Chalupa, Solař.

Ve třídě VII. Goethe, Iphigenie auf Tauris. Jednotlivě če Herder, Cid; Černý Hub., Wieland, Oberon: Černý Hub., K Oldř., Panák Nik., Štěpán Jan; Lessing, Emilia Galotti: Do Ludv., Hanslian Al., Hlavička Jan, Kolář Oldř.; Nathan der We Dolník Jul., Doubravský Jan, Zumbal Jos.; Goethe, Götz von B lich: Bubela Lad., Doubravský Jan, Hlavička Jan, Krečmer Fra Palla Jos.; Egmont: Bek Met., Bubela Lad., Filípek Lad.; Faust Hýža Jarosl., Livečka Rud., Palla Jos., Panák Nik., Sviták Jar Reineke Fuchs: Fuksa Jos.; Schiller, Räuber: Hanslian

ký Václ., Šrom Frant.; Jungfrau von Orleans: Filípek Lad., Jarosl., Pacula Bedř., Palla Jos., Pařízek Qu., Tichák Ot., Valášek
 Braut von Messina: Dobeš Ludv., Horák Em., Karel Jan, Kubík
 Pařízek Qu., Tichák Jarosl., Zumbal Jos.; Maria Stuart: Dohnal
 Dolník Jul., Dostálík Jos., Novák Al.; Wallenstein: Bek Met.,
 Jan, Skříčka Stan.; Wilhelm Tell: Bek Met., Dohnal Jos.,
 lík Jos., Klevar Jan, Kojecký Frant., Novák Al., Skříčka Stan.,
 Jarosl., Šrom Frant.; Shakespeare-Schiller, Macbeth: Ko-
 Frant., Kojecký Václ.; Grillparzer, Ahnfrau: Hanslian Al.,
 Em.; Libuša: Hýža Jarosl.

3. V jazyku francouzském.

Ve třídě VI. Všichni žáci četli: Contes Populaires (vydal pro-
 Kubín). »Les aventures du dernier Abencerage«, par Chateaubriand.
 Ve třídě VII. Všichni žáci četli: »Le verre d'eau«, comédie par
 e. »Un philosophe sous les toits«, par Souvestre.

c) Úkoly k písemným pracím ve vyšších třídách a řečnickým cvičením v VII. třídě.

1. V jazyku českém.

Ve třídě V.

a) Domácí práce.

1. Podzim (Líčení).
2. Čtyři věky lidské (Rozprava).
3. Původ skřivánka (Vypravování dle básně Sv. Čecha).
4. Jen na tom drahém srdci mateřském
 i neštěstí a vina sladce dřímá (Úvaha).
5. Hrabě z Habsburka (Vypravování dle básně B. Schillera).
6. Život v zimě (Vypravování z Legendy o sv. Prokopu).

b) Školní práce.

1. Užitek stromů ovocných (Rozprava).
2. Štědrý den na venkově (Líčení).
3. Příchod jara (Líčení).
4. Osudy polabských Slovanů (Vypravování; z Dagmary Sv. Čecha).
5. Gurre (Líčení; z Dagmary Sv. Čecha; práce postupná).

Ant. Drožák.

Ve třídě VI.

a) Domácí práce.

1. Pád Vinety (Líčení dle II. zpěvu básně Čechovy Dagmar).
2. Zrak a sluch (Rozprava).
3. Poesie vánoční (Úvaha).
4. Vznik Jednoty českobratrské (Rozprava).
5. Domněnky o podstatě tepla (Rozprava).
6. Komenského hlavní zásady výchovatské (Rozprava).

b) Školní práce.

1. Radúz a Mahulena (Vypravování dle Julia Zeyera).
2. Podkoní a žák (Rozbor).
3. O svítiplynu (Rozprava).
4. Hrdinská smrt Mikuláše Zrinského (Vypravování dle četby české).

Práce postupní: Kterými přednostmi vyniká Jiráskův román zích službách?»

Václav Vol

Ve třídě VII.

a) Domácí práce.

1. Poesie jeseně (Líčení).
2. Jaké výhody a nevýhody má dramatické zpracování látky epickému (Příklad).
3. Jednota děje v Bozděchově tragoedii »Baron Goertz« (Rozbor).
4. O zhoubných a prospěšných účincích války (Úvaha).
5. Zlomení moci turecké zbraněmi rakouskými (Vypravování).
6. Universita pražská za času Karla IV. (Pojednání dle V. VI. T.

b) Školní práce.

1. Makbeth (Stručný obsah Shakespearovy tragoedie).
2. Příčiny chudosti zpráv o Staroslovanech (Rozprava dle P. fařika).
3. Záhuba Korostěnu (Líčení dle J. Zeyera).
4. O českém jazyku (Pojednání dle J. Gebauera).

Práce maturitní: Přírodní dary říše rakousko-uherské (Rozprava)

Václav Vob

Řečnická cvičení ve třídě VII.

1. Iv. Al. Gončarov a jeho román Oblomov (Bek). 2. L. M. (Bubela). 3. Vítězslav Hálek (Černý). 4. Palacký jako dějepisec (Dobrota). 5. Nástin logiky (Dohnal). 6. Jos. Jungmann (Dolník). 7. Karel Ha (Dostalík). 8. Jul. Zeyer (Doubravský). 9. Bedřich Smetana a jeho buše (Filípek). 10. P. Jos. Šafařík (Fuksa). 11. O poesii J. N. (Halla). 12. Jos. Dobrovský (Hanslian). 13. O poesii Svat. Čecha (vička). 14. O těsnopise (Horák). 15. Z dějin studentstva (Hýža). 16. Sv. Machar (Karel). 17. O řecké filosofii (Klevar). 18. Jos. Jung (Kojecský Fr.) 19. Meč, kniha, rádlo (Kojecský Václ.). 20. O populá (Kojecský Václ.). 21. Řeč na rozloučenou (Krečmer). 22. Mánes a (Kubík). 23. Smetanův Dalibor (Livečka). 24. Ign. Krasicki (Ne (Kojecský Václ.). 25. K. Havlíček (Pacula). 26. Lord Byron (Palla). 27. O vývoji vzdu (Kojecský Václ.). 28. Sv. Čech (Pařízek). 29. Iv. S. Turgeněva Šlech (Kojecský Václ.). 30. Dopravní prostředky od nejstarších dob (Sv. (Kojecský Václ.). 31. Počátky velké revoluce francouzské (Šrom). 32. Jiří z Podě (Kojecský Václ.). 33. Al. Jirásek (Tichák Jarosl.). 34. Přemysl Otakar II. (Til (Kojecský Václ.). 35. Ad. Heyduk (Valášek). 36. Bož. Němcové Pohorská ves (Zumbal).

2. V jazyku německém.

Ve třídě V.

a) Domácí práce:

1. Das Hufeisen (Übersetzung).
2. Belzazar (Nach Heines Gedicht).
3. Die Ähren (Frei erzählt).
4. Des Demosthenes Scharfsinn (Frei erzählt).
5. Orestes (Übersetzung).
6. Horymírs Sprung (Übersetzung).
7. Die Sündflut (Frei erzählt).

b) Školní práce:

1. Soldat und Sohn (Nacherzählung).
2. Die Ehrlichkeit eines Landboten (Nacherz.).
3. Die Vaterlandsliebe (Nacherz.).
4. Schwäbische Kunde (Nach Uhlands Gedicht).
5. Der Zirknitzer See (Beschreibung).
6. Fuchs und Krebs (Nacherz.).
7. Die Uneinigkeit (Frei erzählt).
8. Drei Fabeln vom Esel (Erzählung; Versetzungsarbeit).

Ant. Dvořák.

Ve třídě VI.

a) Domácí práce.

1. Die Bürgschaft (Nach Schiller).
2. Andreas Hofer (Nacherzählung).
3. Die Alpenwirtschaft in Kärnten (Reproduction).
4. Der Tod des heil. Wenzel (Nacherzählung).
5. Schicksal und Anteil (Inhaltsangabe des 1. Gesanges von »Hermann und Dorothea«).
6. Hermanns Besuch im Hause des reichen Kaufmanns (Nach Gesänge von »Hermann und Dorothea«).
7. Der kroatische Leonidas (Erzählung).

b) Školní práce.

1. Das Schwert des Damokles (Übersetzung).
2. Das Bein im Wappen (Freie Wiedergabe).
3. Moses (Übersetzung).
4. Theseus (Übersetzung).
5. Die Sintflut (Übersetzung).
6. Die Kraniche des Ibykus (Inhaltsangabe). Anmerkungen zu dem ichte (Übersetzung).

7. Die Luft (Übersetzung).
- Postupní práce: Der Graf von Habsburg (Nach Schiller).
non (Übersetzung).

Václav Voborník.

Ve třídě VII.

a) Domácí práce.

1. Maximilian II. (Übersetzung).
2. Svatopluk und seine drei Söhne (Frei erzählt).

3. Wolf, Fuchs und Esel (Frei erzählt).
4. Der Ursprung der Lerche (Nach dem Gedichte »Pův
vánka« von Sv. Čech).
5. Graf Kaplíř von Sulevic (Übersetzung).
6. Der Mai (Schilderung).

b) Školní práce.

1. Minna von Barnhelm (I., 1. u. 2.; Inhaltsang.).
2. Minna von Barnhelm (I., 4.—7.; Inhaltsangabe).
3. Der Minnegesang (Abhandlung).
4. Der Kampf der Leipziger und der Schweizer (Abhandl.).
5. Joh. G. Herder (Abhandlung).
6. Franz Grillparzer (Abhandlung).
7. Der Einfluss der Sonnenstrahlen auf die Erde (Abhandl.).
8. Minna von Barnhelm (Abhandl.; Maturitätsarbeit).

Ant. J.

3. V jazyku francouzském.

Ve třídě V.

a) Domácí práce.

1. Charles XII blessé à Pultava (Reproduction).
2. Le public du Jardin des Plantes à Paris. (Reproduction).
3. Le Bouffon du roi Georges (Reproduction).
4. Les successeurs de Charlemagne (Traduction).
5. L'élève de Rubens (Reproduction).
6. Le serment du loup (Reproduction).
7. Racine dans sa famille (Traduction).
8. Diverses reparties (Traduction).

b) Školní práce.

1. Henri IV. et Sully.
2. Benjamin Franklin enfant (Dictée et version).
3. L'égoïste.
4. L'université de Prague (Traduction).
5. Croissade contre les Albigeois (Dictée et version).
6. L'assemblée des animaux pour choisir un roi (Reproduction).
7. De la lettre (Traduction).
8. Une lettre de commande.
9. Trois compagnons (Dictée et version; examen d'avance).

Vincenc Vl.

Ve třídě VI.

a) Domácí práce.

1. Le langage au moyen des signes (Reproduction).
2. L'esprit de la conversation (Traduction).
3. Le Noël.
4. Le géomètre et le traducteur (Traduction).
5. Les mœurs de la Grande Révolution (Reproduction).
6. Les moineaux (Traduction).

7. Le passage de Bérésina (Reproduction).
8. L'époque de Louis XIII.

b) Školní práce.

1. Sainte Geneviève (Reproduction).
2. D'une lettre de Racine (Dictée et version).
3. Tout est bien sortant des mains . . . (Rousseau; dictée et version).
4. Montaigne (Traduction).
5. La mort de Henri III. (Dictée et version).
6. Les nations (Traduction).
7. La France et l'Europe (Élisée Reclus; dicté et version).
8. La découverte de l'Italie (Michelet, dictée et version).
9. Les derniers moments de Louis XVI, d'après Lamartine (Reproduction, Examen d'avancement).

Vincenc Vordren.

Ve třídě VII.

a) Domáci práce.

1. La Gaule primitive (Reproduction).
2. L'automne.
3. Harpagon (Tel qu'il apparaît au I. acte).
4. Thème libre (Narration).
5. Molière et ses oeuvres (Résumé).
6. L'art de voyager (D'après Rousseau).
7. Le Panthéon de Paris (Traduction).
8. Le XVII. siècle (Reproduction).

b) Školní práce.

1. Le locataire irrésolu (Traduction).
2. Dernières pensées du grand Condé (Dictée et version).
3. Pascal, par Chateaubriand (Dictée et version).
4. Le czar Pierre le Grand à Paris (Traduction).
5. D'une lettre de Voltaire (Dictée et version).
6. Je forme une entreprise . . . , Rousesau, Confessions (Dictée et version).
7. Les universités allemandes, Mme de Staël (Dictée et version).
- Le Courtisan (Dictée et version). Examen de sortie.

Vincenc Vordren.

d) Knihy učebné pro školní rok 1904—5.

Schválené výnosem c. k. zemské školní rady ze dne 6. května 1904, č. 7093.

Třída I.

- Náboženství:** Šťastný, Učení katolického náboženství. Vydání 4.
Cena váz. 1 K 50 h.
- Jazyk český:** Gebauer, Krátká mluvnice česká. Pouze 3. vydání.
Cena váz. 2 K 50 h.
- Bartoš,** Česká čítanka pro I. třídu. Pouze 6. vydání.
Cena váz. 2 K 10 h.
- Pravidla** hledící k českému pravopisu a tvarosloví.
Pouze 2. vydání z r. 1903. Cena 1 K.

- Jazyk německý:* **Ríha**, Německá mluvnice a čítanka pro nižší škol středních. Pouze 2. vydání. Cena váz. 3 K.
Regeln für die deutsche Rechtschreibung, 2. vydání z r. 1903. Cena 1 K.
- Zeměpis:* **Kosina**, Učebnice zeměpisu všeobecného. Díl I. třídu. Vydání 2. Cena váz. 1 K 50 h.
Kozenn-Metelka, Zeměpisný atlas pro střední školy. Vydání 14. Cena váz. 8 K.
- Mathematika:* **Tůma**, Arithmetika pro I. třídu škol reálných. Vydání 2. Cena váz. 1 K 60 h.
- Měřictví:* **Jarolímek**, Nauka o tvarech měřických pro nižší škol reálných. Vydání 5. Cena váz. 1 K 10 h.
- Přírodopis:* **Polívka**, Živočichopis pro nižší třídy škol středních. Vydání 3. Cena váz. 2 K 90 h.
Polívka, Rostlinopis pro nižší třídy škol středních. Vydání 4. Cena váz. 3 K 10 h.
Polívka, Klíč k určování rostlin. Kniha pro učitele. Vydání 3. Cena 90 h.
- Zpěv a modlitby:* »**Chvalte Hospodina**«, Sbírká modliteb a písní pro studující mládež středních škol. Cena 1 K 60 h.

Třída II.

- Náboženství:* **Hrudička**, Liturgika pro střední školy. Vydání 1. Cena váz. 1 K 40 h.
- Jazyk český:* **Gebauer**, Krátká mluvnice česká. Pouze vydání 1. Cena váz. 2 K 50 h.
Bartoš, Česká čítanka pro II. třídu škol středních. Vydání 6. Cena váz. 2 K 80 h.
Pravidla hledící k českému pravopisu a tvaropisu. Pouze 2. vydání z r. 1903. Cena 1 K.
- Jazyk německý:* **Ríha**, Německá mluvnice a čítanka pro nižší škol středních. Vydání 1. Cena váz. 3 K 80 h.
Regeln für die deutsche Rechtschreibung, 2. vydání z r. 1903. Cena 1 K.
- Zeměpis:* **Kosina**, Učebnice zeměpisu všeobecného. Díl I. 2.—3. třídu. Vydání 1. Cena váz. 2 K 80 h.
Kozenn-Metelka, Zeměpisný atlas pro střední školy. Vydání 14. Cena váz. 8 K.
- Dějepis:* **Sembera**, Učebnice dějepisu všeobecného, díl I. Vydání 1. Cena váz. 1 K 90 h.
Putzger-Dušek, Historický atlas školní. Vydání 1. Cena váz. 4 K.
- Mathematika:* **Tůma**, Arithmetika pro II. třídu škol reálných. Vydání 1. Cena váz. 1 K 70 h.
- Měřictví:* **Jarolímek**, Geometrie pro nižší třídy škol reálných. Pouze vydání 4. Cena váz. 2 K 80 h.
- Přírodopis:* **Polívka**, Živočichopis pro nižší třídy škol středních. Vydání 2. Cena váz. 2 K 90 h.

Polívka, Rostlinopis pro nižší třídy škol středních. Vydání 3. Cena váz. 2 K 90 h.

Polívka, Klíč k určování rostlin. Kniha pomocná. Vydání 2. Cena 30 h.

v a modlitby: „**Chvalte Hospodina**“, Sbíрка modliteb a písní pro studující mládež středních škol. Cena váz. 1 K 60 h.

Třída III.

Náboženství: **Procházka-Vondruška**, Dějiny zjevení Božího ve St. Zákoně. Vydání 5. Cena váz. 3 K 28 h.

Jazyk český: **Gebauer**, Krátká mluvnice česká. Vydání 2. nebo 3. Cena váz. 1 K 70 h.

Bartoš, Česká čítanka pro III. třídu škol středních. Vydání 5. Cena váz. 3 K 10 h.

Pravidla hledící k českému pravopisu a tvarosloví. Pouze 2. vydání z r. 1903. Cena 1 K.

Jazyk německý: **Řiha**, Německá mluvnice a čítanka pro nižší třídy škol středních. Vydání 1. Cena váz. 3 K 80 h.

Regeln für die deutsche Rechtschreibung. Pouze 2. vydání z r. 1903. Cena 1 K.

Jazyk francouz. **Šubrt-Paulus**, Učebnice a čítanka francouzská, díl I. Vydání 4. Cena váz. 1 K 80 h.

Zeměpis: **Kosina**, Učebnice zeměpisu všeobecného, díl II. pro 2.—3. třídu. Vydání 1. Cena váz. 2 K 80 h.

Kozenn-Metelka, Zeměpisný atlas pro střední školy. Vydání 14. Cena váz. 8 K.

Dějepis: **Sembera**, Učebná kniha dějepisu všeobecného díl II. Vydání 1. Cena váz. 1 K 70 h.

Putzer-Dušek, Historický atlas školní. Vydání 3. Cena váz. 4 K

Mathematika: **Tůma**, Arithmetika pro III. třídu škol reál. Vydání 1. Cena váz. 1 K 50 h.

Měřictví: **Jarolímek**, Geometrie pro nižší třídy škol reál. Pouze vydání 4. Cena váz. 2 K 80 h.

Fysika: **Brož**, Fysika pro nižší reálky. Vydání 1. Cena 2 K 20 h.

v a modlitby: „**Chvalte Hospodina**“, Sbíрка modliteb a písní pro studující mládež středních škol. Cena 1 K 60 h.

Třída IV.

Náboženství: **Procházka-Vondruška**, Dějiny zjevení Božího v Novém Zákoně. Pouze vydání 5. Cena váz. 3 K.

Jazyk český: **Gebauer**, Krátká mluvnice česká. Vydání 2. nebo 3. Cena váz. 1 K 70 h.

Bartoš, Česká čítanka pro IV. třídu škol středních. Vydání 5. Cena váz. 2 K 70 h.

Pravidla hledící k českému pravopisu a tvarosloví. Pouze 2. vydání z r. 1903. Cena 1 K.

- Jazyk německý:* **Říha**, Německá mluvnice a čítanka pro nižší škol středních. Vydání 1. Cena váz. 3 K 80 h.
Regeln für die deutsche Rechtschreibung. 2. vydání z r. 1903. Cena 1 K.
- Jazyk francouz.:* **Šubrt**, Učebnice a čítanka francouzská, díl II. dání 3. Cena váz. 2 K 20 h.
- Zeměpis:* **Mayer-Braniš**, Zeměpis říše Rakousko-Uherské dání 1. Cena váz. 1 K 70 h.
Kozenn-Metelka, Zeměpisný atlas pro střední školy. Vydání 14. Cena váz. 8 K.
- Dějepis:* **Šembera**, Učebná kniha dějepisu všeobecného III. Vydání 1. Cena váz. 1 K 70 h.
Putzger-Dušek, Historický atlas školní. Vydání 4. Cena váz. 4 K.
- Mathematika:* **Taftl-Soldát**, Algebra. Vydání 6. Cena váz. 3 K 20 h.
Hromádka-Strnad, Sbírka úloh z algebry. Vydání 6. Cena váz. 3 K 20 h.
- Měřictví:* **Jarolímek**, Geometrie pro nižší třídy škol. Pouze vydání 4. Cena váz. 2 K 80 h.
- Fysika:* **Brož**, Fysika pro nižší reálky. Vydání 1. Cena váz. 2 K 20 h.
- Chemie:* **Matzner**, Základy chemie a mineralogie. Vydání 1. Cena váz. 1 K 70 h.
- Zpěv a modlitby:* »**Chvalte Hospodina**,« sbírka modliteb a písní studující mládež středních škol. Cena 1 K.

Třída V.

- Náboženství:* **Procházka**, Katolická věrouka. Vydání 3. Cena váz. 2 K 40 h.
- Jazyk český:* **Bartoš-Bílý-Čech**, Malá slovesnost. Vydání 8. Cena váz. 5 K 10 h.
Hrubý-Vaňorný, Výbor z literatury řecké a římské. Pouze vydání 4. Cena váz. 2 K 70 h.
Pravidla hledící k českému pravopisu a tvarosloví. Pouze 2. vydání z r. 1903. Cena 1 K.
- Jazyk německý:* **Trnka**, Deutsches Lesebuch für die V. und VI. Klasse. Pouze vydání 2. Cena váz. 4 K 80 h.
Roth, Německá mluvnice pro střední školy a ústřední učitelské. Vydání 1. Cena váz. 1 K 90 h.
Veselík, Sbírka úloh ku překladům na jaz. něm. část I. Cena váz. 1 K 40 h.
Regeln für die deutsche Rechtschreibung. 2. vydání z r. 1903. Cena 1 K.
- Jazyk francouz.:* **Šubrt-Paulus**, Učebnice a čítanka francouzská III. Vydání 3. Cena váz. 2 K 80 h.
Šubrt-Paulus, Chrestomatie française. Pouze vydání 2. Cena váz. 4 K 30 h.

- Dějepis:* **Kameníček-Dvořák**, Všeobecný dějepis pro vyšší třídy. Pouze vydání 2. Cena váz. 3 K.
Putzger-Dušek, Historický atlas školní. Vydání 3. Cena váz. 4 K.
Kozenn-Metelka, Zeměpisný atlas pro střední školy. Vydání 14. Cena váz. 8 K.
- Matematika:* **Taftl-Soldát**, Algebra pro vyšší třídy škol středních. Vydání 6. Cena váz. 3 K 20 h.
Hromádka-Strnad, Sbírka úloh z algebry. Pouze vydání 6. Cena váz. 3 K 20 h.
Valouch, Tabulky logaritmické doplněné tabulkami fyzikálními. Vydání 1. Cena váz. 2 K.
Mach, Sbírka geometrických příkladů pro vyšší třídy škol středních. Kniha pomocná. Vydání 2. Cena váz. 2 K.
Strnad, Geometrie pro vyšší třídy škol reálných, díl I.: Planimetrie pro V. třídu. Pouze vydání 3. Cena váz. 3 K.
- Descriptiva:* **Jarolímek**, Descriptivní geometrie pro vyšší třídy škol reál. Pouze vydání 4. Cena váz. 3 K 40 h.
- Přírodopis:* **Rosický**, Botanika pro vyšší třídy škol středních. Vydání 4. Cena váz. 3 K 30 h.
Zahradník, Analytické tabulky k určování nejdůležitějších rostlin cévnatých. Kniha pomocná. Vydání 3. Cena váz. 2 K.
- Chemie:* **Hofman**, Chemie minerální pro vyšší třídy reálné. Pouze vydání 6. Cena váz. 2 K.
- a modlitby:* »**Chvalte Hospodina**,« Sbírka modliteb a písní pro studující mládež středních škol. Cena 1 K 60 h.

Třída VI.

- Náboženství:* **Guggenberger**, Katolická mravouka. Vydání 1. Cena váz. 1 K 90 h.
- Jazyk český:* **Bartoš-Bílý-Čech**, Malá slovesnost. Vydání 8. Cena váz. 5 K 10 h.
Pelikán, Výbor z literatury české, doba stará. Pouze vydání 2. Cena váz. 3 K.
Grimm, Výbor z literatury české, doba střední. Pouze vydání 3. Cena váz. 3 K 40 h.
Pravidla, hledící k českému pravopisu a tvarosloví. Pouze vydání 2. z r. 1903. Cena 1 K.
- Jazyk německý:* **Trnka**, Deutsches Lesebuch für die V. und VI. Klasse. Pouze 2. vydání. Cena váz. 4 K 80 h.
Roth, Německá mluvnice pro střední školy a ústavy učitelské. Vydání 1. Cena váz. 1 K 90 h.
Veselík, Sbírka úloh ku překladům na jazyk německý, část I. Vydání 1. Cena váz. 1 K 40 h.

- Kummer-Stejskal**, Leitfaden zur Geschichte deutschen Literatur. Vydání 2. Cena váz. 1 K. **Regeln für die deutsche Rechtschreibung**. 2. vydání z r. 1903. Cena 1 K.
- Jazyk francouz.:* **Šubrt-Paulus**, Učebnice a čítanka francouzská. Vydání 3. Cena váz. 2 K 40 h. **Šubrt-Paulus**, Chrestomathie française. Pouze vydání 2. Cena váz. 4 K 30 h.
- Dějepis:* **Kameníček-Dvořák**, Všeobecný dějepis pro třídy škol střed., díl II. Pouze vydání 2. Cena 2 K 80 h. **Kameníček-Dvořák**, Všeobecný dějepis pro třídy škol střed., díl III. Vydání 2. Cena váz. 3 K. **Putzger-Dušek**, Historický atlas školní. Vydání 4. Cena váz. 4 K. **Kozenn-Metelka**, Zeměpisný atlas pro střední školy. Vydání 14., přípustno i 12. a 13. vyd. Cena váz. 4 K.
- Mathematika:* **Taftl-Soldát**, Algebra pro vyšší třídy škol. Vydání 6. neb 5. Cena váz. 3 K 20 h. **Hromádka-Strnad**, Sbíрка úloh z algebry. Vydání 6. Cena váz. 3 K 20 h. **Studnička**, Kapesní tabulky logoritmické. Vydání 7. Cena váz. 1 K 80 h. **Mach**, Sbíрка geometrických příkladů pro vyšší třídy škol střed. Kniha pomocná. Vydání 2. Cena váz. 3 K. **Strnad**, Geometrie pro vyšší třídy škol reál. Vydání 2. neb 1. Cena váz. 4 K 50 h.
- Descriptiva:* **Jarolínek**, Descriptivní geometrie pro vyšší třídy škol reálných. Pouze vydání 4. Cena váz. 3 K.
- Přírodopis:* **Bernard**, Přírodopis živočišstva pro vyšší třídy škol středních. Vydání 1. Cena váz. 2 K 80 h.
- Fysiká:* **Reis-Theurer**, Fysika pro vyšší reálky. Vydání 1. Cena váz. 4 K 90 h.
- Chemie:* **Matzner**, Chemie organická pro vyšší školy. Vydání 1. Cena váz. 1 K 40 h.
- Zpěv a modlitby:* »Chvalte Hospodina«, Sbíрка modliteb a písní studující mládež středních škol. Cena 1 K.

Třída VII.

- Náboženství:* **Pokoj**, Učebnice církevních dějin pro střední školy. Vydání 1. Cena váz. 2 K 24 h.
- Jazyk český:* **Bartoš-Bílý-Čech**, Malá slovesnost. Vydání 7., přípustno 6. a 5. vyd. Cena váz. 5 K 10 h. **Truhlář**, Výbor z literatury české, doba nová. Vydání 3. Cena váz. 4 K 80 h. **Pravidla** hledící k českému pravopisu a tvaropisu. Pouze 2. vydání z r. 1903. Cena 1 K.

- yk německý:* **Trnka**, Deutsches Lesebuch für die V. und VI. Klasse. Vydání 1. Cena váz. 4 K.
- Roth**, Německá mluvnice pro střední školy a ústavy učitelské. Vydání 1. Cena váz. 1 K 90 h.
- Veselík**, Sbírka úkolů ku překladům na jazyk německý pro vyšší třídy střed. škol, část I. Vydání 1. Cena váz. 1 K 40 h.
- Kummer-Stejskal**, Leitfaden zur Geschichte der deutschen Literatur. Vydání 2. Cena váz. 1 K 8 h.
- Regeln für die deutsche Rechtsehreibug.** Pouze 2. vydání z r. 1903. Cena 1 K.
- ik francouz:* **Šubrt-Paulus**, Učebnice a čítanka francouzská, díl III. Vydání 3. neb 2. Cena váz. 2 K 40 h.
- Šubrt-Paulus**, Chrestomathie française. Pouze vydání 2. Cena váz. 4 K 30 h.
- Dějepis:* **Kameníček-Dvořák**, Dějepis pro vyšší třídy škol středních, díl III. Vydání 2. Cena váz. 3 K 60 h.
- Tille-Metelka**, Statistika mocnářství Rakousko-Uherského. Pouze vydání 3. Cena váz. 2 K 40 h.
- Putzger-Dušek**, Historický atlas školní. Vydání 3. Cena váz. 4 K.
- Kozenn-Metelka**, Zeměpisný atlas pro střední školy. Vydání 14., přípustno 13. a 12. vyd. Cena váz. 8 K.
- Mathematika:* **Tafl-Soldát**, Algebra pro vyšší třídy škol středních. Vydání 6. nebo 5. Cena váz. 3 K 20 h.
- Hromádko-Strnad**, Sbírka úloh z algebry. Vydání 5. nebo 6. Cena váz. 3 K 20 h.
- Studnička**, Kapesní tabulky logarithmické. Vydání 7. nebo 6. Cena váz. 1 K 80 h.
- Mach**, Sbírka příkladův geom. pro vyšší třídy škol střed. Kniha pomocná. Vydání 2. Cena váz. 2 K.
- Strnad**, Geometrie pro vyšší třídy škol reál. Vydání 2. nebo 1. Cena váz. 4 K 50 h.
- Descriptiva:* **Jarolínek**, Descriptivní geometrie pro vyšší třídy škol reál. Pouze vydání 4. Cena váz. 3 K 40 h.
- Přírodopis:* **Šafránek**, Geologie pro VII. tř. reál. Pouze vydání 3. Cena váz. 2 K 20 h.
- Šafránek**, Nerostopis pro VII. tř. reál. Pouze vydání 2. Cena váz. 1 K 90 h.
- Fysika:* **Reis-Theurer**, Fysika pro vyšší reál. Vydání 3. nebo 4. Cena váz. 4 K 90 h.
- v a modlitby:* **Chvalte Hospodina**, Sbírka modliteb a písní pro studující mládež středních škol. Cena 1 K 60 h.

B. V předmětech vedlejších.

a) Praktická lučební cvičení v laboratoři.

I. oddělení. 2 hod. týdně. Rozpouštění a vylučování v různých rozpustidlech, jako ve vodě, líhu, kyselinách, amoniaku a v sírouhlíku. — Tvoření kyselých a zásaditých kyselin, sírníků, kyselin, zásad, solí působením kyslíku, síry, chloru, bromu a jodu. Redukce některých látek — zkoušení neústrojných látek za reakce chloru a chloridů, bromu a bromidů, jodu a jodidů, síry a selenidů; sírníků, siřičitanů, kyseliny sírové a síranů, kyseliny dusíkové a dusičnanů, kyseliny fosforečné a fosforečnanů, kysličníku arseničnanů a arseničnanů, kyseliny borové a boranů, kysličníku křemíku a uhličitanů, kyseliny křemičité a křemičitanů; sloučenin sodnatých, sodnatých, amoniatých, barnatých, strontnatých, vápenatých, železnatých, hlinitých, zinečnatých, kadmennatých, železnatých a železnatých, manganatých, chromitých, kobaltinatých, nikelnatých, cínatých a cínatých, vizmutových, antimonových, olovnatých, měďnatých, rtuťnatých a stříbrnatých v přiměřeném sestavení. — Zkoušení za sucha a v baničce, na uhlí, tavení se sodou a ledkem, zkoušky s perboraxovou, zbarvení plamene. — Kvalita slitin a obyčejných materiálů.

II. oddělení. Opakování jednoduché analýsy anorganických a organických kyselin, zásad a sloučenin; vyšetřování sloučenin kyanových; kvalitativní vyšetřování kyselin, dusíku, síry, fosforu a kovů v organických látkách; vyšetřování nejdůležitějších sloučenin ze řady mastné, z uhlohydrátů, benzolové, jako jest: chloroform, jodoform, chloralhydrát; alkoholový, ethylový a amylový; glycerin; ether ethylový; acetaldehyd; kyseliny mravenčí, octová, šťavelová, jantarová, vinná, citronová a citrónová soli; mýdla; cukry hroznový, mléčný, třtinový, dextrin, arabin, buničina, dřevovina; benzol, naftalin, anthracen; fenoly; nitrobenzol; anilin; kyseliny benzoová, salicylová, gallová a digallová. — Barvení pokusy s indychem, alizarinem a nejdůležitějšími barvivy dehtu.

b) Těsnopis.

I. oddělení. 2 hod. týdně. Pravidla pravopisná. Samohlásky, souhlásky a jejich spojování. Složky. Vypouštění samohlásek a souhlásek. Samoznaky. Koncovky. Předpony a koncovky slov cizích. Abbreviatury. Cvičení ve čtení a psaní.

II. oddělení. 2 hod. týdně. Krácení větní (doslovím, náslovím, středoslovím, krácení smíšené a logické). Interpunkce a znaménka interpunkce. Stavě nenáležející. Zkráceniny písma komorního. Diktáty písma komorního s rychlostí poněkud stupňovanou. Čtení písma kráceného.

V obou odděleních vyučovalo se na základě »Těsnopisu českého« a Pražákovy »Těsnopisné čítanky«.

c) Zpěv.

I. oddělení. 2 hod. týdně. O zpěvu vůbec; pravidla o zpěvu těla a dýchání při zpěvu. O tónech a notách. Výška tónů. Přehlídka.

jeho systému. Hlas lidský, jeho rozsah a rozdělení hlasů. Druhy tónů a taktů. Pomlky. Stupnice C dur. Intervaly. Posuvky. Tóny chromatické a enharmonické. Stupnice chromatická. Trojzvuk tonický, dominantní a subdominantní. Stupnice a moll. Trioly a duoly. Synkopy. Ligatura. Dle vzorů C dur—a moll tvořiti G dur—e moll, F dur—a moll, D dur—h moll, B dur—g moll. Národní písně.

II. oddělení. 2 hod. týdně (sopran, alt). Opakování a rozšíření elementární teorie roku minulého. Tempo, rytmus, dynamika a pomlky. Tvořiti stupnice všech tónin tvrdých i měkkých do 6 #. Tvořiti jejich tonické trojzvky a rozkládati je. Pivodovy solfeggio. 57. II. Ošetřování lidského hlasu a jeho změna. Písně národní. ry smíšené občas společně se III. odd.

III. oddělení. 2 hod. týdně (tenor, bas). Příležitostné doplňování teorie hudební. Čtení klíče basového. O barvě tónu a rejstřících tónových. Znaménka hudebního přednesu. Řady intervalové a melodické tónové škálové za účelem nabytí ohebnosti hlasu. Základy zpěvu vícehlasého. Mužské sbory. Příležitostné výklady z dějin hudby, zvláště popisů našich skladatelův. Národní písně. Smíšené sbory občas společně s II. odd.

d) Housle.

I. oddělení. 2 hod. týdně. Základní hudební pojmy s ohledem na housle. Noty. Klíč. Trvání not, pomlky, takt, celý tón a poltón. Cviky na prázdných, pak střídavě na dvou a na všech strunách. Cvičení o houslích. Držení těla, houslí a smyčce. Tvoření tónu. Tonina C dur. Malá, velmi snadná duetta.

II. oddělení. 2 hod. týdně. Opakování a doplňování počátečního oddělení. Fermata, trioly atd. Hra vázaná. Různé tahy smyčce. Tempo, posuvky, tóny chromatické, stupnice chromatická. Příslušná cvičení, duetta a písně národní.

III. oddělení. 2 hod. týdně. Staccato, cviky v různých tazích smyčce. Ligatura. Synkopa. Cviky prstové. Crescendo — decrescendo. Tonina tvrdá a měkká. Stupnice a tonina a-moll. Malý allabreve takt. Hra v G-dur, e-moll, F-dur, d-moll. Duetta z Malátových doplňků ke škole houslové.

IV. oddělení. 2 hod. týdně. Dvojhmaty v první poloze. Hra ostatních tóninách tvrdých i měkkých až do 6 b a 6 #. Stupnice do- a moll. Řady intervalové různými tahy v rozsahu první polohy. Duetta (nár. písně a hymny).

V. oddělení. 2 hod. týdně. Rozložené trojzvky tonické ve všech tóninách tvrdých i měkkých. Melodické ozdoby. Hra ve druhé a třetí poloze. Mařákova duetta z oper. Bradáčova houslová quartetta.

Žáci nejvyššího oddělení byli vesměs druhými houslisty žáků orchestru.

Ve všech odděleních užíváno školy Malát-Rauscharovy.

III. Sbírky učebné.

A. Příjmy a vydání roku škol. 1903—4.

Zápisné taxy a příspěvky žáků ve »statistickém přehledu sub. IV. v obnosu 925 K vykázané odvedlo ředitelství Školského spolku v Lipníku dle smlouvy ujednané se zemským výborem moravským.

a) Příjmy.

Dotace Školského spolku na učebné pomůcky . . . 1.657

b) Vydání.

1. Knihovna učitelská	360
2. Knihovna žakovská	199
3. Zeměpis	86
4. Fysika	400
5. Přírodopis	180
6. Lučba	218
7. Descriptiva	65
8. Kreslení	118
9. Zpěv a hudba	296

Úhrnem 1.657

Příspěvky na výlohy spojené se školním pěstováním cvičných her přijaté na počátku školního roku od 163 žáků 80 h . . . 130.40 K, od 11 žáků po 40 h . . . 4

Celkem 134

Příspěvky na potřeby k praktickým učebním cvičením v laboratoři: v I. pololetí 15 žáků po 6 K . . . 0
3 » » 3 » . . . 0
v II. pololetí 15 » » 6 » . . . 0
2 » » 3 » . . . 0

Celkem 19

B. Rozmnožení a stav sbírek.

I. Knihovny.

a) Knihovna učitelská.

Správce professor V. Voborník.

Dle odborů bylo na konci školního roku 1903-4

v oddělení	čísel	svazků	sešitů
I. Náboženství, paedagogika, filosofie	126	131	-
II. Čeština a jiné jazyky slovanské . .	284	303	14
III. Němčina	128	135	1
IV. Frančina a jiné cizí jazyky . . .	85	93	-
V. Zeměpis a dějepis	247	286	13
VI. Matematika a geometrie	104	121	-

Přírodní vědy	266	284	66
Umění	23	27	25
Encyklopaedie a díla České Akademie	271	349	206
Časopisy a knihy různého obsahu	349	234	977
Úřední věstníky a příruční knihy	87	89	27
Úhrnem	1970	2052	1567

Přibýlo letošního roku:

a) Koupí:

1. Časopisy letošní a kontinuace: Verordnungsblatt des eriums für Kultus und Unterricht. Zeitschrift für das Realschul-Lehrproben und Lehrgänge aus der Praxis der Gymnasien und hulen. Časopis Musea království českého. Listy filologické. Český a historický. Živa. Český lid. L'éducation Mathématique. Journal thématiques élémentaires. Zeitschrift für Zeichen- und Kunstunterricht. Věstník cvičitelský. Tělesná výchova. Časopis pro veřejné zdravotví. — Gebauer, Slovník staročeský. Herzer, Českoněmecký slovníček, Dějiny české literatury. Lacina, Obecná kronika. Bezděk, jedlé a jim podobné jedovaté. Kerner von Marilaun, Pflanzen-Matschie, Bilder aus dem Tierleben.

2. Spisy ukončené: Viehoff, Die Poetik. Jan Kollár, Staroislavjanská Atlas k témuž spisu. Grillparzer: Sapho. König Otto-Blück und Ende. Ein treuer Diener seines Herrn. Des Meeres er Liebe Wellen. Libussa. Ein Bruderzwist in Habsburg. Ausge-Gedichte. Selbstbiographie. Paul, Grundriß der germanischen ogie I. Faguet, Histoire de la littérature française. Koloušek, Matické theorie důchodů jistých a půjček anuitních. Čelakovský Lad.,ická květena Čech, Moravy a Slezska. Behrens, Mikrochemische ik. Týž, Anleitung zur mikrochemischen Analyse. Reyhler-Vo-Chemie fysikálná. Mayer Arnošt, Geschichte der Chemie. Trunkert-Appelt, Wiesnerův českoněmecký a francouzský dopisovatel.

b) Darem:

1. Časopisy letošní a kontinuace: Od Ústřední Matice é: Věstník Ústřední Matice školské. Od České Akademie císaře ška Josefa: Věstník těže. Od Jednoty českých matematiků: Čapro pěstování matematiky a fysiky. Od Musejního spolku é: Vlastivěda moravská. Od kuratoria Moravské musejní společ-Časopis moravského musea zemského a Zeitschrift des Mährischen smuseums. Od Vlasteneckého muzejního spolku olomouckého: Ča-Vlasteneckého muzejního spolku v Olomouci. Od Klubu českých i: Časopis turistů. Od vdp. P. Karla Lonička, kooperatora expo-Podhoří: Ottův Slovník naučný, díl 20. a 21.

2. Spisy ukončené: Od c. k. ministerstva kultu a vyučování: og der Asstellung neuerer Lehr- und Anschauungsmittel für den richt an Mittelschulen. Od České Akademie císaře Františka Jo-letošní publikace. Od Zemského výboru markrabství moravského: diplomaticus et epistolaris Moraviae, svazek XIV. a XIV. Upo-na oslavu 73. narozenin J. V. císaře Františka Josefa I. Kučera,

Paměti král. města Uherského Brodu. Od sboru učitelského vyšší reálky v Lipníku: Zlatá Praha, ročn. XVI. Obzor literární lecký (1899), Studentský almanach (1904). Od slečny M. J. v Praze: Goldschmith, The poetical works. Scribe, Piquillo Géroze, Histoire de la littérature française depuis ses origines à la révolution. Od téhož dárce dále sbírka francouzsky psaných jazyka francouzského. Od paní Anny Schenkové v Lipníku z jejího syna, zesnulého profesora ústavu, Františka Schenka: jež vřaděny do I., II., III., V., VII. odboru a do oddělení knih. Od pana Antonína Nováka, nadučitele v. v. v Hranicích: Bindgemeine Real-Encyklopaedie. Od téhož dárce 16 ročníků časopisů, 3 ročníky časopisu Paedagogium, 4 ročníky Učitelských 6 ročníků časopisu Učitel. Od pana Františka Jansy, ředitele vyšší reálky v Lipníku: Pinsker, Die Succession in die gränic'sche Secundogenitur Jaroměřic. Od p. Rud. Kouta, profesora vyšší reálky v Lipníku. Lucians von Samostata sämtliche Werke (1865).

Úhrnem přibýlo	158 čísel v 146 svazcích	502
Stav lonský	1812 » » 1906 »	1065
Stav koncem šk. r. 1903—4	1970 čís. v 2052 svazcích	1567

b) Knihovna žákovská.

Správce skutečný učitel **Jakub Mráček.**

Přibýlo letošního roku:

Koupí:

Flammarion: Koprník a soustava světová. — Goadby: Ar. Schakespeara. — Dickens: Klub Pickwickův. — Maupassant: Příběhy na moři. Chata. Láska. — Turgeněv: Běžín luh. Křepelka. Rukopis. — F. X. Svoboda: Směry života. Čekanky. — Radúz a Mahulena. Neklan. — Quis: Kniha vzpomínek I. Eliot: Silas Marner. — Gebaurová: Jurka. — Klika: Královic. — Kabelík: Výbor z prosy J. Nerudy. — Světlá: Prostá mysl (Sebrané spisy XI. a XV.). Romannetta z Ještěda I. II. (Sebrané spisy XVII. a XX.). — Jirásek: Jan Žižka. — Hruška: Chodské. — Voborník: Alois Jirásek. — Benýšek: Po boji vítězství. — Vodník z Podkrkonoší. — Tisovský: Hrad Černobýl. — Belov: nadzikowska: Co víla vyprávěla. — Rais: Nová sbírka slovanských hádek a pověstí. — Moskvitinová: Ruští bohatýři. — Výbor Fr. Jar. Rubeše (Naše klenoty sv. 2). — Slezská kronika ročn. čís. 3. a 4. — Šuran: Přehled dějin literatury řecké. Přehled dějin literatury římské. — Valečka: Obrazy z dějin ruských. — Volkov: Čtení z ruských dějin a ruské literatury. — Lanson: Dějiny nové literatury francouzské. — Klášterský: Myška na zkušence. — Utrpení mladého Werthera. — K. H. Mácha: Básně. — Shakespeare: Julius Caesar. Makbeth. Král Lear. Hamlet. — Goethe: Herman a Iphigenie. — Fr. X. Svoboda: Rozklad. Útok zisku. — Stašek: Bloud našich hor I. II. — Šmilovský: Spisy výpravné sv. VIII. — J. Ze zašlých dob. — Červinková-Riegrová: Riegrova matka. — Š.

rody a společnosti. — Čech: První kniha povídek a črt. (Sebr. III.) Výlety pana Broučka. (Sebr. spisy IX). — Gogol: Mrtvé — Gončarov: Oblomov I.—IV. — Barrow: Car Petr Veliký. — Senard: Burští junáci. — Herites: Pěkná hodinka. — Tisovský: Ilíci. — Stevenson: Zlatý ostrov. — Verne: Dva Robinsoni. — Výminkáři. Potměchuť. Rodiče a děti. Západ. — Jirásek: U nás II. III. (empláře). — Němcová: Babička. — Hořica: Z lidské bídy. — C. n: Extraits des historiens français du XIX. siècle. — Voltaire: de Louis XIV. — Fr. Copée: Auswahl von 40 Gedichten. — ti: Pêcheur d'Islande. — H. Taine: Napoléon Bonaparte. — Grill- r: Die Ahnfrau. — Kleist: Das Käthchen von Heilbronn. Prinz rich von Homburg. — Körner: Zriny. — Mayer: Oesterreichische er d. XIX. Jh. — Prosch-Wiedenhofer: Die deutsche Heldensage. chiller: Die Räuber.

Darem:

Knihovně žákovské přibyl značný počet svazků, jež darovali pí. enková v Lipníku, ředitel ústavu Fr Jansa, Nevřela, žák IIb. Knihy budou zařaděny do knihovny žákovské, jakmile dojde jejich ilení od c. k. zemské škol. rady.

Úhrnem přibýlo	71 čísel o	77 svazcích
Stav loňský	1288 » o	1342 »
Stav koncem škol. r. 1903/4.	1308 čísel o	1400 svazcích

yrazení knih opotřebovaných.

2. Knihovna učebnic pro chudé žáky.

Správce professor **P. Bedřich Dušek.**

Přibýlo letošního roku:

Koupí:

ých knih učebních pro I.—VII. tř.	23 čísel o	23 kusech.
loňský	1318 » o	1318 »
koncem škol. roku 1903-04	1341 čísel o	1341 kusech.

3. Sbírka školních programův.

Správce professor **Fr. Hradilík.**

Přibýlo letošního roku.	291 kusů.
Stav loňský	3338 »
Stav koncem škol. roku 1903-04	3629 kusů.

4. Sbírka pomůcek k vyučování náboženství.

Správce professor **P. Bedřich Dušek.**

Přibýlo letošního roku:

Darem:

P. Bedřich Dušek, prof. při české zem. vyšší reálce v Lipníku lkých obrazů krajín Palaestiny.

Úhrnem přibýlo	5 čísel o	5 kusech.
Stav loňský	50 » o	50 »
Stav koncem škol. roku 1902-04	55 čísel o	55 kusech.

5. Sbírky pomůcek k zeměpisu a dějepisu.

Správce skutečný učitel **Jakub Mráček.**

Letos splacena třetí a poslední lhůta na geografické mapy.
Přibýlo letošního roku:

Koupí:

Obrazy z dějin umění: Poprsí Menelaovo, socha Centaurov
poprsí Ciceronovo, Neronovo, Michelangelovo, loggie Raffaelova, v
chrámu sv. Petra a poprsí Napoleonovo; pak obrazy k vyučování
pisnému a dějepisu: Zátoka Štětínská, Veliký kaňon řeky Co
přístav u Nagasaki, Skály Teplické, Rybí stav a štít Moř. C
V. Tatrách, Alpy Ortleské, nádvoří za dob stěhování národů, n
klášterní v 10. stol., vnitřek města v 15. stol., za dob Ludvíka
(Rokoko.)

Darem:

Druhy vyvýšenin (kreslil Krečmer, žák tř. VII.). Vulkanický c
(kreslil Krečmer, žák tř. VII.). Jižní Čechy, 17 pohlednic (upravil
roval P. B. Dušek), Štýrsko-Korutany-Kraňsko, 34 pohlednic
Dušek), Západní Morava, 7 pohlednic (P. B. Dušek), Sedlec, 3
grafie (P. B. Dušek). Obraz Jansův: Hradčany počátkem 16. sto
roval prof. F. Schenk), Švýcary, několik pohlednic (P. B. Du
Forman (kreslil a daroval Halla, žák VI. tř.), Hejtmanství Hra
(kreslil Šustr, žák V. tř.), Physikalische Karte v. Deutschland
p. řed. Jansy), Murillo: Madonna, Ukřižování sv. Ondřeje, Remb
Minerva, Saskia (daroval správce kabinetu).

Úhrnem přibýlo	32 čísel o	32 kusech.
Stav loňský	317 »	o 570 »
Stav koncem škol. r. 1903/4 . . .	349 čísel o	602 kusech.

6. Sbírky starožitnin a mincí.

Správce professor P. Bedř. Dušek.

Stav loňský	182 čísel o	706 kusů
Stav letoší nezměněn.		
Stav koncem škol. roku 1903—1904 . .	182 čísel o	706 kusů

7. Sbírky pro matematiku a geometrii.

Správce skutečný učitel **Vác. Komberec.**

Přibýlo letošního roku:

Koupí:

Model: otáčení bodu a přímky, tři průmětny hlavní ze sítí
těných, rovinného průseku jehlanu (kollineace), osvětlení jehlanu, hra
k vypočítání jeho obsahu, k výpočtu stěnového úhlu pravidelného
hostěnu.

Pravítko elliptické, hyperbolické a parabolické.

Úhrnem přibýlo	9 čísel o	9 kusů
Stav loňský	67 čísel o	124 kusů
Stav koncem škol. roku 1903—4 . . .	76 čísel o	133 kusů

8. Sbírky přírodnické.

Správce skutečný učitel **Jos. Zázvorka.**

Přibylo letošního roku:

Koupí:

Lebka skotu, magnetovec, baryt, goniometr, 25 modelů krystallogických, 7 obrazů zoologických.

Darem:

Přičiněním bývalého žáka zdejšího ústavu, Břet. Brzobohatého da-Dr. J. Jahn, professor české techniky v Brně 48 hornin a nerostů zkamenělin.

Úhrnem přibylo 163 čísel ve 222 kusech.

Stav loňský 1808 » 3108 »

Stav koncem šk. r. 1903 - 4 1971 čísel ve 3330 kusech.

9. Sbírky fyzikální.

Správce professor **Karel Novák.**

Přibylo letošního roku:

Koupí:

Spectroskop, velký induktor Ruhmkorffův se rtuťovým přerušovačem, zařízení pro telegrafii bez drátů (olejový vibrator a stanice přijímač).

Darem:

Od Školského spolku v Lipníku: Kinematograf s projekčním mechanismem, rheostat, vápníková lampa na ether, 4 kotouče na filmy, 31 fótií, projekční plátno, ocelový válec na vodík, manometr s finimetrovou oboustrannou lampou. Od p. ředitele Frant. Jansy: Vápníková lampa na kyslík a vodík, vápníkové válce, ocelový válec s kyslíkem, 2 stojany na ocelové válce, manometr s finimetrem, lampa ke čtení, stůl na skioptiku, trojitý hořák na acetylen, skříň na fotogramy. Dále darováno: na projekční stěnu (p. K. Richtr z Lazniček), osm podobizen slavných fyziků (které kreslili 1 p. prof. Fr. Hradilík, 4 V. Šustr z V. tř., 2 Fr. Krečmer ze VII. tř. a 1 Jos. Krejčí z V. tř.).

Úhrnem přibylo 27 čísel v 62 kusech

loňský 431 čísel v 656 kusech

koncem školního roku 1903 - 04 458 čísel v 718 kusech

10. Sbírky chemické.

Správce professor **Rudolf Kout.**

Přibylo letošního roku:

Koupí:

Bikarbonát sodnatý, barnatý, hydroxyd hlinitý, chlorid měďnatý, kyslík olovičitý, chlorid olovnatý, octan sodnatý, anthrachinon; sůl manganová (krystaly), kazivec, granát, olygoklas, síra, pyrolusit, magnetit, traktorický, lignit; 2 vyvíjecí láhve, Priestleyův zvon, gumové kuličky, nálevka na oddělování tekutin, mikroskop (Reichertův stavivý 7c) Austria, kondensor Abbéův, revolver pro 3 objektivy, objektivy

č. 3, 6, 16^b, okuláry č. II., IV.), 6 krystalografických modelů, 16 dobených drahokamů, skála tvrdosti, postup utvoření se kaolinu; fyru, obrazy: výroba kuchynské soli, porculánu, plynárna, pivovar, cukrovarnictví.

Darem:

Od p. Fr. Jansy, ředitele ústavu, postup výroby karborundu, rovinu, hotové výrobky, krystaly karborunda), od Lad. Bubely, VII. tř., sbírka kovů a slitin, od sl. správní rady společného ctvaru podřípského v Roudnici sbírka cukrovských výrobků, správce sbírek a různých žáků 14 kusů nerostů a hornin.

Uhrnem přibýlo	75 čísel v	113 k
Stav loňský	661 čísel v	935 k
Stav koncem školního roku 1903—04	736 čísel v	1048 k

11. Sbírky pro kreslení a krasopis.

Správce professor **Fr. Hradilík.**

A) Kreslení:

Přibýlo letošního roku:

Koupí:

Bouda Alois: Rostlina v dekorativním umění, II. díl; Anděl Moderní vyučování kreslení na obecných a měštanských školách, 2 barevné reprodukce obrazů Ant. Chittussiho: »Z údolí Doubra a »Partie z česko-moravského pohoří«; džbánec kameninový (imi relief dívky; »Léto«, ženské poprsí od soch. Kopfa; barokní o: stuková; fantastická hlava zvířecí; hlava lví; 9 rámu s lisovanými pod sklem; 6 skupin pro počátečné kreslení perspektivně; 8 sl z věcných předmětů s dřevěným pozadím.

Darem:

Od p. c. k. škol. rady A. Anděla 2 reprodukce vzorných náhlavy od Leonarda da Vinci a Van Dycka; od p. Fr. Jansy, ředitele ústavu: Nowopacký Jan, Obrazy z Alp (40 litograf. reprodukcí dřívých originálů); od p. prof. Bedř. Duška premie Umělecké B. v Praze na r. 1904 (»Pohled na Prahu«, původní lept Jos. Barty) produkce dvou kreseb Felixe Jeneweina.

Do sbírky věcných předmětů darovali: p. cís. rada Jan 1 z Prahy 7 různých kusů mušlí a ulit; p. Ignác Dvořák v Lip starý dřevěný kříž slamou vykládaný; pí. Pacáčková v Lip mlýnek na kávu; správce sbírek krunýř želvy; rozmanité předměty darovali žáci ústavu: Gögela Bedř., Petzl Zden., Suchá Ant., vesměs z II. tř., Bartoněk Rich., Dragoun Jan, (ramza Fr., Kadlec Otto ze tř. III.a a Potěšil Jarosl., V. Svatosl., Travenec Frant. ze tř. III.b, celkem 10 kusů.

Do sbírky kraslic přispěli: p. Frant. Jansa, ředitel ústavu 2 slicemi; Hýža Jarosl. ze VII. tř. sbírkou 7 kraslic slováckých; bela Ladisl. ze VII. tř. sbírkou 9 kraslic valašských a Maší Václ. ze III.b tř. 4 kraslicemi záhorskými.

n přibylo	35	čísel o 81 kusech
oňský	393	čísla o 599 kusech
oncem škol. roku 1903-4	428	čísel o 680 kusech.

B) Krasopis.

ylo letošního roku ničehož.		
oncem škol. roku 1903-4	12	čísel o 12 kusech.

12. Sbírky tělocvičné.

Správce skutečný učitel tělocviku **Jaroslav Vejehoda.**

a) Tělocvik.

ylo letošního roku ničehož.		
oncem školního roku 1903-4	54	čísla o 290 kusech.

b) Školní hry.

Koupí:

bránky ke kopané, i velký plný míč, kruhy železné, míče.		
m přibylo	3	čísla o 9 kusech
oňský	47	čísel o 124 kusech
oncem šk. roku 1903-4	50	čísel o 133 kusech.

13. Sbírky pro zpěv a hudbu.

Správce **Felix Hlobil.**

letošního roku přibylo:

Koupí:

Dvořák: Slavnostní zpěv (smíš. sbor). Bendl: Skladby vo-
seš. 19., 9., 8., 6., 5., (sbory mužské a smíšené). Smetana:
píseň (smíš. sbor). Kubát: Deset mužských sborů.
Celkem 8 čísel, 16 kusů.

Darem:

Od Fr. Jansy, ředitele ústavu: Nejedlý: Libuše (2 seš. smíš.
Kuba: Album černoohorské, Pivoda: »Buď upomínka« (slav-
kantáta), »Dalibor« čís. IV. (muž. sbory Lovecká, Tichá noc),
Modlitba (smíš. sb.), Bendl: Nad hrobem (smíš. sbor), Slav-
ní list na paměť 25letého úmrtí Tovačovského, Horák: Co
e, Animas, Salve (mužské sb.), Nápravník: Kadrila na ruské
(mužský sbor), Slavík: Třetí quodlibet z českých nár. písní
ý sb.), Pivoda: Sedmero písní (s průvodem piana), Pivoda:
ek pouti« (pro dva hlasy s prův. piana), Malát: »Český nár.
« (pro solový hlas s prův. piana), Malát: »Zpěvy lidu českého«
ý sbor), Renner: Gesangfibel, Ruppeldt: Spevniček dvojhlas.
ských píesní, Čajánek: Průvod klavíru neb harmonia k písním
e Bartoš-Janáčkovy«, Pivoda: Nová methoda ku vyuč. zpěvu,
od varhan ku starším kostelním písním, Donaurov: Ruská
ce (pro jeden hlas s průvodem piana), Haydn: Serenada (pro
kvartet), Smetana: »Rolnická« (muž sbor), Hnilička: »Tam-
smíš. sbor), Bendl: »V černym lese« (smíš. sb.), Dvořák: Ze

»Stabat Mater« Chor 5, (Tui nati) a chor 7. (Virgo virginum) s sbory. (27 čísel).

Od p. J. Hlobila, naduč. na odpočinku: Mayerbeer: sbor z op. »Robert ďábel«; duetto z těžé opery (pro smyčc. sbor) (2 čísla).

Od p. Jos. Dovrtěla, uč. ústavu hluchoněmých: Kl. Škola pro klarinet (německo-anglická), (1 číslo).

Od abiturienta K. Pospíšila: Lesní roh F (1 číslo).

Od Rud. Livečky, žáka VII. tř.: Kaàn: »Adagio a S. (pro smyčc. kvintet), (1 číslo).

Od Jos. Machance, žáka VI. tř.: Jeremiáš: Dva smíš. a Tovačovský: Tichá noc (mužs. sbor), (1 číslo).

Od učitele zpěvu Felixe Hlobila: Bartoš-Janáček: nár. písní, Vorel: Nár. písně s prův. houslí. (2 čísla).

Celkem 35 čísel, 84 kusů.

Úhrnem přibylo	43 čísel	10
Stav loňský	74 čísel	31
Stav koncem šk. roku 1903-4	117 čísel	41

Rozsah sbírek pomůcek učebních na konci školního roku 1903-4.

Číslo	O d b o r	Počet koncem šk. r. 1902-3.		Přibylo		Stav nyní	
		čísel	kusů (sv.+seš.)	čísel	kusů (sv.+seš.)	čísel	kusů (sv.+seš.)
1	a) Knihovna učitelská	1812	1906	158	+146	1970	+
			+1065		502		+
	b) Knihovna žákovská	1288	1342	71	77	1308	
2	Učebnice pro chudé ž.	1318	1318	23	23	1341	
3	Sbírka škol. programů	3338	3338	291	291	3629	
4	Náboženství	50	50	5	5	55	
5	Zeměpis a dějepis	317	570	32	32	349	
6	Starožitniny a mince	182	706	—	—	182	
7	Mathemat a geometrie	67	124	9	9	76	
8	Přírodopis	1808	3108	163	222	1971	
9	Fysika	431	656	27	62	458	
10	Chemie	661	935	75	113	736	
11	Kreslení a krasopis	405	611	35	81	440	
12	a) Tělocvik	54	290	—	—	54	
	b) Školní hry	47	124	3	9	50	
13	Zpěv a hudba	74	316	43	100	117	

* Po vyřazení knih opotřebovaných.

IV. Statistický přehled žactva

ve školním roce 1903—4.

1. Počet žáků.	Třída									Úhrnem
	Ia	Ib	II		IIIa	IIIb	IV	V	VI	VII
			a	b						
ncem škol. roku 1902-3	46	31	28		30	51	37	38	35	296
átkem škol. roku 1903-4	30	30	42	29	29	34	37	36	36	303
zi rokem přibyli . . .	—	—	—	—	1	—	—	1	—	2
Celkem tedy přijato .	30	30	42	29	30	34	37	37	36	305
Z nich jsou:										
ě přijati: postoupivše .	28	29	2	4	1	3	2	3	2	74
opakující . . .	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1
st přijati: postoupivše .	—	—	35	23	28	28	34	34	34	216
opakující . . .	2	1	5	2	1	2	1	—	—	14
zi škol. rokem vystoupili	1	2	2	—	7	3	3	3	—	21
čet žáků na k. šk. r. 1903-4	29	28	40	29	23	31	34	34	36	284
2. Rodiště (Vlast).										
vník	5	7	6	1	5	4	2	3	2	35
ava mimo Lipník . . .	24	18	32	27	18	25	32	27	34	237
chy	—	2	1	1	—	1	—	1	—	6
zsko	—	1	1	—	—	1	—	2	—	5
li	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1
Úhrnem . . .	29	28	40	29	23	31	34	34	36	284
3. Jazyk mateřský.										
ský	29	28	40	29	23	31	34	34	36	284
Vyznání náboženské.										
tolické	29	28	40	28	23	31	34	32	34	279
angelicko-augšpurské . .	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1
angelicko-reformované . .	—	—	—	1	—	—	—	1	2	4
Úhrnem . . .	29	28	40	29	23	31	34	34	36	284
5. Věk.										
letých bylo	2	4	—	—	—	—	—	—	—	6
" "	8	6	1	—	—	—	—	—	—	15
" "	11	13	8	1	2	—	—	—	—	35
" "	8	5	20	9	5	1	—	—	—	48
" "	—	—	9	8	5	6	—	—	—	28
" "	—	—	2	6	10	12	7	1	—	38

	T ř í d a									Úhrnem
	I	Ib	II	IIIa	IIIb	IV	V	VI	VII	
<i>žný výsledek pro k 1902—3.</i>			a	b						
čení I. tř. s vy- enáním . . .	9		9	7	10	11	9	12	6	73
čení I. tř. pro- u	30		20	17	18	38	27	23	29	202
čení II. tř. pro- u	5		2	4	2	2	1	3	—	19
čení III. tř. pro- u	2		—	—	—	—	—	—	—	2
sifikování .	—		—	—	—	—	—	—	—	—
Úhrnem .	46		31	28	30	51	37	38	35	296
Platy žáků.										
<i>školné platili:</i>										
ololetí . . .	21	22	19	13	16	17	14	13	14	149
ololetí . . .	11	12	21	14	10	16	18	16	13	131
<i>vice osvobození:</i>										
ololetí . . .	—	—	2	1	1	3	4	1	5	17
ololetí . . .	8	1	1	1	1	3	3	1	5	24
<i>ého osvobození.</i>										
ololetí . . .	8	7	21	15	13	13	19	21	17	134
ololetí . . .	10	15	20	14	13	13	15	17	18	135
<i>lat obnášel v K:</i>										
ololetí . . .	630	660	600	405	495	555	480	405	495	4725
ololetí . . .	450	375	645	435	315	525	585	495	465	4290
Úhrnem .	1.080	1.035	1.245	840	810	1.080	1.065	900	960	9.015
<i>Zápisné.</i>										
řijímací od no- žáků po 4·20 K	117·6	121·8	8·4	16·8	4·2	16·8	8·4	12·6	8·4	315·—
vky na učebné cky po 2 K .	60·—	60·—	84·—	58·—	60·—	68·—	74·—	74·—	72·—	610·—
olikáty vysvěd-	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Úhrnem .	177·6	181·8	92·4	74·8	64·2	84·8	82·4	86·6	80·4	925·—
ky na školní hry	20·—	17·60	17·20	13·20	12·80	16·—	10·80	12·40	14·80	134·80
ky na potřeby bní laboratoři	—	—	—	—	—	—	102·—	45·—	48·—	195·—

T ř í d a										
	Ia	Ib	II	IIIa	IIIb	IV	V	VI	VII	
9. Počet žáků v předmětech vedlejších.										
<i>a) Praktická lučební cvičení v laboratoři.</i>										
I. oddělení:										
1. na začátku škol. roku .	--	--	--	--	--	--	9	3	--	
2. na konci škol. roku .	--	--	--	--	--	--	9	3	--	
II. oddělení:										
1. na začátku škol. roku .	--	--	--	--	--	--	--	2	4	
2. na konci škol. roku .	--	--	--	--	--	--	--	2	4	
<i>b) Těsnopis.</i>										
I. oddělení:										
1. na začátku škol. roku .	--	--	--	--	--	23	11	--	--	
2. na konci škol. roku .	--	--	--	--	--	13	10	--	--	
II. oddělení:										
1. na začátku škol. roku .	--	--	--	--	--	--	2	12	8	
2. na konci šk. roku .	--	--	--	--	--	--	2	10	9	
Úhrnem na konci šk. r. :	--	--	--	--	--	13	12	10	9	
<i>c) zpěv.</i>										
I. oddělení:										
1. na začátku škol. roku .	20	13	--	--	--	--	--	--	--	
2. na konci škol. roku .	16	14	--	--	--	--	--	--	--	
II. oddělení:										
1. na začátku škol. roku .	--	--	19	7	9	4	--	--	--	
2. na konci škol. roku .	--	--	15	9	6	4	--	--	--	
III. oddělení:										
1. na začátku škol. roku .	--	--	--	4	--	3	11	16	15	
2. na konci škol. roku .	--	--	2	4	4	3	12	14	15	
Úhrnem na konci šk. r. :	16	14	17	13	10	7	12	14	15	
<i>d) Hra houslí.</i>										
I. oddělení	3	2	--	2	2	--	--	--	--	
II. oddělení	1	1	3	2	--	1	--	--	--	
III. oddělení	1	2	--	2	2	--	2	--	--	
IV. oddělení	1	1	--	1	2	1	--	--	--	
V. oddělení	--	--	1	--	2	3	--	--	--	
Úhrnem na konci šk. r. :	6	6	4	7	8	5	2	--	--	
10. Stipendia.										
Počet stipendistů	1	--	--	--	--	--	2	--	--	
Obnos stipendií v Kor. . .	400	--	--	--	--	--	320	--	--	

V. Maturitní zkoušky.

A.) Dodatek ke školnímu roku 1902-3.

Ústní zkoušky maturitní na konci školního roku 1902-3 v období tím konány byly za předsednictví c. k. dvorního rady, professora a techniky brněnské pana Dra Karla Zahradníka ve dnech 10. července 1903 a podrobilo se jim 35 žáků veřejných sedmé (z nich dva po druhé).

Uznáno bylo:

dospělými s vyznamenáním	7
dospělými	23
opravná zkouška na období podzimní povolena	5
reprobován na dobu jednoho roku	—
reprobován na dobu neurčitou	—

Celkem 35 žáků.

Opravné zkoušky v období podzimním r. 1903 konány tyto:

Písemné zkoušky opravné v dnech 15. a 16. září 1903. Dány tyto úlohy:

1. Z jazyka německého: a) Volná práce: »Handlung und Charaktere in Lessings Minna von Barnhelm.« (Abhandlung.) b) Překlad z jazyka českého na jazyk německý: »Ze života císaře Frantiuka Josefa I.« Vykoukal, Česká čítanka II. od řádku »Dědičná jest dě Habsburském . . .« až . . . »rozdala, jsou ohromné.«

2. *Mathematiky*: a) Které hodnoty pro x a y vyhovují společně:

$$x+1 \quad y+2 \quad x-1$$

$$2 = \sqrt[3]{9^{8-x}}, \quad 2 = \sqrt[3]{8^{5-x}}$$

b) Jak veliký úhel α vyhovuje rovnici:

$$\frac{\alpha}{2\alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$
 c) Koule povrchu $P = 154 \text{ dm}^2$ má se pře-

řevrácením v přímý válec (o stejném obsahu), jehož plášť rovná se povrchu koule; ustanovte poloměr a výšku válce. d) Ellipsa, jejíž poloosa $a=5$, $b=3$ usečena jest oběma parametry; vypočítej jest plochu části vnějškové.

Ústní zkoušky opravné konaly se dne 16. září 1903 dopoledne za předsednictví c. k. zemského inspektora školního pana Jana Slavíka a účastnilo se k nim všech 5 abiturientů.

Uznání všichni za dospělé.

Byl tedy konečný výsledek druhých maturitních zkoušek dle nejvyššího ústavu vykonaných ve školním roku 1902-3 tento:

dospělými s vyznamenáním uznáno	7 žáků
dospělými	28 »
reprobování	— »

Celkem 35 žáků.

Seznam abiturientů approbovaných ve školním roce 1902—1903.

Pořad	J m é n o	Rodiště	Vlast	Den a rok narození	Léta studií reálných	Stupeň dospělosti	oh
1	Bayer Rudolf	Berna-tice	Morava	$\frac{13}{4}$ 1883	8	dospělý	Zer
2	Bek Ladislav	Lipník	Morava	$\frac{17}{6}$ 1883	7	dospělý	Sl žel
3	Blažek Bedřich	Násedlo-vice	Morava	$\frac{6}{3}$ 1883	7	dospělý	Voj
4	Cerha Pavel	Dymo-kury	Čechy	$\frac{27}{10}$ 1884	6	dospělý s vyzna-menáním	Str
5	Čoček Julius	Jezernice	Morava	$\frac{6}{4}$ 1883	8	dospělý	Uči
6	Drábek Vladimír	Prerov	Morava	$\frac{25}{10}$ 1884	4	dospělý	Slu u výl
7	Gaďourek Josef	Týn	Morava	$\frac{5}{3}$ 1884	7	dospělý	Sta s
8	Harna Josef	Hlínsko	Morava	$\frac{26}{2}$ 1885	7	dospělý	Uči
9	Hlobil Vilém	Tupec	Morava	$\frac{3}{3}$ 1888	8	dospělý	Slu žele
10	Jurajda Kamil	Rožnov	Morava	$\frac{13}{2}$ 1883	7	dospělý	Voje
11	Kellner Josef	Jezernice	Morava	$\frac{20}{3}$ 1881	7	dospělý	Inže st

J m é n o	Rodiště	Vlast	Den a rok narození	Léta studií reálných	Stupeň do- spělosti	Povo- láni ohlášené
Kellner Vilém	Jezernice	Morava	$\frac{25}{5}$ 1884	8	dospělý	Lesnictví
Kment Jan	Nový Rousinov	Morava	$\frac{11}{5}$ 1883	6	dospělý s vyzna- menáním	Hornictví
Kočář Jaroslav	Klopoto- vice	Morava	$\frac{27}{12}$ 1884	4	dospělý	Hornictví
Kuča Emil	Skalička	Morava	$\frac{14}{1}$ 1884	8	dospělý	Služba u pošty
Kunát Augustin	Lipník	Morava	$\frac{14}{8}$ 1883	8	dospělý	Služba u zem. výboru
Laml Miloš	Drahotu- še	Morava	$\frac{20}{12}$ 1883	7	dospělý	Zeměděl- ství
Michna Jan	Frenštát p. Radh.	Morava	$\frac{29}{5}$ 1883	6	dospělý	Profes- sura (mat., desk.)
Nesvadbík František	Čehovice	Morava	$\frac{18}{7}$ 1884	7	dospělý	Zeměděl- ství
Parma Alois	Opava	Slezsko	$\frac{31}{5}$ 1886	7	dospělý s vyzna- menáním	Profes- sura (mat., fys.)
Pazdera František	Staměři- ce	Morava	$\frac{2}{5}$ 1884	7	dospělý	Služba železnič.
Petržela Josef	Prostějov	Morava	$\frac{28}{2}$ 1882	7	dospělý	Služba u pošty

Pořad	J m é n o	Bydliště	Vlast	Den a rok narození	Léta studii reálných	Stupeň dospělosti	Povolání
23	Pochobradský Ervín	Citov	Morava	$\frac{29}{8}$ 1884	8	dospělý	Vojen.
24	Polach Vojtěch	Hukvaldy	Morava	$\frac{9}{11}$ 1884	7	dospělý s vyznamenáním	Horn.
25	Pospíšil Karel	Bystřice pod Hostýn.	Morava	$\frac{3}{11}$ 1884	8	dospělý	Cher.
26	Prašivka Rudolf	Orlová	Slezsko	$\frac{6}{2}$ 1884	8	dospělý	Horn.
27	Růžička František	Lipník	Morava	$\frac{10}{4}$ 1884	8	dospělý	Vojen.
28	Říhošek Jaroslav	Klopoto- vice	Morava	$\frac{26}{10}$ 1885	4	dospělý	Cher.
29	Sasák Ferdinand	Kokory	Morava	$\frac{29}{5}$ 1882	7	dospělý	Vojen.
30	Spáčil Vilém	Bohu- slávky	Morava	$\frac{9}{1}$ 1883	7	dospělý	Slu- žele.
31	Strnad Robert	Krčmoň	Morava	$\frac{5}{6}$ 1884	7	dospělý s vyznamenáním	Inžer- st.
32	Vašinka František	Drahotu- še	Morava	$\frac{25}{10}$ 1883	7	dospělý	Slu- žele.
33	Vymětal Raymund	Sobě- chleby	Morava	$\frac{2}{10}$ 1884	8	dospělý	Učit.

J m é n o	Rodiště	Vlast	Den a rok narození	Léta studií reálných	Stupeň do- spělosti	Povo- lání ohlášené
Závada František	Frenštát p. Radh.	Morava	$\frac{25}{10}$ 1885	4	dospělý s vyzna- menáním	Stavitel- ství
Zlámal Jan	Kokory	Morava	$\frac{27}{8}$ 1884	7	dospělý s vyzna- menáním	Strojníc- tví

B) Ve školním roce 1903—4.

Ku zkouškám maturitním přihlásilo se všech 36 veřejných žáků té třídy (všichni poprvé).

Zkoušky písemné konaly se ve dnech 6.—10. června 1904.

K vypracování dány abiturientům tyto úlohy:

1. *Z jazyka českého*: »Přírodní dary říše rakousko-uherské.« (prava.)

2. *Z jazyka německého*: a) *Volná práce*: Minna von Barnhelm. Entstehung des Werkes, Inhaltsangabe, Komposition, Idee und Charakter. (Abhandlung.)«

b) *Překlad z jazyka německého na jazyk český*: »Schneider, treuer Diener seines Herrn.« (Ed. Pospíchal, Deutsches Lesebuch Mittelschulen mit böhm. Unterrichtssprache I. Bd. 4. Aufl. St. 76. —36.)

3. *Z jazyka francouzského*: Diktát a překlad z jazyka francouzského na jazyk český: La Marquise de Sévigné, Un courtisan. Choix de lettres du XVII^e siècle, pg. 513.

4. *Z matematiky*: a) Určiti rovnici kvadratickou, jejíž kořeny hodnoty x a y vyhovující rovnicím:

$$\frac{2x^2 + xy - y^2}{2} : \frac{x^3 + y^3}{3(x^2 - xy + y^2)} = 12, \quad 3x - 2y = x + 6.$$

Úloha, jejíž odchylka od první průmětny $\alpha = 16^\circ 27'$, nalézá se v rovině odchýlené od první průmětny o úhel $58^\circ 36'$. Který úhel svírají obě roviny s projekcí přímky? c) Vypočítá úhlopříčnou kružnici, která má stejný obsah s kruhovým kuželem šikmým, jehož výška a rameno $a = 15$, nejkratší $b = 8$ a úhel při vrcholu těchto ramén $\alpha = 60^\circ$. d) Vyšetřiti rovnici ellipsy, dán-li její obsah $O = 50\pi$ na $3x + 8y = 50$.

5. *Z descriptivní geometrie*: a) Dány jsou body a $(-5, 4, 3)$, b $(10, 3)$, c $(5, 4, 12)$, d $(-3, 9, 10)$. Sestrojte pronik $\triangle abc$ s obem defg, jehož vrchol f jest souměrný k d dle roviny abc a g má souřadnice $y = z = 2$. b) Třemi body a $(-3, 3, 4)$, b $(0, 5, 7)$

c (2, 2, 2) položití ellipsu, jejíž centrálný stín na π s bodu s (—7, 1) jest kružnice. Sestrojíti co nejpřesněji první průmět té ellipsy. c) Sestrojíti veškeré stíny polokoule, která vznikne řezem koule s rovinou K [s (—3, 4, 4), $r=3$], $\rho \perp$ v prochází bodem s, $N_2^0 X = 45^\circ$, $S_2 X = 150^\circ$. (Polokoule bližší průmětně první.)

Ústní zkoušky maturitní budou se konati ode dne 18. čer. 1904 za předsednictví ředitele c. k. vyšší reálky v Brně pana Václava Jeřábka. Zpráva o nich přinesena bude v programu příštího školního roku 1904—5.

VI. Podporování nemajetného žactva.

A) Stipendia veřejná měli:

1. Hlobil Jos., žák I. a tř., stipendium P. Fr. Novotného; 100 K ročně.
2. Maitner Pavel, žák V. tř., studentskou nadací Ant. Maříka; 200 K ročně.
3. Skopal Frant., žák V. tř., v II. pololetí stipendium Skalníkovy; 120 K ročně.

B) Podporovací spolek.

Ve valné hromadě 19. prosince 1903 opětně zvolen předseda p. Lorek Jan, c. k. rada zemského soudu, místopředsedou p. Jan. Sedláček, pokladníkem P. Bedř. Dušek, professor; do výboru pp. Fr., obchodník, Kužela Hugo, c. k. berní, Waverka Fr., majitel krupice, Vilímek J. ml., továrník a Vlček Ant., c. k. soudní adjunkt.

Příjmy spolku ve škol. roce 1903—1904.

Celkem přijato	K 237
Vydáno	» 20
	Zbývá K 217
Jmění spolku	K 217

Dary peněžní.

a) Z Lipníka.

P. T. páni: Abiturienti 1903 K 82³⁷, P. Dušek 72 K, K 52 K, po 34 K: Němeček, Dr. Vítek, Voborník; po 24 K: Dr. Bohatý, Dr. Havlík, Holešofský, Hradilík, Kout, Lorek, Novák, Novák, Pok, J. Růžička, Šimke, Vlček, Wollgart, Zambal; A. Kašparík po 16 K: Jansa, Polák; Mráček 14 K; po 12 K: Dovrtěl, P. Gl. P. Hajduček, Herman, Langkramer, Lipenský, Petráš, sl. Poková sypal, P. Smažinka, Svoboda L., Svoboda K., Vejchoda, Tauber, V. Zajíc, Zázvorka; Komberec 11⁶⁰ K; po 10 K: Osecký, Vilímek Sedláček 9 K; Schenk 8 K; po 6 K: Demkow, Dragoun, Hruš. Knoppová 5⁴⁰ K; po 4⁸⁰ K: Antoníček, Bachman, Bidlo, Čep. pí. Čuberkova, Glos J., sl. Halmová, Hlobil F., Honzu, Hořín F.,

nský, Kakš, Kratzl, Kroupa, Malatík, pí. Podmětalo, Poštulka st., ilka ml., Sehnal Ir., sl. Seidlová, Skupka, pí. Vilišova, Šuba; po pí. Bencova, Franta, Rais, pí. Šlechtova; Mík 3'60 K; po 3 K: ezdařilík, P. Pospíšil; po 2'40 K: Matuška, Stratil; po 2 K: Buček, chenkova, Zachoval; po 0'80 K: Ochman, Procházka.

b) Mimo Lipník:

P. T. páni: Vrchní stav, rada Hlávka z Prahy a cís. rada Neff hy po 100 K; Libosvár, nadučil z V. Újezda 33'80 K; studující eka 30 K; pí. Kratzlova z Rožnova 20 K, studující z Drahotuš , rolníci ze Soběchleb 12 K; po 10 K: Pospíšil, starosta Bystřice , Vybíral, nadučitel z Kokor, pí. Bubelova ze Vsetína, Stejskal ku; z pokladničky p. poslance Richtra 6'82 K, P. Koutný, farář ve jezdě 6 K, Petzl, správce velkostatku ve Veselíčku, a Hübner, c. ntrolor v Přerově, po 4 K, pí. Jaroškova ze Vsetína 3'80 K; po Dr. Ambros z Přerova a Malík, c. k. kontrolor z Přerova.

Za zakládajícího člena spolku přistoupil p. ředitel sa s příspěvkem 100 K.

K dalším značným peněžním podporám patří školní plat. Osvo- io bylo žáků 135 od celého a 24 od polovice. Školský spolek nohé nemajetné žáky zaplatil školné ve výši 945 K za obě etí.

Nemajetní žáci dostávali dále i peněžní měsíční podpory yt, stravu a potřeby školní. Udíleno pak měsíčně 32 žákům 6 K podpory. Obědy opatřeno bylo úplně neb částečně 32 žáků dnu po celý školní rok. Obědy udíleny buď v rodinách nebo olečné stravovatelky, které za to od spolku placeno. — Stravo- o společně týdně 28 žáků při čtyřech obědech.

Obědy v rodinách poskytovali týdně:

P. T. pánové: Dragoun 7 večerí, Jansa 1 oběd, Kotek 2 obědy. Jan Vilímek ml. vydržoval jednoho žáka ve svém domě úplně.

Knihovna učebnic.

Učebných knih půjčeno v tomto roce 121 žákům 684 svazků. cem všech těchto příspěvků a knihovny chudých byl katecheta u professor P. Bedřich Dušek. Bezplatné léčení žákům posky- s nevšední ochotou a láskou k mládeži Dr. Alfred Havlík.

Všem dobrodincům a příznivcům nemajetné stu- cí mládeže vzdává řiditelství díky nejvřelejší!

VII. Tělesný výcvik žákův.

Ve smyslu nařízení c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne áří 1890 č. 19.097 měl sbor učitelský 14. listopadu 1903 poradu ostředcích, které by příznivě působily na tělesný rozvoj mládeže. sení ta schválena byla c. k. zemskou školní radou moravskou ze r. listopadu 1903. čís. 21.216.

Opatření k tomu se nesoucí prováděna byla takto:

A) Bruslení. Žáci klouzali se na prostranném a dobře udrženém kluzišti poblíž nádraží soukromým spolkem pořízeném, majetnější žáci zaplatili poplatek 1 K za celé období. Nemajetným kloum daroval výbor bruslařského spolku 30 volných lístků. Mimo klouzali se žáci na bezpečných místech na Bečvě za dozoru učitele tělocviku. Nemajetným žákům zapůjčeno bylo 40 párů bruslí, jež majetkem reálky.

B) Koupání a plavání. V letním období koupali se žáci lečně na bezpečném místě za hřištěm a »pod hájkem« v Bečvě, za dozoru učitele tělocviku. Místa ona byla prozkoumána a pro vyhrazena; jinde žákům koupati se nebylo dovoleno, poněvadž dno jest měnlivé a tím nebezpečné.

C) Hry mládeže. Mimo hry pěstované v době zimní v cvičně, pokud příznivé počasí dovolovalo, hráli žáci v září a v říjnu na jaře od 1. dubna počínajíc denně na prostranném nádvoří reálky dle tříd, denně u hájku na hřišti tenisovém a mimo to třikrát týdně (v úterý, ve čtvrtek a v sobotu) na rozsáhlé louce, laskavostí obce propůjčené, na pravém břehu řeky Bečvy.

Jednotlivé třídy hrály denně 1—4 hodiny. Hry řídil a dozor učitel tělocviku.

Dostí četný počet žáků učil se jezdit na kole. Někteří žáci i svá vlastní kola a mnozí přespólní na kolech do školy přijížděli. Učitel tělocviku častěji upozorňoval žáky na škodlivý vliv nevhodné jízdy a špatného, chybného sedění.

Měření a vážení žáků vůbec provádí se na začátku a na konci školního roku a výsledky zaznamenávají se každému žákovi do zvláštního zápisníku, který se žákům na požádání k nahlédnutí ukáže.

D) Vycházky poučné a do přírody. Mimo obvyklé vycházky tělocvičné do okolí Lipníka za účelem pochodu, řadení a poklusův, a vycházky vyjiždky na kolech do Hranic pořádány byly:

1. VII. třída dne 28. října 1903: technická vycházka do Přibramu za účelem obeznámení se s kladením vodovodu; průvodce prof. L. Berec. Zúčastnilo se 32 žáků. Trvání: půl dne.

2. VI. třída dne 8. dubna 1904: chemicko-technologická vycházka do sladovny v Lipníku; průvodce prof. Kout. Zúčastnilo se 33 žáků. Trvání: 2 hodiny.

3. IV. třída dne 13. dubna 1904: chemicko-technologická vycházka k p. Ministroví, kováři v Lipníku; průvodce prof. Kout. Zúčastnilo se 15 žáků. Trvání: 1 hodina.

4. VI. třída dne 16. dubna 1904: chemicko-technologická vycházka do rolnického akciového pivovaru v Lipníku a do sladovny; průvodce prof. Kout. Zúčastnilo se 33 žáků. Trvání: 4 hod.

5. IV. třída dne 30. dubna: vycházka za příčinou osvěžení parku a lesa na Veselíčku; průvodce prof. Dušek. Zúčastněno 31 žáků. Trvala 4 hodiny.

6. VI. třída dne 6 května: chemicko-technologická vycházka do lárný pana Vilímka v Lipníku; průvodce prof. Kout. Zúčastněno 15 žákův. Trvala 2 hod.

7. III a) třída dne 7. května: kreslení dle přírody v okolí Týna; průvodce prof. Hradilík. Zúčastněno 15 žákův. Trvala 4 hodiny.

8. V. třída dne 11. května: chemicko-technologická vycházka do ovna, kdež byly prohlédnuty: plynárna, elektrárna, výroba superfoskyseliny sírové a dusičné; průvodce prof. Kout. Zúčastněno 25 žákův. Trvala půl dne.

9. III b) dne 14. května: kreslení dle přírody na Helštýně; průvodce prof. Hradilík. Zúčastněno 15 žákův. Trvala 5 hod.

10. II. třída dne 14. května: botanická vycházka do lesů kolem Týna; průvodce prof. Zázvorka. Zúčastněno 22 žákův. Trvala 4 hod.

11. I a), a I b) třída dne 25. května: botanická vycházka do okolí městy a Hlínska; průvodce prof. Zázvorka. Zúčastněno 32 žákův. Trvala 4 hod.

12. V. třída dne 28. května: vycházka za účelem osvěžení do lesů u Hradilíku; průvodce prof. Dvořák. Zúčastněno 23 žáků. Trvala 6 hod.

13. IV. třída dne 28. května: kreslení dle přírody v okolí Loučky; průvodce prof. Hradilík. Zúčastněno 12 žáků. Trvala 4 hod.

14. I a), I b) a II. třída dne 1. června: vycházka za účelem osvěžení do Týna a lesem do Teplic; průvodce prof. Kout, Vejchoda a Zázvorka. Zúčastněno 94 žákův. Trvala celý den.

15. III a) a IV. třída dne 1. června: turistická vycházka na Štrambersko; průvodce prof. Dušek a Herman. Zúčastněno 33 žákův. Trvala celý den.

16. III b) a V. třída dne 1. června: dějepisná vycházka na Buchlov; průvodce prof. Dvořák a Demkow. Zúčastněno 45 žákův. Trvala celý den.

17. VI. třída dne 1. června: turistická vycházka na Štrambersko; průvodce prof. Voborník. Zúčastněno 33 žákův. Trvala celý den.

18. VII. třída dne 1. června: prohlídka parku, květné zahrady a městy v Kroměříži; průvodce prof. Komberec. Zúčastněno 32 žákův. Trvala celý den.

19. II třída dne 8. června: kreslení dle přírody v okolí Podhůry; průvodce prof. Hradilík. Zúčastněno 14 žákův. Trvala 4 hod.

20. VI. třída dne 17. června: chemicko-technologická vycházka do lárný v Lipníku; průvodce prof. Kout, Herman a Vordren. Zúčastněno 33 žákův. Trvala 1 hod.

21. IV., V., VI. a VII. třída dne 19. června: archaeologická vycházka k staroslovanské mohyle v lesích u Soběchlebska; průvodci sbor učitelů. Zúčastněno 127 žákův. Trvání 7 hodin.

22. V. třída dne 24. června: chemicko-technologická vycházka do městy p. Wawerky v Lipníku, kdež sledována byla výroba cihel a cementového zboží; průvodce prof. Kout a Herman. Zúčastněno 25 žáků. Trvala 2 hod.

23. V. třída dne 2. července: chemicko-technologická vycházka slévárny p. Ordelta v Lipníku; průvodce prof. Kout a Herman. Zúčastněno 25 žákův. Trvala 2 hod.

24. III a) a V. třída dne 9. července: vycházka za účelem žení do lesů Pekla; průvodce prof. Herman a Dvořák. Zúčastněno 45 žákův. Trvala 6 hod.

25. V. třída dne 9. července: botanická vycházka do lesů v Helštýna; průvodce prof. Zázvorka. Zúčastněno 31 žákův. Trvání

E) Školní hygiena prováděna byla co nejbedlivěji. Čistota, větrání, užití respirií atd. byly stále předmětem největší péče, jak ředitelství, tak i sboru professorského. Aby se zachovala čistota, byli žáci naváděni k tomu, aby otírali obuv, než-li vkročí do školy, na schodiště i do učeben; bylo přísně dohlíženo, aby se o toto provádělo a aby častým dozíráním žáci si zvykli obuv čistě udržováni čistoty v učebnách, na chodbách, záchodech a v ostatních místnostech bylo hleděno měrou zvýšenou a nebylo trpěno žádnému čehož, co by v té příčině závadno bylo. Častými pravidelnými prohlídkami všech místností, knih i ostatních učebních pomůcek a potřeb byli žáci udržováni vše v pořádku a čistotě. V době respirií jsou nyní po každé vyučovací hodině, procházeli se žáci za příznivého počasí na prostranném dvoře, za nepohody na chodbách; třídy uzavřeny a okna v nich otevřena.

Na sedění, držení těla, jak při chůzi, tak i při práci ve škole i jinde hleděno bylo v každé příčině a žáci byli stále poučováni. Tělocvikův udíl žákům poučky zdravotnické, vykládal nej důležitější z tělovědy ve všech třídách a dával pokyny o první pomoci v úrazech. Žáci zvykali se obracet k učiteli tělocvikův o radu v různých chorobách a poraněních, který ovšem ve vážných případech je odkazoval na lékařské odborníky.

Výsledek této péče jeví se v tom, že zdravotní stav žáků byl celkem příznivý.

F) FERIÁLNÍ CESTY. Mezi žactvem vzmáhá se stále více pro cestování. Klub českých Turistů poskytuje každoročně určitý legitimací k použití studentských nocleháren. Celkem cestovalo v minulých šk. r. 1902—3 39 žákův, tedy 13,73 % všech. Nejvíce navštíveno bylo: Macocha a Sloupské jeskyně, Radhošť, Slovácko, Kladsko, Sudety, Valašsko, Mor. Švýcarsko, Velička, Krakov, Zakopaně, Vídeň, Luhačovice, Ostrava a j.

Na základě výnosu c. k. zemské školní rady moravské z 19. června 1903, č. 9592 povoleno bylo vybírat od žáků po 80 h výlohy s tělocvičnými hrami spojené. Nejchudších 133 bylo svobodně zaplatili žáci v Ia) 20.—K, v Ib) 17.60 K, v II. 17.20 K, v IIIa) 13.—K, v IIIb) 13.—K, ve IV. 16.—K, v V. 11.—K, v VI. 12.40 K a v VII. 15.—K; celkem od 164 žákův à 80 h a od 11 à 40 h vybráno 134.80 K. Vydáním byly tyto příspěvky úplně vyčerpány.

U 67 žáků přespolečných, kteří buď docházeli neb na bicyklu do školy z domova až 2 hod. vzdáleného, sloužily cesty ty k utužení zdraví.

Podrobnější data tělesného výcviku.

Ve třídě	Ia	Ib	II	IIIa	IIIb	IV	V	VI	VII	Úhrn	%
čet žáků vůbec .	29	28	40	29	23	31	34	34	36	284	—
spolních bylo .	15	11	18	5	5	5	7	1	—	67	23·59
se zúčastnilo .	13	15	21	21	16	24	21	22	21	174	61·27
slili	23	18	32	23	12	19	17	22	36	202	71·13
apali se	11	13	19	17	13	21	28	29	31	182	64·08
ějí plovati . . .	19	14	30	22	17	30	25	26	36	219	77·11
kole jezdití . .	6	2	8	12	10	12	16	19	21	106	37·32
cházek se zúčast-											
o	15	14	21	15	14	18	25	33	32	187	65·84
zdninové cesty											
lší 2 dny konali .	5	2	6	—	3	4	7	4	8	39	13·73
tělocviku pro ne-											
hy osvobození .	—	—	2	1	1	4	6	2	9	25	8·83

VIII. Některá nejdůležitější nařízení.

. Ze dne 21. srpna 1903 č. 28.852 (Min. C. V.) — Den 2. ledna
ti na středních školách feriální a doba vyučování stanoví se s pře-
mi.

. Ze dne 23. května 1903 č. 17.541 (Min. C. V.) — Zkoušenci
ritní, kterým povolena zkouška ve lhůtě podzimní, když toliko
om předmětu nevyhověli, mohou býti připuštěni k opravné
šce z tohoto předmětu po uplynutí půl roku. Ve zvláštních
ech může se dostati této výhody též zkoušenci, který ve lhůtě letní
om toliko předmětu nevyhověv, neobstál též při opravné zkoušce
zdninách, když podá odůvodněnou žádost k zemské školní radě.

. Ze dne 31. prosince 1903 č. 23.353 (Z. Š. R.) — Nařízení pro
ání tělocviku, aby se předešly úrazy za cvičení na šplhadlech.

. Ze dne 27. ledna 1904 č. 30.356 ex 1903 (Min. C. V.) — Úprava
15ti minutových přestávek mezi vyučovacími hodinami.

. Ze dne 24. února 1904 č. 6404 (Min. C. V.) — Nařízení o pě-
těl cvičných her mládeže a o stipendiích pro jejich učitele.

. Ze dne 5. března 1904 č. 41.947 ex 1903 (Min. C. V.) — Vydán
eznam učebních knih pro rak. střední školy.

. Ze dne 24. března 1904 č. $\frac{A\ 301/3}{69}$ (c. k. okresní soud v Lipníku).
itelství zdejšího ústavu ustanoveno jest správcem nadace 20.000 K
ky české zemské vyšší reálky v Lipníku založené Augustinem
em.

. Ze dne 27. dubna 1904 č. 9228 (Min. C. V.) — Má se odepřít
žáků do reálky, u nichž pro tělesnou vadu jest předem zjištěna
neschopnost ke kreslení.

IX. Paměti ústavu za školní rok 1903—04

1. Počátek školního roku. Zápis a přijímací zkoušky I. třídy vykonány 15. a 16. července a 16. a 17. září. V červenci přijato 38 žáků, neodmítnut nikdo; v zářijové lhůtě přijato 1 odkázán žádný. Úhrnem bylo tedy přijato 57 žáků nových a 3 rep. Celkem do I. třídy 60 žáků. Zápis do ostatních tříd, zkoušky přijímací a opakovací provedeny 13., 14., 15. a 16. září 1903. Přijato celkem 10 žáků. Mezi rokem pak 1 do III. tř. a jeden do VI. tř., tak že úhrnem bylo přijato ve školním roku 1903—04 žáků 305; a to v oddělení nižším 195 a oddělení vyšším 110. Proti roku předešlému o 9 žáků.

Nově na ústav bylo přijato 75 žáků — (z nich 1 repetent). V předešlém roce bylo 230 (mezi nimi 14 repetentů) bylo na zdejšímu ústavě od předešlého.

Do II.—VII. třídy bylo přijato 18 nových žáků; do II. tř. 1 žák z I. tř. měšťanské školy v Přerově, 1 žák z I. tř. české reálky v Brně; do III. třídy: 1 žák ze III. tř. měšťanské školy v Frenštátě p. R., 2 žáci ze III. tř. měšťanské školy v Hranicích, 1 žák ze III. tř. měšťanské školy v Přerově, 1 žák ze III. tř. reálky v Jemnici po přerušení studií; do IV. třídy: 1 žák ze III. tř. měšťanské školy ve Frenštátě p. R., 1 žák repetent ze IV. tř. zemské reálky v Uh. Brodě, 2 žáci ze IV. třídy zdejšího ústavu po přerušení studií; do V. třídy: 1 žák ze IV. třídy zemské reálky v Kroměříži, 1 žák ze V. tř. státní reálky v Brně; do VI. třídy: 1 žák z V. třídy zemské reálky v Uh. Brodě, 1 žák ze VI. třídy státní reálky na Král. Vinohrady (od II. pol.), 1 žák ze VI. třídy zdejšího ústavu po přerušení studií; do VII. třídy: 1 žák ze VI. třídy zemské reálky v Prostějově, 1 žák ze VII. třídy zdejšího ústavu po přerušení studií.

Úhrnem bylo přijato na zdejší ústav 6 žáků ze škol měšťanských a to z Frenštátu p. R. 2, z Hranic 2, z Přerova 2.

Ve třídě I. a III. zřízeny byly pobočky se svolením zemského školního úřadu moravského ze dne 13. října 1903 č. 63.642.

Mezi školním rokem vystoupilo 21 žáků; setrvalo tudíž do konce školního roku 284 žáků.

Dle bydliště rodičů byli žáci z okresů: z hranického 10, z jiných okresů 109, a to: z přerovského 34, holešovského 18, mouckého 12, valašsko-meziríčského 9, novojičínského 8, místeckého 3, prostějovského 3, frýštatského (Slezsko) 3, litovelského 3, výškovského 2, uherskohradištského 2, kroměřížského 2, brněnského 2; po ještě 1 žák z okresu opavského (Slezsko), bíloveckého (Slezsko), zábřežského (Slezsko) a vítkovského (Slezsko).

Školní rok započal dne 18. září slavnou mší sv. a v níž byl předčten a vyložen řád disciplinární a dána jim patřičná poučení. Pravidelné vyučování započalo dne 19. září v 8 hod. ráno. —

2. Jmeniny J. Vel. císaře a krále Františka Josefa I. dne 4. září a památka jmenin zvěčnělé J. Vel. císařovny a královny Alžběty uctívány slavnými službami božími. Oba dny bylo prázdno.

3. Změny ve sboru učitelském vypsány jsou v kap. I.

4. Inspekci vyučování náboženství vykonal dp. farář Fr. P. Fr. Hajduček ve dnech 7. a 19. května 1904.

5. Ukončení obou pololetí. První pololetí ukončeno 13. února a druhé pololetí započato 17. února a ukončeno dnem 15. června 1904.

6. Zdravotní stav. Ve sboru učitelském podlehl těžké plicní chorobě supplující učitel Frant. Schenk. Zemřel dne 29. února a pochován 2. března 1904. Pohřbu zúčastnil se celý ústav se sborem, k němuž byly položeny věnce; u domu a hrobu žáci zazpívali smuteční píseň, cestou »miserere.« Zádušní mši měl ústav dne 3. března. O pohřbu a životě zesnulého jedná »posmrtná vzpomínka« v této zprávě. — Jinak ve sboru nebylo vážnějších chorob.

Mezi žactvem. Zemřel hodný a schopný žák IV. třídy Fr. Štěpán v Týně u Lipníka dne 17. května a pochován 19. května 1904. Žactvo se sborem učitelským zúčastnilo se sboru se srdečnou soustrastí, zazpívalo u domu a hrobu smuteční píseň, cestou »milosrdný Bože.« Zádušní mše sv. sloužena dne 20. května. Návštěva školy rušena byla hlavně ve vyšších třídách častějšími chorobami krku, plic a žaludku. V ostatních třídách byl zdravotní stav spokojivý. Ve dvou případech bylo vážné onemocnění (plic) příčinou opuštění žáků. Předpisů zdravotních bylo dbáno pečlivě, jak v oddělení VII. vysvětluje.

7. Posmrtná slavnost. Žactvo se sborem učitelským zúčastnilo se dne 31. října posmrtní památky zemřelého dobrodince ústavu Augustina Loserta. Po slavnostním requiem v kostele odebrali se průvodu s ostatními českými spolky na hřbitov, kde předseda českého spolku Dr. Fr. Brzobohatý měl u ozdobeného hrobu řeč o životě zemřelého. Na to zazpívali žáci smuteční sbory, čímž tato slavnost a dojemně důstojná slavnost skončila. Bližší o Augustinu Losertovi podává »posmrtná vzpomínka« v této zprávě.

8. Založení stipendia. V závěti zemřelého dobrodince reálky Augustina Loserta odkázáno bylo 20.000 korun pro chudé žáky na stipendium v Lipníku, které se uloží pro vždy jako základní kapitál, ze kterého se bude užívat k podělování deseti schopných, ctnostných, učenlivých žadatelů. Z přízně zakladatelovy mají na tato ustanovení právo.

9. Věci různé. Počátkem druhého pololetí odešel z činnosti c. k. zemský inspektor školní pan Jan Slavík, obdržev za své uznání své práce řád železné koruny třetí třídy. Na místo jeho byl dosavadní ředitel I. české státní reálky v Praze, vládní radní pan Vincenc Jarolímek.

10. Koncert. Dne 28. února 1904 uspořádán byl koncert, jehož program provedli žáci ústavu řízení učitele zpěvu Felixe Hlobila s aktivní účastí obecnosti z města i okolí. Úspěch byl čestný a hmotný (ve prospěch podporovacího fondu chudých studujících) velmi dobrý.

Pořad koncertu: 1. Jeremiáš: »Pozdrav pěvcův.« »Země jindy a nyní« (smíšené sbory). 2. Händl: »Largo« (unisono houslí s průvodem klavíru). 3. Bendl: »Pochod z nár. písní.« Janáček: Dvě písně z »Jenůfk«.

z »Kytice.« (mužský sbor). 4. Kovařovic: »Národní tance«, (dávny, Holuběnka, Sekerečka, Kalamajka, Malení, Trnky (orchestr). 5. Nápravník: »Melancholie«, (smyčcové nástroje). 6. Bendl: »Jiří« (smíšený sbor s barytonovým solem a průvodem klavíru). 7. vlasa: »Davorije na Kosovu« (orchestr). Na klavíru doprovázel kůru p. Ad. Osecký. Barytonové solo zpíval p. Fr. Mík, učitel hudebních věd.

Výkony náboženské.

1. Pravidelné služby Boží v neděli a ve svátek konaly se v farním chrámu Páně vždy o 11. hod. dopoledne. Před tím byla od 10. do 11. hod. exhorta pro nižší, od 11. do 12. hod. exhorta pro vyšší třídy ve škole.

2. Sv. svátosti pokání a oltářní přijali všichni žáci třikrát do roka a to dne 25. a 26. září 1903, dne 28. a 29. září 1904 a 11. a 12. července 1904. Abiturienti šli k sv. zpovědi a přijímání dne 8. července.

3. Velikonoční exercicie konány byly dne 27., 28. a 29. března 1904 ve spojení se sv. zpovědí.

4. Slavnosti Božího Těla dne 2. června 1904 zúčastnil se celý ústav se sborem učitelským.

5. Slavná mše sv. dne 4. října 1904.

6. Mše sv. na uctění památky J. Vel. císařovny a císařovny Alžběty dne 19. listopadu 1904.

7. Mše sv. za přátele, dobrodince a zemřelé žáků ústavu dne 12. července 1904.

8. Mše sv. na počátku školního roku dne 18. září 1904 s »Veni sancte«, na konci I. pololetí 13. února, na počátku II. pololetí dne 17. února 1904 a na konci školního roku dne 15. července 1904 s »Te Deum.«

9. Zpěv a hudbu církevní řídil učitel zpěvu Hlobil a který při každé mši sv. hrál na varhany, v zastoupení jeho přímá j. ředitel kůru Adolf Osecký.

Při bohoslužbách zpívali žáci občas příhodné vložky na kůru na květnou neděli pašije od P. Křížkovského.

Kromě těchto povinných výkonů náboženských chodívali žáci do kostela na služby Boží dobrovolně cestou do školy, při májových slavnostech a j.

X. Seznam žáků a jich rodiště.

Žáci poznamenaní hvězdičkou obdrželi vysvědčení 1. třídy s vyznamenáním.

Třída Ia.

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| * 1. Abendroth Jan, Lipník. | 6. Brázda Antonín, Partutov. |
| 2. Adam František, Osek. | * 7. Černocký Milán, Lipník. |
| 3. Bednář Antonín, Loučka. | * 8. Černý Leonard, Hlínsko. |
| 4. Blahák Jan, Osek. | 9. Čoček Karel, Radvanice. |
| * 5. Bořil Vladimír, Jezernice. | * 10. Dostál František, Kyselo. |

Orbal František, Nový Dvůr.
 Vořák Frant., Sušice. (Vyst.)
 Vořák František, Loučka.
 ěgida František, Tršice.
 řelích František, Dolní Újezd.
 řelích Karel, Staměřice.
 anslán Augustin, Hranice.
 ěgr František, Dolní Újezd.
 ěobil Josef, Osek,
 oneiser Ladislav, Lipník.

20. Hošťálek Jaroslav, Soběchleby.
 21. Hradil Josef, Kladníky.
 22. Humplík Jan, Černotín.
 23. Janča Antonín, Loučka.
 *24. Jemelík Josef, Sušice.
 25. Kalina Dobroslav, Lipník.
 26. Knopp Jaroslav, Trnávka.
 27. Kopeček Josef, Veselíčko.
 28. Kopečný František, Tršice.
 29. Kotek Josef, Lipník.

Třída Ib.

žrutil Antonín, Lhota.
 žučera Josef, Pardubice.
 Machačík Matěj, Horní Něčice.
 Makovička Julius, Lipník.
 Masek Cyril, Březová.
 Maťa Bedřich, Osek.
 Mikulík Stanislav, Kladníky.
 levtipil Jos., Sušice. (Vystoupil).
 Onderka Jan, Podhoří.
 Panák Stanislav, Osek.
 Parobek Jan, Pravčice. (Vyst.)
 Pecha Josef, Lhota.
 Pešák Josef, Miší.
 Pok Felix, Lipník.
 Pospíšil Josef, Osek.

14. Ryška Karel, Lipník.
 15. Ryška Leopold, Lipník.
 16. Stratil Josef, Lipník.
 17. Suchánek Alois, Jezernice.
 *18. Suchánek Ladislav, Beňov.
 *19. Šindler Vincenc, Lipník.
 *20. Štěpán Vincenc, Týn.
 21. Švarz Vojtěch, Velký Újezd.
 22. Švarc Josef, Křinec.
 23. Tomečka Jan, Loučka.
 24. Velech Antonín, Dolní Újezd.
 25. Vilímek Dobroslav, Lipník.
 26. Vodička Eduard, Uh. Hradiště.
 *27. Zigmuntík Adolf, Vel. Újezd.
 28. Žour Josef, Osek.

Třída II.

Černocký Ladislav, Lipník.
 Čoček Antonín, Jezernice.
 Čohnal František, Hlínko.
 Čohnal Josef, Hlínko.
 Čorbálek František, Trnávka.
 řelích Josef, Velký Újezd.
 Čogela Bedřich, Jezernice.
 Čoleňa Josef, Hustopeče.
 Čradílek Josef, Týn. (Vystoupil).
 Črnčířík Bohumil, Fryšták.
 Čhalupa Method, Bohuslávky.
 (Vystoupil).
 Čnáček Bedřich, Lipník.
 Čnásek Alois, Loučka.
 Čadlec Adolf, Lipník.
 Čoryčánek Eduard, Jezernice.
 Čořínek Jindřich, Lipník.
 Čoutný Antonín, Radvanice.
 Čratzl Vladimír, Rožnov.

17. Kubáč Antonín, Slavíč.
 18. Kučera Otmar, Malé Prosenice.
 19. Kunát Ladislav, Lipník.
 20. Lakomý František, Tršice.
 21. Majer Karel, Rožnov.
 22. Maloch Jan, Jezernice.
 23. Mezek Václav, Dombrová.
 24. Mück Ignát, Slavíč.
 25. Osecký Adolf, Rožnov.
 26. Pačák Jan, Dolní Újezd.
 27. Petzl Zdeněk, Telč.
 28. Pliska Vojtěch, Týn.
 29. Raška Josef, Štramperk.
 30. Ryšánek František, Loučka.
 31. Stejskal František, Osek.
 32. Strnad Alois, Krčmaň.
 33. Suchánek Antonín, Jezernice.
 34. Šustek František, Luboměř.
 35. Švarc Václav, Dolní Bousov.

- *36. Trčka Richard, Tylovice. *38. Vaněk Ferdinand, Jindřich.
 37. Vagrčka František, Jezernice. 39. Vilímek Vladimír, Lipník
 40. Žůr Jan, Dolní Újezd.

Třída IIIa.

- | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. Antoníček Rudolf, Brno. | 15. Hradilík Josef, Šišma. |
| 2. Bartoněk Richard, Milotice. | *16. Hubeňák Josef, Štramberk. |
| 3. Baumgartl Pavel, Brodek. | 17. Hübner Karel, Praha. |
| * 4. Bednářík Melichar, Velký Újezd. | 18. Chalupa Viktor, Kopřivna. |
| 5. Bubela Ctibor, Vsetín. | 19. Charamza František, Osek. |
| 6. Buček Jan, Kopřivnice. | 20. Jaroš Jan, Čechy (u Přerova). |
| 7. Částečka Ignác, Slavič. | 21. Jemelka Josef, Lhota. |
| 8. Černoch Frant., Frenštát p. R. | 22. Kadlec Otto, Olomouc. |
| 9. Daněk Jaroslav, Lobodice. | *23. Kavka Karel, Osek. |
| 10. Dragoun Jan, Bedihošť. | *24. Klézl Alois, Jindřichov. |
| 11. Dvořáček Josef, Tovačov. | 25. Kněžek Method, Holešov. |
| 12. Floder František, Lipník. | 26. Kohout František, Zbraž. |
| *13. Hnilica Jindřich, Buk. | 27. Kolář František, Velký Újezd. |
| *14. Hradil Eduard, Podhoří. | 28. Krkoška Sebald, Rožnov. |
| 29. Kučera Jiří, Přerov. | |

Třída IIIb.

- | | |
|--|---------------------------------|
| 1. Lorek Jan, Brno. | 11. Richter Josef, Lipník. |
| — Malík Jiří, Brno. (Vystoupil.) | — Skříčka Ant., Jezernice. |
| 2. Mašíček Václav, Dřevohostice. | *12. Spáčil Leopold, Lipník. |
| 3. Maša Josef, Osek. | *13. Stejskal František, Buk. |
| 4. Matějka Karel, Tišnov. | 14. Suchánek Bedřich, Osek. |
| — Metelka Josef, Velký Újezd. | — Sychrovský Václav, Čáslav. |
| (Vystoupil.) | (Vystoupil.) |
| 5. Navratovič Jindřich, Lipník. | 15. Šindler František, Kelč. |
| * 6. Nevřela Innocenc, Malé Prosenice. | 16. Šindler Ludvík, Lipník. |
| * 7. Osecký Konrád, Rožnov. | 17. Škandera Jan, Slavič. |
| 8. Panák Alois, Veselíčko. | 18. Travenec František, Přerov. |
| — Pavelka Arnošt, Hranice. (Vyst.) | 19. Vaka Svatoslav, Tovačov. |
| 9. Pátek Stanislav, Osek. | — Viliš Frant., Podhoří. |
| — Peřina Hubert, Přerov. (Vyst.) | 20. Zapletal Antonín, Šišma. |
| *10. Potěšil Jaroslav, Lipník. | 21. Zapletal Jan, Černotín. |
| 23. Zlámalík František, Radvanice. | 22. Zapletal Vladimír, Kojč. |

Třída IV.

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------------|
| 1. Adam Methoděj, Osek. | * 7. Humplík Arnošt, Střítež. |
| 2. Bernkop Ludvík, Hustopeč. | 8. Kadláček Frant., Chomolov. |
| 3. Bočáň Vilém, Jezernice. | 9. Kebrle Otakar, Vyškov. |
| 4. Dočkal Josef, Majetín. | 10. Kocián Josef, Soběchleby. |
| 5. Fassmann Vladimír, Rožnov. | *11. Kramoliš Frant., Frenštát p. R. |
| 6. Honeiser Jan, Lipník. | 12. Kuzník Jan, Podolí. |

Látal Jan, Křelov.
 Livečka František, Lipník.
 Macháč Karel, Loučka. (Vyst.)
 Machanec Zdeněk, Lipník.
 Merta Josef, Brníčko.
 Münster Viktor, Hranice.
 Novák Jan, Jezernice. (Vystoup.)
 Novák Josef, Praha.
 Ortel Miroslav, Lutín.
 Pecháček Josef, Šišma.
 Pospíšilík Lukáš, Biskupice.

*22. Rek František, Drahotuše.
 23. Ryšánek Ladislav, Bohuslávky.
 *24. Spurný Josef, Svísedlice.
 *25. Svoboda František, Lipník.
 26. Špaček František, Olšina.
 *27. Šrámek Vojtěch, Vel. Lazníky.
 — Štěpán Frant. J., Týn. (Zemřel.)
 *28. Uhérek Miloslav, Beňov.
 29. Veverka František, Bohuslávky.
 30. Zavadil Jaroslav, Týn.
 *31. Zavadil Methoděj, Hlinsko.

Třída V.

Balhar Karel, Lipník. (Vystoup.)
 Bednář Lambert, Loučka. (Vyst.)
 Beneš František, Hlinsko.
 Dostál Ludvík, Hrabůvka.
 Jaďourek Jan, Týn. (Vystoupil.)
 Jalůvka Josef, Frenštát p. R.
 Janáček František, Veselíčko.
 Jančík Ludvík, Paršovice.
 Kašpařík Jan, Lipník.
 Klesnil Alois, Hlinsko.
 Kvaňa Antonín, Paršovice.
 Krejčí Josef, Klužínek.
 Kurfürst Jan, Drahotuše.
 Machanec Antonín, Slavíč.
 Majtner Pavel, Šumvald.
 Nesvadba Jan, Suchonice.
 Pátek Josef, Osek.
 Povolný Otakar, Veselíčko.
 *34. Zubaník Josef, Věrovany.

16. Prečan Libor, Tršice.
 *17. Rajchl Methoděj, Písařov.
 18. Rakovčík Hubert, Radvanice.
 19. Repper Antonín, Frenštát p. R.
 20. Řihošek Josef, Klopotovice.
 *21. Růžička Bohumír, Lipník.
 22. Skála Jan, Soběchleby.
 23. Skopal František, Osek.
 24. Skříčka Jan, Lobodice.
 25. Spiruta František, Podhoří.
 26. Škrabal Vojtěch, Topolany.
 *27. Šustr Václav, Dol. Zavadilka.
 28. Tomečka Ladislav, Štěpánov.
 29. Václavík Josef, Soběchleby.
 30. Vavrouch Frant., Hradibořice.
 31. Vilímek Ladislav, Podhoří.
 *32. Vrtal Rudolf, Kocourovce.
 33. Vybíral Jaroslav, Troubky.

Třída VI.

Bágara František, Týn. (Vyst.)
 Bartoň Josef, Hodslavice.
 Baumgartl Karel, Brodek.
 Bláha Josef, Hodolany.
 Čerha Jan, Dymokury.
 Dohnal Milán, Polkovice.
 Dubovský Antonín, Frenštát p.
 Radhošť. (Vystoupil.)
 Fárek Jan, Lipník.
 Gregorek Method, Hustopeče.
 Halla Hugo, Napajedla.
 Japala Ludvík, Velká.
 Jomolka Jan, Přerov.

11. Hrabal Jaroslav, Mezice.
 12. Hrubec Antonín, Velká.
 13. Chalupa Antonín, Lazníčky.
 *14. Choleva Jindřich, Frenštát p. R.
 15. Jalůvka Josef, Dolní Sklenov.
 16. Jarošek Jaroslav, Vsetín.
 17. Kubáč František, Kozlovice.
 18. Laštovica Josef, Ludkovice.
 *19. Livečka Alois, Hulín.
 *20. Machanec Josef, Slavíč.
 21. Malatík Eugen, Rožnov.
 22. Marek Bohumil, Lipník.
 23. Ministr Jakub, Luková.

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------------|
| 24. Novák František, Dolní Újezd. | 30. Študent Alois, Žakovice. |
| *25. Pečiva Jan, Lipník. | — Tábořský Albert, Bystřice. |
| 26. Pešek Kamil, Orlová. | (Vystoupil.) |
| 27. Richtr Karel, Lazníčky. | 31. Tauber Alois, Velký Týn. |
| *28. Solař Stanislav, Sovadina. | 32. Uhlíř František, Slavkov. |
| 29. Sychrovský František, Orlová. | 33. Vaculík František, Domaž. |
| 34. Vaculík Methoděj, Žólkiew. | |

Třída VII.

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| * 1. Bek Methoděj, Tupec. | 19. Kojecký Václav, Rymnice. |
| 2. Bubela Ladislav, Vsetín. | *20. Kolář Oldřich, Tovačov. |
| 3. Černý Hubert, Lábudice. | 21. Krečmer František, Soběcl. |
| * 4. Dobeš Ludvík, Střítež. | *22. Kubík Antonín, Lazníčky. |
| 5. Dohnal Josef, Soběchleby. | 23. Livečka Rudolf, Lipník. |
| 6. Dolník Julius, Rymice. | *24. Novák Alois, Velká Blat. |
| 7. Dostálík Josef, Pavlovice. | 25. Pacula Bedřich, Lýsky. |
| 8. Doubravský Jan, Roketnice. | 26. Palla Josef, Jezernice. |
| 9. Filípek Ladislav, Hněvotín. | *27. Panák Nikodem, Veselíčk. |
| 10. Fuksa Josef, Sřebětice. | 28. Pařízek Quido, Veselíčk. |
| 11. Halla Jaroslav, Drahotuše. | 29. Skříčka Stanislav, Jezerni. |
| *12. Hanslian Alois, Hranice. | *30. Sviták Jaroslav, Kopřivni. |
| *13. Hlavička Jan, Lipník. | 31. Šrom František, Slavič. |
| 14. Horák Emerich, Hranice. | 32. Štěpán Jan, Frenštát p. R. |
| *15. Hýža Jaroslav, Mrlínek. | 33. Tichák Jaroslav, Lazníčky. |
| *16. Karel Jan, Krásno. | 34. Tichák Otakar, Lazníčky. |
| 17. Klevar Jan, Žádlovice. | 35. Valášek Otakar, Buk. |
| 18. Kojecký František, Rymnice. | 36. Zumbal Josef, Hranice. |

XI. Do kterých škol může jít žák z reálky

Z I. třídy: do II. třídy nižší reálky vojenské; 13letí do přípr. české obchodní školy v Brně.

Z II. třídy: do III. třídy nižší reálky vojenské; do všeobecných škol řemeslných v Jaroměř, Kladně, Litomyšli, Mladé Boleslavi a Votavě; do přípravy některých obchodních škol (také žáci 12letí z I. třídy do průmyslové a obchodní školy ve Lvově); do lesnické školy v Aggsb.

Z III. třídy: do IV. třídy nižší reálky vojenské; do vyučov. ústavu obchodního v Brně; do I. ročníku české vyšší obchodní školy v Plzni; do I. ročníku vyšších průmyslových škol v Praze a v Brně; do II. ročníku státní průmyslové školy ve Štýr. Hradci; do II. ročníku nižší odborné školy pro stavitelské a strojnické zámečnictví a do I. ročníku odborné školy pro elektrotechniku při c. k. technologickém průmyslovém museu ve Vídni.

Z I., II. a III. třídy: 1. je-li žákovi 14 let: Do dvojtřídní obchodní školy gremia v Přerově, v Praze a Vyškově; do strojnické školy v Přerově; do pražské vzorné obchodní školy Československé obchodní besedy; do I. ročníku strojnického nebo stavitelského oddělení

yslových škol českých v Brně, v Praze a v Plzni (po odbyté praxi slnické); do I. ročníku odborných škol pro jednotlivá průmyslová tví (jsou to na př.: odborná škola pro průmysl dřevařský v Chrudimi Val. Meziříčí; odborná škola pro umělé zámečnictví v Králové ci; odborná škola sochařská a kamenická v Hořicích; odborná pro zlatnictví a broušení drahokamů v Praze a Turnově; odborná hrnčířská v Bechyni a ve Znojmě; odborná škola pro tkalcovství ě a v Náchodě; odborná škola pro košíkářství ve Val. Meziříčí; ecko-průmyslová škola pro sklářství v Hajdě; umělecko-průmyslová pro pasíře, rytce, výrobce bronzového zboží v Jablonném); do I. ku nižších škol hospodářských ve Bzenci, Ivančicích, Hradišti, ěříži, Místku a Vel. Meziříčí; do zahradnické školy v Praze na a Brně; 2. Je-li mu 17 let, do pomologického ústavu zemského oji u Prahy.

Ze IV. třídy: do V. třídy školy reální; do I. ročníku učitelských ů v Brně, Kroměříži, Příboře a j.; do I. ročníku vyšší reálky vo- é; do I. ročníku obchodních akademií v Praze a v Chrudimi; do ročního odborného kursu při obchodním vyučovací ústavě v Brně; ročníku hospodářských škol středních v Přerově, Hracholuskách udnice a v Chrudimi; do I. ročníku oenologického a pomologického u vyučovacího v Klosterneuburku; do I. ročníku vyučovacího u pro lesníky v Bělé; do umělecko-průmyslové školy v Praze; ol pro lesníky; do škol pro pěstování lesů (nižší lesnické školy) ku; do sladovnické školy v Mödlinku; do lihovarské školy v Praze; aveckých škol, do úřední praxe u úřadů berních, důchodkových nocných; do přípravy král. vyšší hospodářské průmyslové školy ké v Táboře; do c. k. malířské akademie v Praze a výtvarných í ve Vídni.

Z V. třídy: do střední školy lesnické v Hranicích; do II. ročníku reálky vojenské; do II. ročníku kadetní školy pro pěší a jízdní o; do II. ročníku námořní akademie; do I. ročníku dělostřelecké nýrské kadetní školy; do vyššího ročníku obch. akademie.

Ze VI. třídy: do III. ročníku vyšší reálné školy vojenské; do ňíku zeměbranecké kadetní školy (s přijímací zkouškou také tř.); do II. ročníku střední školy hospodářské v Přerově; do lé- cké praxe (když se podrobí zkoušce z latiny); do vyššího ročníku dních akademií.

Ze VII. třídy:

1. bez maturitní zkoušky:

I. ročníku kadetní školy pro pěší a jízdní vojsko; do II. ročníku í školy pro dělostřelce a pionýry; do vysoké obchodní školy stu; do kursu pro abiturienty při obchodních akademiích ve Vídni Štýrském Hradci; jako mimořádný posluchač do kursu železnič- a telegrafního; do úřední praxe při úctárnách a poštách;

2. s maturitní zkouškou:

sokou školu technickou (inženýrství, architektura, vyšší strojnictví, otechnika a lučebnictví); na vysokou školu pro zemědělství ve (odbor polního hospodářství a odbor lesnický); do hornických mii; do vojenských akademií ve Vídni a Vídeňském Novém Městě;

na universitu (když se podrobí doplňovací zkoušce maturitní); do pro abiturienty při obchodních akademiích ve Vídni a Štýrském I do IV. ročníku učitelských ústavů, kdež jest abiturientovi doplňturitní zkoušku z odborných předmětů učitelských. Konečně může býti za námořního aspiranta do c. k. válečného loďstva, nebo do v akademie c. k. rak. obchodního musea ve Vídni.

Poděkování.

Všem dobrodincům, přátelům a příznivcům, kteří přispěli ku založení a rozmnožení sbírek dary knih, učebných pomůcek, per kteří chudé žactvo ústavu lidumilně podporovali a všem, kteří bem jakýmkoliv šlechetnou přízeň škole projevovali, vzdává telství nejvřelejší díky, prosíc zároveň, aby laskavě zač ústavu svou náklonnost a vzácnou přízeň a podporovali jeho snahy i v budoucnu.

XII. Návěští pro školní rok 1904-1905.

I. Zápis nových žáků do I. třídy

bude před prázdninami v pátek a v sobotu dne 15. a 16. června prázdninách v pátek a v sobotu dne 16. a 17. září vždy od 8.—1 dopoledne.

Každý žák, který chce býti přijat do I. třídy, dostaví se s matkou, nebo jejich zástupcem a předloží při zápisu:

I. Křestní list, jímž má prokázati, že jest mu aspoň 10. nebo že do konce roku 1904 ukončí 10. rok svého věku; 2. vyčtení frekventační, nebo dle předpisu vydané poslední školní zprávy; 3. přijímací taxu a příspěvek na učebné pomůcky, je dohromady 6 K 20 h.

Skutečné přijetí žáka závisí na příznivém výsledku písemných zkoušek, jež se konají v den zápisu písemně od 12. hod. dopoledne a ústně od 2. hod. odpoledne.

Z náboženství jest toliko zkouška ústní; z pravidla se u jen těm žákům, kteří si ze školy obecné přinesou známku nižší »dobrou«.

Žádá se tolik vědomostí, kolik lze nabýti v prvních čtyřech třídách školy obecné.

II. Z jazyka českého a počtů jest zkouška písemná i ústní. Kdo však při zkouškách písemných obdrží aspoň známku »dobrou« a má v oněch předmětech nejméně tutéž známku na vysvědčení ze školy obecné, tomu mohou býti zkoušky ústní prominuty.

Z jazyka českého se žádá hbité čtení a psaní, znalost částek tvarosloví, sběhllost v písemném a ústním rozebírání jednoduchých slov a jednoduchých rozšířených vět, znalost pravidel pravopisu a správné jich užívání při psaní diktanda.

Z počtů se vyžaduje důkladná znalost 4 základních způsobů počítání čísly celými. Příklady slovné.

Výsledek zkoušky oznámí se hned po ní.

Opakovatí nezdařenou přijímací zkoušku téhož roku není dovoleno ani na jiné reálce nebo gymnasiu ať českém nebo německém. Kdyby žák při zkoušce neobstál, vrátí se mu zaplacená taxa. Místností, kde se zkouší, nemá obecenstvo přístupu.

2. Zápis žáků nových do vyšších tříd II.—VII. se hlásících

se konati v ředitelně dne 13. a 14. září vždy od 10—12 hodin.

Přicházejí-li ze škol středních (gymnasia nebo reálky), hlásí se se svými rodiči nebo jejich zástupci a předloží: všechna vysvědčení dříve nabytá a na vysvědčení z II. pololetí minulého školního roku od ředitelství stvrzení, že byl bez závady propuštěn a zda-li jest školného osvobozen; 2. křestní list neb výtah z matriky.

Přestupují-li na reálku žáci z gymnasia, kde se neučí kreslení jako předmětu obligátnímu, musí se podrobiti přijímací zkoušce z tohoto předmětu. Mimo to jest jim složiti zkoušku příjímání z těch předmětů, které na gymnasiu učebnou osnovou, rozdělením a rozsahem její v jednotlivých třídách od reálky se odlišují.

Chodil-li žák do střední školy německé, dělá kromě zkoušku z jazyka českého.

Žáci škol měšťanských mohou býti přijati do II., III. nebo IV. třídy reální na základě přijímací zkoušky ze všech povinných předmětů předěšlých tříd reálných. Při zápisu předloží křestní list a všechna vysvědčení za minulá léta.

Žáci soukromí, kteří se připravovali buď doma, nebo na soukromém ústavu, předloží: křestní list nebo výtah z matriky, vysvědčení o uspokojivém vzdělání a zachovalosti od obecního a farního úřadu a podrobí se přijímací zkoušce ze všech povinných předmětů předěšlých reálných.

Každý nový žák zaplatí u zápisu přijímací taxy 6 K 20 h. a taxa za přijímací zkoušku do vyšších tříd než první platí se u zápisu 24 K a nevrací se, kdyby žák u zkoušky neobstál.

3. Zápis žáků, kteří na zdejší reálce pokračují,

dne 17. září o 8. hod. ranní ve třídách, do kterých budou cho-
Příspěvek na učebné pomůcky 2 K.

Opravné zkoušky za druhé pololetí šk. r. 1903—1904 konají se budou 16. září od 8—12 hod. Žáci k nim odkázaní přihlásí se ředitelně před 8. hod. ráno.

4. Školné.

Školné platí se 30 K pololetně v prvních šesti nedělích každého školního roku napřed. Žáci opravdu chudí a nemajetní vůbec mohou býti osvobozeni od celého nebo od polovice, když vyhověli zákonitým požadavkům v mravech, pilnosti a prospěchu.

Žákům I. třídy může býti dle výn. c. k. ministerstva kultu učování ze dne 6. května 1890 placení sečkáno, jsou-li chudí nemajetní, a když osvědčí v první polovici I. pololetí (do konce padu) prospěch ve všech předmětech nejméně »dobrý« a má-li na pilnost aspoň druhého stupně »uspokojivé«. Budou-li placeni na konci pololetí dobré vysvědčení, platí toto sečkání také jako bození již za I. pololetí.

Za tento odklad, po případě osvobození, budiž podána do doby na počátku školního roku žádost, opatřená řádným vysvědčením chudoby nebo nemajetnosti dle předepsaného k tomu vzoru.

Vysvědčení chudoby nebo nemajetnosti musí být ve všech rubrikách řádně a pravidelně vyplněno, hlavně cena pozemku a výše daně přímo vyznačena a vysvědčení stvrzeno: 1. od obecního úřadu, 2. od farního úřadu, 3. od c. k. hejtmanství; má-li žadatel nebo jeho rodiče nějaký pozemek nebo majetek nemovitý, také 4. od okresního úřadu okres. soudu. Schází-li některá z těchto podmínek, je vysvědčení platnosti. Vysvědčení nemajetnosti nesmí být přes rok a nepodléhá ani ono, ani žádost za osvobození kolku.

5. Podpory.

Žáci chudí, mravní a pilní dostanou pokud možno podporu: školní knihy, potřeby ku psaní a kreslení a obědy. Žádosti podávají se při zápisu. Dobrovolné příspěvky na podporu chudých a hodných přijímá u zápisu ředitel.

6. Předměty vedlejší.

Němčina jest podle zemského zákona mor. předmětem hlavním a řádným. Nepovinné jsou praktická lučební cvičení v laboratoři, těsný zpěv, hudba. Zpěvu učí se zdarma; hře na housle za malou měsíční odměnu.

V pololetí nesmí žák z předmětu vedlejšího vystoupiti; na konci pololetí jen na odůvodněnou žádost rodičů. Vyňaty jsou z poplatků, když sbor profes. z vážných příčin uzná za dobré, aby žák vystoupil.

Školní rok 1904—1905 započne v neděli dne 18. září v 11 hod. ráno. Vzpomínání Ducha sv. a slavnou mši sv. ve farním chrámu.

Vyučování započne dne 19. září 1904 o 8. hodině ranní.

Ředitelství zemské vyšší reálky.

V Lipníku, dne 15. července 1904.

František Jansa

ředitel.

OBSAH.

Strana

ratura výrazu $dx = \frac{(y^2 + b^2) dy}{\sqrt{4a^2 y^2 - (y^2 + b^2)^2}}$.	Napsal prof. Karel Novák .	3
posmrtné vzpomínky (Augustin Losert, Frant. Schenk). Napsal ředitel		
Frant. Jansa		7
Sbor učitelů		14
Osnova učebná předmětů hlavních		18
) Látka		18
) Četba		20
) Úkoly k písemným pracím		27
) Knihy učebné		31
Osnova učebná předmětů vedlejších		38
Sbírky učebné		40
Statistický přehled žactva		49
Maturitní zkoušky		53
Podporování nemajetného žactva		58
Tělesný výcvik žáků		59
Některá vynesení úřadů školních		63
Paměti ústavu		64
Seznam žáků		66
Do kterých škol může jít žák z reálky		70
Návěští pro 1904—5		72



A MODERN FRENCH CALCULUS.

Cours d'Analyse Mathématique. Par ÉDOUARD GOURSAT,
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. Tome I.
Gauthier-Villars, Paris, 1902.

THE revision of the fundamental principles of the calculus, which was initiated by Cauchy and Abel and carried through by Weierstrass and his followers, led to the development of the ϵ -proof (early introduced by Cauchy) and to the precise formulation of definitions and theorems. In Germany and Italy a tendency sprang up to place only such restrictions on definitions and theorems as are necessarily imposed by the nature of the case. Thus functions continuous throughout no interval whatever were admitted as the integrand of a definite integral simply because the form of the definition of the integral applied to a certain class of these functions, and the question was examined of how far the ordinary theorems of the integral calculus hold for such functions. Again, the theorem that

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ was proved with fewer restrictions than the continuity of all the derivatives that enter. While this procedure is perfectly justifiable so far as it is a question of research in a special field, it is important not to lose sight of the fact that investigations of this sort are but a very special phase of modern analysis, and that even the specialist in the field of analysis may never need to trouble himself about the integrals of other functions than those which are continuous except at a finite number of points. That which is essential for every mathematician to know who has occasion to use the calculus to any extent is a simple formulation of the theorems and simple tests for the validity of the processes of the calculus which have been handed down to us from Euler's time and earlier : — when may a convergent series of continuous functions be integrated term by term, when may a definite integral whose integrand satisfies reasonable conditions of continuity be differentiated under the sign of integration? These are questions of general interest to mathematicians. To the importance of a simple and lucid answer French mathematicians are alive. With full appreciation of modern standards of rigor they do

not allow themselves to obscure in their presentation of the calculus the main facts of analysis by cumbersome details.

The book before us belongs to the best type of modern French treatises on the calculus. It is based on Professor Goursat's university lectures. According to the plan of instruction in France the student of mathematics learns at the *lycée* the meaning and use of derivatives, differentials not being introduced, and the rudiments of algebraic analysis.* Thus the university teacher can assume that the student is familiar with the notion of the limit and the elementary methods of the calculus, and that he has sufficient maturity to understand a treatment of the calculus such as is given in American universities in a second and third course.

After some introductory paragraphs, in which Rolle's theorem and the law of the mean are given, the author proceeds to systematic treatment of partial differentiation, based on the total differential of a function. The fundamental theorems on which the properties of such differentials rest and which are overlooked in English text-books on the calculus† are here given their proper place.‡

Chapter II, pages 40–100, begins with the existence theorem for implicit functions, the proof being that which Dini gave in his lectures of 1877/78; and then follows the differentiation of the functions thus defined, properties of the Jacobian determinant, and change of variable. In algebra and algebraic analytic geometry the mere rudiments of partial differentiation suffice for the applications that arise; but in differential geometry and mathematical physics this is not the case. It is highly desirable that partial differentiation should be studied more at length than is at present the case, and a complete and lucid treatment such as is here given § will aid the teacher in modifying his course in that direction.

In American colleges students of calculus are not mature enough to appreciate existence theorems at the time when they

* Cf. Pierpont, "Mathematical instruction in France," BULLETIN (2), (1900), p. 225.

† Cf. The writer's review: "A modern English calculus," BULLETIN (2), 8 (1902), p. 253.

‡ Cf. § 16, top of p. 29, and the corresponding theorem in § 14.

§ The present treatment is much fuller than that of Jordan, *Cours d'analyse*, and is illustrated by numerous applications of substantial character. A few examples taken from thermodynamics would have been a useful addition.

study partial differentiation and it is best to assume that equations defining implicit functions can be solved and lead to functions which have derivatives. It is easy, however, in using Professor Goursat's book, to assume these theorems at this stage and take them up later. In a logical development of the calculus they belong where the author has put them and for the working mathematician the arrangement here adopted is the most satisfactory one.

A few matters of detail before leaving these chapters. On page 5, line 12 from the top, the words "et à rester" should be inserted before "supérieure." The definition of approaching a limit in the case of a function of several variables is not given; the continuity of such a function is however carefully defined. The law of the mean for functions of several variables might well have been given a place in Chapter I. It appears nowhere explicitly, merely as a special case of Taylor's theorem with the remainder in Chapter III. On page 45, near the bottom, it is not of course true that if the three partial derivatives vanish simultaneously, the point is necessarily a singular point. This oversight occurs at various other places in the book. In the theorem at the beginning of § 28 it is necessary for the proof that for the system of values of (u_1, \dots, u_n) considered the partial derivatives $\Pi_{u_1}, \dots, \Pi_{u_n}$ should not vanish simultaneously. This requirement should be made in the statement of the theorem. In this section (§ 28) the author does not bring out with all the clearness one could wish the fact that there are in all three cases: (a) the case in which the Jacobian determinant does not vanish; (b) the case in which it vanishes identically; and (c) the case in which it vanishes at a given point, but not at all points in the neighborhood. Cases (a) and (b) are treated. But little is known about case (c), and there is no reason for considering it; but the classification is important. A large number of examples are given at the end of Chapters I and II, all of which are taken from life. While the student will need to do many easy examples, like those given in English books on calculus, at the start, he will have the satisfaction in working these more difficult ones of knowing that they are not artificial, that they truly illustrate the actual applications of partial differentiation.

Chapter III is devoted to Taylor's theorem with the remainder and to Taylor's series, both for functions of one and for functions of several variables, and to applications. The

French have not committed themselves to the exclusive use of power series.* When it is simpler to use Taylor's theorem with the remainder, they do so; and it is an excellent feature of the book before us that the infinite series is not employed when the finite series is better suited to the purpose. Indeterminate forms are treated by the use of Taylor's theorem, but we miss the more general theorem that if $f(a) = \phi(a) = 0$ or ∞ , and if $f'(x)/\phi'(x)$ approaches a limit, then $f(x)/\phi(x)$ approaches a limit and $\lim f(x)/\phi(x) = \lim f'(x)/\phi'(x)$. Thus such limits as

$$\lim_{x=0} x \log x \qquad \text{or} \qquad \lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x},$$

or more generally

$$\lim x^a (\log x)^b,$$

when $x = 0$ or ∞ ; or again

$$\lim_{x=\infty} x^n e^{-x}$$

must each be evaluated by a special investigation,—one for which no general method is given.

The treatment of maxima and minima of functions of several variables is admirable, adequate and clear, but not overdone.† The examples studied are well chosen and include clothed problems that do not come under the ordinary rule.

Chapters IV–VII, pages 150–368, are entitled respectively Definite Integrals, Indefinite Integrals, Double Integrals, and Multiple Integrals, Integration of Total Differentials. In American colleges the custom is growing of introducing the definite integral, defined as the limit of a sum and represented by the area under a curve, early in the first course in calculus, and of applying it to the solution of a variety of problems in physics and mechanics. Thus the student comes to the second course in calculus with a pretty good idea of what integrals are

* This tendency in Germany is well hit off by Bohlmann in his report on important works on the calculus, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 6 (1897), p. 110. One of the entries in the table of contents reads “Es gibt nur Potenzreihen!”

† The definition of a maximum or a minimum on page 130 would seem to exclude the case that $f(c+h) - f(c)$ can vanish for other values of h than the value $h=0$; but this is not the definition employed on page 136: “Le cas où $b^2 - ac = 0 \dots$ ”

and what they are for, and he is prepared for the study of double integrals, improper integrals and functions defined by integrals. It is at this stage, that is, in the second calculus course in American colleges, that these chapters of Professor Goursat's book may be employed with great advantage. They give a simple and rigorous elementary treatment of the subjects just mentioned — particularly the chapter on double integrals, pages 282–333 — a masterpiece of presentation, so clear and rigorous and to the point that it may well serve as a text in the treatment of this subject. Regarding the first of these chapters a similar remark applies to the one made concerning the existence theorem for implicit functions in Chapter II; namely, that in the second course in calculus it is well to assume the theorems about continuity, the proof coming more properly at a later stage, when questions of uniform convergence are treated; but here again the arrangement which the author has adopted will commend itself to the working mathematician as being the natural sequence of topics. There is one omission that seems to us unfortunate. It is that of Duhamel's theorem regarding the representation of any infinitesimal in a limit of a sum by another infinitesimal that differs from it by one of higher order. But as we are treating this subject at length elsewhere, we restrict ourselves here to a reference.*

The following topics considered in these chapters deserve special mention because of the lucid and rigorous treatment: change of variables in simple and multiple integrals §§ 84, 128,† 130, 145, 150; improper integrals simple and multiple,

* *Annals of Math.* (2), 4 (July, 1903).

† The method here set forth of proving by means of Green's theorem that when curvilinear coördinates $x = f(u, v)$, $y = \phi(u, v)$ are introduced, the area Ω bounded by the curves $u = u_0$, $u = u_0 + du$, $v = v_0$, $v = v_0 + dv$ is

$$\Omega = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right| du dv,$$

where the Jacobian is to be formed for a certain point (u', v') in Ω , is especially elegant. The author's reason for not extending it to triple integrals was doubtless that the formulas become a little long; but they present no serious difficulty and the generalization may well serve as an exercise for the student, his attention being first called to the fact that the three-rowed Jacobian may be written in the form

§ 89*-91, 133; line and surface integrals, including Green's and Stokes's theorems, §§ 93, 126, 135, 136, 149, 151-155; differentiation under the sign of integration, § 97; approximate calculation of an integral by Simpson's and Gauss's rules, Amslers's planimeter, § 99-102; the geometric interpretation of the method of rationalization employed for computing the integrals $\int R(x, \sqrt{a + bx + cx^2})dx$, § 105.

Chapters VIII, IX, pages 369-478, deal with infinite series. The subject is treated *ab initio* and the ordinary tests for convergence and theorems relating to the algebraic transformation of series are developed with the clearness and rigor that mark the whole book. But the last page of § 169 relating to double series whose terms are not all of like sign needs to be expanded. — The definition of uniform convergence in the case of infinite series is the one given by Darboux,[†] and is as follows: The series of continuous functions

$$u_0(x) + u_1(x) + \dots,$$

convergent in the interval (a, b) , is said to be uniformly convergent in this interval if to every positive ϵ there corresponds a positive integer n , independent of x , such that the remainder

$$R_n(x) = u_n(x) + u_{n+1}(x) + \dots,$$

remains in absolute value less than ϵ for all values of x in the

$$\begin{vmatrix} f_u & f_v & f_w \\ \phi_u & \phi_v & \phi_w \\ \psi_u & \psi_v & \psi_w \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial u} \begin{vmatrix} f_v & f_w \\ \phi_v & \phi_w \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial v} \begin{vmatrix} f_w & f_u \\ \phi_w & \phi_u \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial w} \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ \phi_u & \phi_v \end{vmatrix}.$$

The possibility of this extension was pointed out by the author in his original paper, *Bulletin des sciences math.* (2), 18 (1894), p. 72.

* The theoretical developments here given are especially simple. The rule for the convergence of the integral

$$\int_a^b f(x)dx,$$

when $f(x)$ is discontinuous at the point $x = a$, page 198, bottom, can, however, be formulated still more simply if we require merely that for some value of $0 < k < 1$ the variable $(x-a)^k f(x)$ shall approach a limit when x approaches a . A similar remark applies to the formulation of the other tests for convergence and divergence of improper integrals.

[†] *Ann. École norm.* (2), 4 (1875), page 77.

interval. It will be observed that this definition differs from the one ordinarily given in that it does not require that $|R_n(x)| < \epsilon$ for every $n > n$, but only for one value of n . Nevertheless the proof that such a series represents a continuous function is sound. The proof that the series may be integrated term by term is, however, invalid, as the following example shows: let

$$\begin{aligned} S_n(x) &= nxe^{-nx^2} \text{ when } n \text{ is odd;} \\ S_n(x) &= 0 \quad \quad \quad \text{" } n \text{ " even.} \end{aligned}$$

Here the term by term integral in the interval $(0, 1)$ has the value

$$\begin{aligned} \int_0^1 S_n(x) dx &= \frac{1}{2}(1 - e^{-n}) \text{ when } n \text{ is odd;} \\ &= 0 \quad \quad \quad \text{" } n \text{ " even.} \end{aligned}$$

What is true is this: if such a series be integrated term by term and parentheses then be suitably introduced, the series of parentheses will converge toward the integral of the function as its limit. Tannery* has called attention to the fact here mentioned, namely, that a series uniformly convergent according to Darboux's definition can not always be integrated term by term, but both Picard† and Goursat appear to have overlooked Tannery's corrections. In § 175, however, which deals with the differentiation of an improper integral

$$\int_a^\infty f(x, \alpha) dx$$

under the sign of integration, the definition of the uniform convergence of such an integral is the one ordinarily given. If such an integral converges uniformly (and the integrand is continuous in x, α), it represents a continuous function of α and may be integrated under the sign of integration:

$$\int_a^{a_1} d\alpha \int_a^\infty f(x, \alpha) dx = \int_a^\infty dx \int_{a_0}^{a_1} f(x, \alpha) d\alpha.$$

These theorems are precisely analogous to the theorems about

* Fonctions d'une variable, Paris, 1886, p. 366, foot note. The foot-note of pages 133-4, so far as it relates to integration, contains an inaccuracy, which is corrected in the later foot-note just cited.

† Traité d'analyse, vol. I, chap. VIII, 1st ed., p. 195; 2d ed., p. 211.

uniformly convergent series and should be given along with the sufficient condition the author deduces for differentiating under the sign of integration. The theorems relating to the transformation of power series in one and in several variables, and the theorems that follow from these, together with the proof of the analytic character of the implicit functions defined by a system of analytic equations, $F_i(x_1, \dots, x_q; y_1, \dots, y_p) = 0$ ($i = 1, \dots, p$) are all faithfully developed, pages 419–461 being devoted to this topic. The method of the *fonctions majorantes* is explicitly set forth. Analytic functions of real arguments are defined by the property that they admit a development by Taylor's theorem. The author does not neglect to remind the reader that in spite of the important rôle that these functions play, they form after all but a very special group of real functions of real variables within the general group of continuous functions. Finally the development of a continuous function into a Fourier's series is established. The volume ends with three chapters, pages 479–610, on applications of the differential calculus to curves and surfaces.

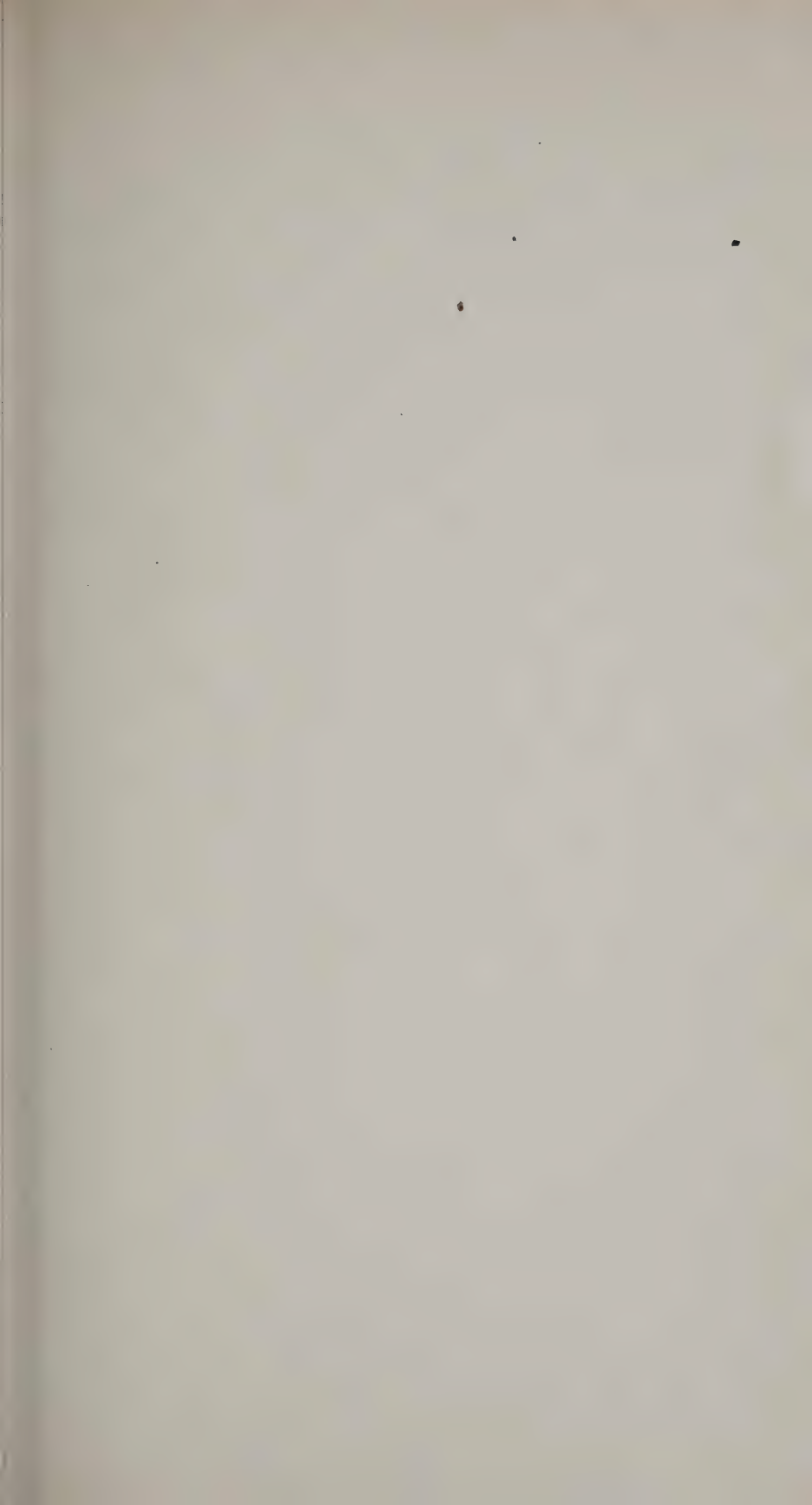
The extraordinarily high standard of simplicity and attractiveness in style, combined with modern rigor, which Picard set in his *Traité d'analyse* is fully maintained by Professor Goursat. The objects of the two works are quite different. Picard's purpose was to write a treatise on differential equations, and he developed only such parts of analysis and geometry as bear on this subject. Goursat, on the other hand, has set himself the task of writing a systematic treatment of the calculus, and thus the whole field of the calculus is included here.

A treatise on advanced calculus which should present the whole subject rigorously and attractively, and at the same time in the spirit of modern analysis, has been sorely needed by students of mathematics who intend to proceed to the study of mathematical physics or of some of the various branches of analysis — theory of functions, differential equations, calculus of variations, etc. Professor Goursat's work meets the needs of such students in a thoroughly satisfactory manner, and we recommend it to them most heartily. The teacher of calculus will find many suggestions in the book which will enable him to improve his course, and he may often with advantage refer even an elementary class to the more elementary parts of the book for collateral reading. The range of the book is wide.

While beginning with the elements of the calculus, it carries the reader to the point where he is prepared to use original sources and extracts from ϵ -proofs the underlying thought. When the future historian inquires how the calculus appeared to the mathematicians of the close of the nineteenth century, he may safely take Professor Goursat's book as an exponent of that which is central in the calculus conceptions and methods of this age.

W. F. OSGOOD.

HARVARD UNIVERSITY,
February, 1903.



M É M O I R E

SUR

LE CALCUL DES VARIATIONS DES INTÉGRALES MULTIPLES;

PAR

M. OSTROGRADSKY.

(Lu le 24 Janvier 1834.)

L'APPLICATION de la méthode des variations aux fonctions qui ne renferment que les intégrales relatives à une seule variable, ne laisse rien à désirer ni du côté de la simplicité, ni de celui de la généralité. Mais il n'en est pas de même dans le cas, où il s'agirait de rechercher la variation d'un intégrale multiple, prise par rapport aux variables différentes. Certaines questions, relatives à ce cas, semblent exiger plus de généralité que n'en comporte la méthode des variations, telle que Lagrange l'a exposée. Ce qui pourrait faire croire, que les principes de ce grand géomètre n'ont pas été convenablement appliqués, ou bien que les principes mêmes ne sont pas toujours suffisants.

C'est pour cela, sans doute, que M. Poisson, dans un mémoire qu'il a lu le 10 novembre 1831 à l'académie des sciences de Paris, a cru devoir ajouter aux principes du calcul des variations, posés par Lagrange, une espèce de nouveau principe qui consiste à considérer les variables indépendantes de la question, comme fonctions d'autres variables accessoires. Ces dernières disparaissent d'elles-mêmes dans le cours du calcul; mais par leur considération, dans le cas de deux variables indépendantes x et y , M. Poisson a évité de supposer les variations δx et δy , la pre-

*

mière indépendante de la quantité y , et la seconde indépendante de la quantité x hypothèse que tous les géomètres, qui ont cherché la variation des différences partielles d'une fonction à deux variables, ont été, en quelque sorte, forcé de faire par la nature même de leurs calculs.

Cependant la supposition δx indépendante de y , et δy indépendante de x , semble résulter des principes du calcul différentiel les plus simples et les plus élémentaires et tant qu'on n'a pas prouvé, que ces principes sont insuffisants, ou que l'application qu'on en avait faite est inexacte, il restera à décider, si l'on doit préférer les formules de M. Poisson pour la variation des différences partielles d'une fonction à deux variables, à celles d'Euler et d'autres géomètres relativement au même objet. A la vérité, les dernières sont un cas particulier des premières; mais ce cas particulier est, peut-être, celui qui doit toujours avoir lieu.

Cette question, nous la décidons pour les formules de M. Poisson. Nous démontrons, que les géomètres qui ont traité le calcul des variations des intégrales doubles, y compris Euler lui-même, n'ont pas convenablement différencié avec la caractéristique δ les différences partielles de la variable principale. Mais on verra aussi, que l'introduction des variables accessoires dans cette sorte de questions n'est point nécessaire. Le mémoire de M. Poisson sur le calcul des variations sera toujours cité dans l'histoire de l'analyse différentielle. C'est dans ce mémoire que l'on trouve, pour la première fois, la variation complète d'une intégrale double. Elle y est déduite de la considération des variables accessoires. Mais on peut s'en tenir aux principes de l'immortel auteur de la Mécanique analytique, principes qui réunissent toute la généralité désirable et la plus grande simplicité.

Nous montrerons d'abord, dans ce qui va suivre, en quoi consiste l'inexactitude échappée aux géomètres qui ont cherché la variation des différences partielles d'une fonction à deux variables, et nous indiquerons ensuite un moyen pour trouver la variation d'une intégrale multiple quelconque.

I. Désignons par z une fonction de deux variables indépendantes x et y , et faisons $\frac{dz}{dx} = z'$, $\frac{dz}{dy} = z_1$, $\frac{d^2 z}{dx^2} = z''$, $\frac{d^2 z}{dx dy} = z'_1$, $\frac{d^2 z}{dy^2} = z_{11}$, et ainsi de suite;

puis donnons aux quantités x, y, z , respectivement, les accroissements simultanés $\delta x, \delta y, \delta z$, que nous regarderons comme fonctions infiniment petites et arbitraires de x et de y ; par l'effet de ces accroissements, les quantités $z', z, z'' \dots$ deviendront, respectivement, $z' + \delta z', z + \delta z, z'' + \delta z'' \dots$; proposons nous de trouver les variations $z, \delta z, \delta z'' \dots$.

Considérons d'abord $\delta z'$. Comme $z' = \frac{dz}{dx}$, on avait cru que pour avoir $\delta z'$ il fallait différentier à l'ordinaire, selon δ , la quantité $\frac{dz}{dx}$, ce qui avait fourni un résultat inexact $\delta z' = \frac{d\delta z}{dx} - z' \frac{d\delta x}{dx}$. Pour découvrir la source de l'erreur il n'y a qu'à remonter à l'origine de la quantité $\delta z'$; si l'on désigne, pour un instant, $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$, respectivement, par X, Y, Z , on aura évidemment

$$z' + \delta z' = \frac{dZ}{dX}$$

et

$$\delta z' = \frac{dZ}{dX} - z';$$

les différences partielles z' et $\frac{dZ}{dX}$ sont prises, la première, en regardant comme constante y , et la seconde, en considérant Y , c'est-à-dire $y + \delta y$, comme invariable; or, on avait cru, que les deux différences $\frac{dZ}{dX}$ et z' devaient être rapportées à la même hypothèse $dy = 0$, c'est en cela que l'on n'était pas exact.

Remettons pour X, Y, Z leurs valeurs $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$. Nous aurons

$$\delta z' = \frac{d(z + \delta z)}{d(x + \delta x)} - z' = \frac{d(z + \delta z) - z' d(x + \delta x)}{d(x + \delta x)},$$

les différentielles $d(z + \delta z)$ et $d(x + \delta x)$ sont prises en faisant $d(y + \delta y) = 0$

Or

$$d(z + \delta z) = \left(z' + \frac{d\delta z}{dx}\right) dx + \left(z + \frac{d\delta z}{dy}\right) dy$$

$$d(x + \delta x) = \left(1 + \frac{d\delta x}{dx}\right) dx + \frac{d\delta x}{dy} dy$$

$$d(y + \delta y) = \frac{d\delta y}{dx} dx + \left(1 + \frac{d\delta y}{dy}\right) dy;$$

en substituant les valeurs précédentes de $d(z + \delta z)$ et de $d(x + \delta x)$ dans la dernière expression de $\delta z'$, nous aurons

$$\delta z' = \frac{\left(\frac{d\delta z}{dx} - z' \frac{d\delta x}{dx}\right) dx + \left(z + \frac{d\delta z}{dy} - z' \frac{d\delta x}{dy}\right) dy}{\left(1 + \frac{d\delta x}{dx}\right) dx + \frac{d\delta x}{dy} dy}$$

et en même temps

$$0 = \frac{d\delta y}{dx} dx + \left(1 + \frac{d\delta y}{dy}\right) dy;$$

en éliminant dx et dy , on trouve

$$\delta z' = \frac{\left(\frac{d\delta z}{dx} - z' \frac{d\delta x}{dx} - z, \frac{d\delta y}{dx}\right) \left(1 + \frac{d\delta y}{dy}\right) - \left(\frac{d\delta z}{dy} - z' \frac{d\delta x}{dy} - z, \frac{d\delta y}{dy}\right) \frac{d\delta y}{dx}}{\left(1 + \frac{d\delta x}{dx}\right) \left(1 + \frac{d\delta y}{dy}\right) - \frac{d\delta x}{dy} \frac{d\delta y}{dx}},$$

ou bien, en ne tenant compte que des infiniment petites du premier ordre

$$\delta z' = \frac{d\delta z}{dx} - z' \frac{d\delta x}{dx} - z, \frac{d\delta y}{dx}.$$

Si l'on compare cette valeur de $\delta z'$ à celle de $\delta z' = \frac{d\delta z}{dx} - z' \frac{d\delta x}{dx}$, on remarquera, qu'en rapportant la différence $\frac{d(z + \delta z)}{d(x + \delta x)}$ à l'hypothèse $dy = 0$, au lieu de $d(y + \delta y) = 0$, on supprime dans $\delta z'$ le terme $z, \frac{d\delta y}{dx}$ qui est du même ordre de grandeur que $\delta z'$, et qui, par les principes du calcul différentiel, devait y être conservé.

Supposons que la quantité δy soit indépendante de x ; nous aurons $\frac{d\delta y}{dx} = 0$ et $\delta z' = \frac{d\delta z}{dx} - z' \frac{d\delta x}{dx}$, comme on le trouve par la différentiation ordinaire, selon δ , de la quantité $\frac{dz}{dx}$; or, il est facile de voir, que dans l'hypothèse $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, la différentiation ordinaire est permise; car, comme alors $d(y + \delta y) = \left(1 + \frac{d\delta y}{dy}\right) dy$, en faisant $d(y + \delta y) = 0$, on aura évidemment $dy = 0$; donc dans l'expression $\delta z' = \frac{d(z + \delta z)}{d(x + \delta x)} - z'$ les deux différences partielles z' et $\frac{d(z + \delta z)}{d(x + \delta x)}$ sont toutes deux relatives à une même hypothèse $dy = 0$.

Il est évident que

$$\delta z' = \frac{d\delta z}{dx} - z' \frac{d\delta x}{dx} - z, \frac{d\delta y}{dx} = z'' \delta x + z', \delta y + \frac{d(\delta z - z' \delta x - z, \delta y)}{dx}.$$

On trouvera de la même manière

$$\delta z, = z', \delta x + z'', \delta y + \frac{d(\delta z - z' \delta x - z, \delta y)}{dy}.$$

Pour passer aux différences secondes, on remarquera que

$$\delta z'' = \frac{d(z' + \delta z')}{d(x + \delta x)} - z''$$

$$\delta z', = \frac{d(z' + \delta z')}{d(y + \delta y)} - z', = \frac{d(z, + \delta z,)}{d(x + \delta x)} - z',$$

$$\delta z,, = \frac{d(z, + \delta z,)}{d(y + \delta y)} - z,,.$$

Donc on trouvera les variations $\delta z'', \delta z', \delta z,,$ en changeant convenablement, dans les valeurs de $\delta z'$ et $\delta z,,$ z en z' ou en $z,$. On aura d'abord

$$\delta z'' = z''' \delta x + z'', \delta y + \frac{d(\delta z' - z'' \delta x - z', \delta y)}{dx}$$

$$\delta z', = z'', \delta x + z'', \delta y + \frac{d(\delta z' - z'' \delta x - z', \delta y)}{dy}$$

$$\delta z', = z'', \delta x + z'', \delta y + \frac{d(\delta z, - z', \delta x - z,, \delta y)}{dx}$$

$$\delta z', = z'', \delta x + z'', \delta y + \frac{d(\delta z, - z', \delta x - z,, \delta y)}{dy}$$

ensuite

$$\delta z'' = z''' \delta x + z'', \delta y + \frac{d^2(\delta z - z' \delta x - z, \delta y)}{dx^2}$$

$$\delta z', = z'', \delta x + z'', \delta y + \frac{d^2(\delta z - z' \delta x - z, \delta y)}{dx dy}$$

$$\delta z,, = z'', \delta x + z'', \delta y + \frac{d^2(\delta z - z' \delta x - z, \delta y)}{dy^2}.$$

On trouvera avec la même facilité les variations des différences supérieures.

II. Ce qui précède montre suffisamment, comment par l'application immédiate de la caractéristique δ aux différences partielles $z', z,, z'' \dots$ on trouve les variations de ces différences. Mais il est préférable de chercher les variations $\delta z', \delta z,, \delta z'' \dots$ par l'emploi des différences totales.

En effet, pour considérer la chose d'une manière générale, désignons par u une fonction d'autant de quantités x, y, z, \dots que l'on veut, et supposons que la variable u ainsi que les quantités indépendantes x, y, z, \dots reçoivent simultanément les accroissements $\delta u, \delta x, \delta y, \delta z, \dots$, que nous regarderons comme fonctions entièrement arbitraires de toutes les variables indépendantes.

Pour trouver les variations $\delta \cdot \frac{du}{dx}, \delta \cdot \frac{du}{dy}, \delta \cdot \frac{du}{dz}, \dots$ dues aux accroissements $\delta u, \delta x, \delta y, \delta z, \dots$ prenons l'équation fondamentale,

$$\delta du = d\delta u,$$

mettons y pour $d\delta u$ sa valeur

$$\frac{d\delta u}{dx} dx + \frac{d\delta u}{dy} dy + \frac{d\delta u}{dz} dz + \dots,$$

pour du sa valeur

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \dots$$

puis développons $\delta du = \delta \left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \dots \right)$ comme il suit

$$\begin{aligned} \delta du = & \left(\delta \frac{du}{dx} + \frac{du}{dx} \frac{d\delta x}{dx} + \frac{du}{dy} \frac{d\delta y}{dx} + \frac{du}{dz} \frac{d\delta z}{dx} + \dots \right) dx \\ & + \left(\delta \frac{du}{dy} + \frac{du}{dx} \frac{d\delta x}{dy} + \frac{du}{dy} \frac{d\delta y}{dy} + \frac{du}{dz} \frac{d\delta z}{dy} + \dots \right) dy \\ & + \left(\delta \frac{du}{dz} + \frac{du}{dx} \frac{d\delta x}{dz} + \frac{du}{dy} \frac{d\delta y}{dz} + \frac{du}{dz} \frac{d\delta z}{dz} + \dots \right) dz \\ & + \dots \end{aligned}$$

et comparons les coefficients des quantités arbitraires dx, dy, dz, \dots . Nous aurons sur le champ :

$$\begin{aligned} \delta \frac{du}{dx} &= \frac{d\delta u}{dx} - \frac{du}{dx} \frac{d\delta x}{dx} - \frac{du}{dy} \frac{d\delta y}{dx} - \frac{du}{dz} \frac{d\delta z}{dx} - \dots \\ \delta \frac{du}{dy} &= \frac{d\delta u}{dy} - \frac{du}{dx} \frac{d\delta x}{dy} - \frac{du}{dy} \frac{d\delta y}{dy} - \frac{du}{dz} \frac{d\delta z}{dy} - \dots \\ \delta \frac{du}{dz} &= \frac{d\delta u}{dz} - \frac{du}{dx} \frac{d\delta x}{dz} - \frac{du}{dy} \frac{d\delta y}{dz} - \frac{du}{dz} \frac{d\delta z}{dz} - \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Il est facile de donner à ces expressions la forme suivante :

$$\begin{aligned} \delta \frac{du}{dx} &= \frac{d^2u}{dx^2} \delta x + \frac{d^2u}{dxdy} \delta y + \frac{d^2u}{dxdz} \delta z + \dots + \frac{d\left(\delta u - \frac{du}{dx} \delta x - \frac{du}{dy} \delta y - \frac{du}{dz} \delta z - \dots\right)}{dx} \\ \delta \frac{du}{dy} &= \frac{d^2u}{dxdy} \delta x + \frac{d^2u}{dy^2} \delta y + \frac{d^2u}{dydz} \delta z + \dots + \frac{d\left(\delta u - \frac{du}{dx} \delta x - \frac{du}{dy} \delta y - \frac{du}{dz} \delta z - \dots\right)}{dy} \\ \delta \frac{du}{dz} &= \frac{d^2u}{dxdz} \delta x + \frac{d^2u}{dydz} \delta y + \frac{d^2u}{dz^2} \delta z + \dots + \frac{d\left(\delta u - \frac{du}{dx} \delta x - \frac{du}{dy} \delta y - \frac{du}{dz} \delta z - \dots\right)}{dz} \end{aligned}$$

Donc, en faisant pour abrégier

$$\partial u = \frac{du}{dx} \delta x + \frac{du}{dy} \delta y + \frac{du}{dz} \delta z + \dots + Du,$$

on trouve

$$\begin{aligned} \delta \frac{du}{dx} &= \frac{d^2u}{dx^2} \delta x + \frac{d^2u}{dxdy} \delta y + \frac{d^2u}{dxdz} \delta z + \dots + \frac{dDu}{dx} \\ \delta \frac{du}{dy} &= \frac{d^2u}{dxdy} \delta x + \frac{d^2u}{dy^2} \delta y + \frac{d^2u}{dydz} \delta z + \dots + \frac{dDu}{dy} \\ \delta \frac{du}{dz} &= \frac{d^2u}{dxdz} \delta x + \frac{d^2u}{dydz} \delta y + \frac{d^2u}{dz^2} \delta z + \dots + \frac{dDu}{dz} \end{aligned}$$

.....

Observons que les termes indépendants de Du , dans les formules précédentes, reviennent aux différentielles ordinaires des quantités $u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \dots$ considérées comme fonctions de x, y, z, \dots et en supposant que les différences des x, y, z, \dots soient $\delta x, \delta y, \delta z, \dots$. Si donc nous désignons par la caractéristique Δ la différentielle d'une fonction de x, y, z, \dots , différentielle due aux accroissements $\delta x, \delta y, \delta z, \dots$, nous pourrons écrire

$$\begin{aligned} \partial u &= \Delta u + Du \\ \delta \frac{du}{dx} &= \Delta \frac{du}{dx} + \frac{dDu}{dx} \\ \delta \frac{du}{dy} &= \Delta \frac{du}{dy} + \frac{dDu}{dy} \\ \delta \frac{du}{dz} &= \Delta \frac{du}{dz} + \frac{dDu}{dz} \end{aligned}$$

.....

Il n'est pas difficile de trouver la variation des différences supérieures $\frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dx dz}, \dots$ on verra avec facilité que l'on a en général

$$\delta \frac{d^i u}{dx^l dy^m dz^n \dots} = A \frac{d^i u}{dx^l dy^m dz^n \dots} + \frac{d^i Du}{dx^l dy^m dz^n \dots}$$

III. Ce qui précède suffit pour trouver la variation d'une fonction U de $u, x, y, z \dots$ et des différences partielles de la variable principale u par rapport aux quantités $x, y, z \dots$. Il n'y a qu'à différentier U en y faisant croître toutes les quantités $x, y, z \dots$ et toutes les fonctions $u, \frac{du}{dx} \dots$ de leurs variations δ . Or, les variations $\delta u, \delta \frac{du}{dx} \dots$ étant composées chacune de deux parties infiniment petites, on peut par les principes du calcul différentiel, en augmentant $x, y, z \dots$ respectivement de $\delta x, \delta y, \delta z \dots$, ne faire croître d'abord les fonctions $u, \frac{du}{dx} \dots$ que des premières parties $Au, A \frac{du}{dx} \dots$ de leurs variations. Il en résultera dans U un accroissement qui formera la première partie de la variation δU ; puis, sans varier $x, y, z \dots$, on augmentera la fonction u et ses différences des secondes parties $Du, \frac{dDu}{dx} \dots$ de leurs variations; l'augmentation qu'en recevra la fonction U , formera la seconde partie de sa variation.

La première partie de la variation δU sera évidemment

$$\frac{dU}{dx} \delta x + \frac{dU}{dy} \delta y + \frac{dU}{dz} \delta z + \dots$$

en faisant varier dans les différences $\frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy}, \frac{dU}{dz} \dots$ dans la première, tout ce qui varie avec x , dans la seconde, tout ce qui varie avec y , dans la troisième, tout ce qui varie avec z , ainsi de suite. Désignons par DU la seconde partie de la variation δU ; cette partie est due à l'accroissement Du de la quantité u , accroissement qu'on doit appliquer à u partout où cette fonction se trouve dans U ; nous aurons

$$\delta U = \frac{dU}{dx} \delta x + \frac{dU}{dy} \delta y + \frac{dU}{dz} \delta z + \dots + DU.$$

Nous nous dispensons d'écrire le développement de la différentielle DU .

IV. Proposons nous de trouver la variation de l'intégrale définie

$$V = \int U dx dy dz \dots$$

prise pour toutes les valeurs de $x, y, z \dots$ qui satisfassent à l'inégalité

$$L < 0$$

L étant une fonction de $x, y, z \dots$

La variation de l'intégrale $\int U dx dy dz \dots$ est, bien évidemment, égale à la somme des variations de tous ses élémens différentiels; ainsi, pour avoir δV , il n'y a qu'à prendre l'intégrale de la variation $\delta(U dx dy dz \dots)$, ce qui donnera

$$\delta V = S \delta(U dx dy dz \dots).$$

Or, on a, par le principe du calcul différentiel

$$\delta(U dx dy dz \dots) = \delta U dx dy dz \dots + U \delta(dx dy dz \dots),$$

c'est-à-dire, en vertu du § précédent,

$$\begin{aligned} \delta(U dx dy dz \dots) &= \left(\frac{dU}{dx} \delta x + \frac{dU}{dy} \delta y + \frac{dU}{dz} \delta z + \dots \right) dx dy dz \dots \\ &\quad + U \delta(dx dy dz \dots) + DU dx dy dz \dots; \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \delta V &= S \left[\frac{dU}{dx} \delta x + \frac{dU}{dy} \delta y + \frac{dU}{dz} \delta z + \dots + U \frac{\delta(dx dy dz \dots)}{dx dy dz} \right] dx dy dz \dots \\ &\quad + SDU dx dy dz \dots \end{aligned}$$

Nous démontrerons tout-à-l'heure que

$$\delta(dx dy dz \dots) = \left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} + \dots \right) dx dy dz \dots$$

il en résultera

$$\begin{aligned} \delta V &= S \left[\frac{d(U\delta x)}{dx} + \frac{d(U\delta y)}{dy} + \frac{d(U\delta z)}{dz} + \dots \right] dx dy dz \dots \\ &\quad + SDU dx dy dz \dots \end{aligned}$$

Dans les différentielles $\frac{d(U\delta x)}{dx}$, $\frac{d(U\delta y)}{dy}$, $\frac{d(U\delta z)}{dz}$ on doit faire varier, dans la première, tout ce qui varie avec x , dans la seconde, tout ce qui varie avec y , dans la troisième, tout ce qui varie avec z , ainsi de suite

IV. Nous allons nous occuper maintenant de la variation $\delta(dx dy dz \dots)$

Supposons $x + \delta x = X$, $y + \delta y = Y$, $z + \delta z = Z \dots$; nous aurons

$$\delta(dx dy dz \dots) = dX \cdot dY \cdot dZ \dots - dx dy dz \dots$$

Les quantités $X, Y, Z \dots$ étant fonctions de $x, y, z \dots$, pour avoir une des différentielles $dX, dY, dZ \dots$, par exemple dX , il n'y a qu'à différentier à l'ordinaire la quantité X , en regardant $Y, Z \dots$ comme constantes, ce qui donnera

$$dX = \frac{dX}{dx} dx + \frac{dX}{dy} dy + \frac{dX}{dz} dz + \dots$$

$$0 = \frac{dY}{dx} dx + \frac{dY}{dy} dy + \frac{dY}{dz} dz + \dots$$

$$0 = \frac{dZ}{dx} dx + \frac{dZ}{dy} dy + \frac{dZ}{dz} dz + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

d'où l'on tirera

$$dX = \frac{S\left(\frac{dX}{dx} \cdot \frac{dY}{dy} \cdot \frac{dZ}{dz} \dots\right)}{S\left(\frac{dY}{dy} \cdot \frac{dZ}{dz} \dots\right)} dx$$

On a désigné, d'après M. Cauchy, par la notation

$$S(a, b, c \dots)$$

le résultat de l'élimination des quantités $p, q, r \dots$ satisfaisant aux équations

$$0 = ap + a_1 q + a_2 r + \dots$$

$$0 = bp + b_1 q + b_2 r + \dots$$

$$0 = cp + c_1 q + c_2 r + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

On suppose que le terme $a b_1 c_2 \dots$ de ce résultat soit pris avec le signe $+$.

Pour trouver dY , il faut différentier Y en faisant $dX = 0$, $dZ = 0 \dots$ c'est-à-dire, en faisant $dx = 0$, $dZ = 0 \dots$ ce qui donne

$$dY = \frac{dY}{dy} dy + \frac{dY}{dz} dz + \dots$$

$$0 = \frac{dZ}{dy} dy + \frac{dZ}{dz} dz + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

d'où

$$dY = \frac{S\left(\frac{dY}{dy} \cdot \frac{dZ}{dz} \dots\right)}{S\left(\frac{dZ}{dz} \dots\right)} dy;$$

on trouvera de la même manière

$$dZ = \frac{S\left(\frac{dZ}{dz} \dots\right)}{S(\dots)} dz,$$

ainsi de suite. Le dénominateur de la dernière différentielle sera l'unité; car, si par exemple, Z était la dernière variable, on aurait eu

$$dZ = \frac{dZ}{dz} dz.$$

En faisant le produit $dX \cdot dY \cdot dZ \dots$ on trouve

$$dX dY dZ \dots = S\left(\frac{dX}{dx} \frac{dY}{dy} \frac{dZ}{dz} \dots\right) dx dy dz \dots$$

donc

$$\delta(dx dy dz \dots) = \left[S\left(\frac{dX}{dx} \frac{dY}{dy} \frac{dZ}{dz} \dots\right) - 1 \right] dx dy dz \dots$$

Les principes de l'analyse différentielle exigent que dans le calcul du coefficient

$$S\left(\frac{dX}{dx} \frac{dY}{dy} \frac{dZ}{dz} \dots\right) - 1$$

on ne tienne compte que des infiniment petits du premier ordre, car $\frac{\delta(dx dy dz \dots)}{dx dy dz \dots}$

est une quantité infiniment petite de cet ordre. Or, si l'on excepte $\frac{dX}{dx} \frac{dY}{dy} \frac{dZ}{dz} \dots$,

tous les autres termes de la somme $S\left(\frac{dX}{dx} \frac{dY}{dy} \frac{dZ}{dz} \dots\right)$ sont infiniment petits au moins du second ordre; donc, aux quantités de cet ordre près, on aura

$$S\left(\frac{dX}{dx} \frac{dY}{dy} \frac{dZ}{dz} \dots\right) = \frac{dX}{dx} \frac{dY}{dy} \frac{dZ}{dz} \dots$$

et par suite

$$\delta(dx dy dz \dots) = \left(\frac{dX}{dx} \frac{dY}{dy} \frac{dZ}{dz} \dots - 1 \right) dx dy dz \dots$$

Remettons pour $X, Y, Z \dots$ leurs valeurs $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z \dots$;

nous aurons

$$\delta(dx dy dz \dots) = \left[\left(1 + \frac{d\delta x}{dx}\right) \left(1 + \frac{d\delta y}{dy}\right) \left(1 + \frac{d\delta z}{dz}\right) \dots - 1 \right] dx dy dz \dots$$

ou bien, en ne tenant compte que des infiniment petits du premier ordre,

$$\delta(dx dy dz \dots) = \left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} + \dots \right) dx dy dz \dots$$

VI. Déterminons, avant d'aller plus loin, quelles doivent être les limites des variables x, y, z, \dots dans l'intégrale

$$\int U dx dy dz \dots$$

étendue à toutes les valeurs de x, y, z, \dots qui satisfassent à l'inégalité $L > 0$, c'est-à-dire sorte qu'aux limites de cette intégrale on aura $L = 0$. On se propose d'intégrer d'abord par rapport à x , ensuite par rapport à y , après par rapport à z , ainsi de suite.

Admettons que l'équation $L = 0$, résolue par rapport à x , ne fournisse pour cette variable que deux valeurs X_0 et X . Ces valeurs sont les limites de la variable x et, en supposant que la fonction L reste négative pour les quantités x comprises entre X_0 et X , on intégrera l'expression

$$\int U dx dy dz \dots$$

depuis $x =$ à la plus petite des deux racines X_0 et X , jusqu'à $x =$ à la plus grande de ces racines. Quant aux quantités y, z, \dots , on doit leur donner toutes les valeurs qui fournissent pour X_0 et X des quantités réelles, et, au contraire, doit exclure les valeurs de y, z, \dots , qui rendent imaginaires X_0 et X ; or, dans le passage du réel à l'imaginaire, les racines X_0 et X deviennent, comme on le sait, par la théorie des équations, égales entr'elles; donc aux limites de y, z, \dots on aura à la fois

$$L = 0, \quad \frac{dL}{dx} = 0,$$

En éliminant x de ces deux équations, on en obtiendra une en y, z, \dots qui appartiendra aux limites de ces variables, et qui fournira, supposons le, pour y deux valeurs Y_0 et Y , valeurs qui seront les limites entre lesquelles il faudra intégrer $\int U dx dy dz \dots$ par rapport à y ; on prendra l'intégrale depuis la plus petite des deux quantités Y_0 et Y jusqu'à la plus grande.

On parviendra à la même conclusion de la manière suivante: après avoir intégré par rapport à x , ou doit intégrer par rapport à y , évidemment depuis la plus petite jusqu'à la plus grande valeur de cette variable, en supposant x et y liées par l'équation $L=0$, et en considérant $z \dots$ comme constantes; en différentiant dans cette hypothèse, on trouve

$$0 = \frac{dL}{dx} + \frac{dL}{dy} \frac{dy}{dx};$$

or, pour que y soit maximum ou minimum, il faut qu'on ait $\frac{dy}{dx} = 0$, ce qui donne pour la limite de y la même équation $\frac{dL}{dx} = 0$, que nous avons déjà trouvée.

Pour avoir les limites relatives à la variable z , on traitera l'équation qui résulte de l'élimination de x entre $L=0$ et $\frac{dL}{dx} = 0$, comme on a traité l'équation $L=0$; or, on peut supposer que le résultat de l'élimination de la variable x entre $L=0$ et $\frac{dL}{dx} = 0$ est l'équation même $L=0$, dans laquelle on a mis pour x sa valeur tirée de $\frac{dL}{dx} = 0$; donc, pour trouver les limites de z , on différenciera $L=0$ par rapport à y , en considérant x comme fonction de y ; ce qui donnera

$$\frac{dL}{dy} + \frac{dL}{dx} \frac{dx}{dy} = 0,$$

ou bien $\frac{dL}{dy} = 0$, à cause de $\frac{dL}{dx} = 0$. En éliminant y entre $L=0$ et $\frac{dL}{dy} = 0$, on trouvera une équation qui fournira les limites pour z . En continuant de la même manière, on trouvera les limites pour toutes les variables qui entrent dans l'intégrale

$$\int U dx dy dz \dots$$

Ainsi, en résumant, les limites de x sont immédiatement données par la résolution, par rapport à cette variable, de l'équation $L=0$; on trouve les limites de y en résolvant, par rapport à cette variable, l'équation résultante de l'élimination de x entre $L=0$, $\frac{dL}{dx} = 0$; on trouve les limites de z en résolvant, par rapport à cette variable, l'équation résultante de l'élimination de x et y entre $L=0$, $\frac{dL}{dx} = 0$, $\frac{dL}{dy} = 0$, ainsi de suite.

Nous avons supposé que les équations relatives aux limites de l'intégrale

$$\int U dx dy dz \dots$$

ne fournissaient pour chaque quantité $x, y, z \dots$ que deux valeurs; mais il sera facile, d'après ce qui précède, de traiter le cas où les équations dont il s'agit, fourniraient plus de deux racines. Le nombre de valeurs limites pour chaque variable $x, y, z \dots$, en y comprenant, s'il est nécessaire, les quantités infinies, doit être pair.

VII. Reprenons la variation

$$\delta V = \int \left[\frac{d(U\delta x)}{dx} + \frac{d(U\delta y)}{dy} + \frac{d(U\delta z)}{dz} + \dots \right] dx dy dz \dots + \int DU dx dy dz \dots;$$

faisons y pour abréger $U\delta x = P$, $U\delta y = Q$, $U\delta z = R$, nous aurons

$$\delta V = \int \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} + \dots \right) dx dy dz \dots + \int DU dx dy dz \dots$$

Considérons d'abord la partie

$$\int \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} + \dots \right) dx dy dz \dots$$

de la variation précédente; supposons que de deux valeurs X_0 et X , que fournit pour x l'équation $L = 0$, X soit la plus grande; nous aurons

$$\int \frac{dP}{dx} dx dy dz \dots = \int (P_X - P_{X_0}) dy dz \dots$$

On désigne par P_X ce que devient P quand on y met X pour x , et par P_{X_0} ce que devient P pour $x = X_0$.

Comme la fonction L a une valeur positive avant de s'évanouir pour $x = X$, et une valeur négative avant de s'évanouir pour $x = X_0$, il s'ensuit que la dérivée $\frac{dL}{dx}$ est négative pour $x = X_0$ et qu'elle est positive pour $x = X$: donc, en prenant le radical $\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}$ positivement, on aura

$$-P_{X_0} = \frac{P \frac{dL}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}} \text{ pour } x = X_0.$$

$$P_x = \frac{P \frac{dL}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}} \text{ pour } x = X.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation $\int \frac{dP}{dx} dx dy dz \dots = \int (P_x - P_{x_0}) dy dz \dots$ nous aurons

$$\int \frac{dP}{dx} dx dy dz \dots = \int \frac{P \frac{dL}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}} dy dz \dots$$

L'intégrale du second membre ne comprend que les valeurs de $x, y, z \dots$ qui satisfont à l'équation $L = 0$.

On trouvera de la même manière

$$\int \frac{dQ}{dy} dx dy dz \dots = \int \frac{Q \frac{dL}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dy^2}\right)}} dx dz \dots$$

$$\int \frac{dR}{dz} dx dy dz \dots = \int \frac{R \frac{dL}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dz^2}\right)}} dx dy \dots$$

et par suite

$$\begin{aligned} (A) \dots \int \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} + \dots \right) dx dy dz \dots \\ = \int \frac{P \frac{dL}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}} dy dz \dots + \int \frac{Q \frac{dL}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dy^2}\right)}} dx dz \dots + \int \frac{R \frac{dL}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dz^2}\right)}} dx dy \dots + \dots \end{aligned}$$

Les intégrales du second membre de cette équation doivent être étendues à toutes les valeurs de $x, y, z \dots$ qui satisfassent à l'équation $L = 0$. Considérons deux de ces intégrales, par exemple

$$\int \frac{P \frac{dL}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}} dy dz \dots \text{ et } \int \frac{Q \frac{dL}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dy^2}\right)}} dx dz \dots$$

D'après l'article précédent, on peut facilement s'assurer que leurs limites relatives aux variables z, \dots sont les mêmes. De plus l'on aura

$$\frac{dL}{dx} dx + \frac{dL}{dy} dy = 0$$

pour tous les élémens de ces intégrales où les variables $z \dots$ restent les mêmes; ensorte que les différentielles $\frac{dL}{dx} dx$ et $\frac{dL}{dy} dy$ sont égales, au signe près; donc, en prenant positivement les accroissemens dx et dy , et les radicaux $\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}$, $\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dy^2}\right)}$, on aura

$$\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}} = \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dy^2}\right)}}$$

ou bien, en multipliant par $dz \dots$,

$$\frac{dy dz \dots}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}} = \frac{dx dz \dots}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dy^2}\right)}}$$

Il est facile d'en conclure qu'on aura en général

$$\frac{dy dz \dots}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}} = \frac{dx dz \dots}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dy^2}\right)}} = \frac{dx dy \dots}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dz^2}\right)}} = \dots$$

d'où, en faisant pour abrégér $ds = \sqrt{(dy^2 dz^2 \dots + dx^2 dz^2 \dots + dx^2 dy^2 \dots + \dots)}$,

$$\frac{dy dz \dots}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}} = \frac{dx dz \dots}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dy^2}\right)}} = \frac{dx dy \dots}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dz^2}\right)}} = \dots = \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \dots\right)}}$$

En vertu de ces égalités, l'équation (A) deviendra

$$(B) \dots \int \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} + \dots \right) dx dy dz \dots = \int \frac{\left(P \frac{dL}{dx} + Q \frac{dL}{dy} + R \frac{dL}{dz} + \dots \right) ds}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \dots\right)}}$$

On pent, pour rendre plus facile l'intégration de la différentielle

$$\frac{\left(P \frac{dL}{dx} + Q \frac{dL}{dy} + R \frac{dL}{dz} + \dots \right) ds}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \dots\right)}}$$

à la place des variables x, y, z, \dots , liées par l'équation $L=0$, introduire d'autres variables a, b, \dots indépendantes entr'elles.

On transformera, par la méthode connue, tous les élémens $dydz\dots, dxdz\dots, dxdy\dots$, en élémens proportionnels au produit $dad b\dots$; on trouvera $dydz\dots = Adadb\dots, dxdz\dots = Bdad b\dots, dxdy\dots = Cdad b\dots, \dots A, B, C\dots$ étant fonctions finies de a, b, \dots ; ce qui donnera

$$ds = dad b\dots \sqrt{(A^2 + B^2 + C^2 + \dots)}$$

Si l'on veut, par exemple, intégrer par rapport aux variables $y, z\dots$ on fera attention à ce que dans les élémens $dxdz\dots, dxdy\dots, \dots$ on doit prendre la différentielle de la variable x en considérant, dans la première, la quantité y comme seule variable, dans la seconde, la quantité z comme seule variable, ainsi de suite; il en résultera que $dxdz\dots = \frac{dx}{dy} dydz\dots, dxdy\dots = \frac{dx}{dz} dydz\dots, \dots$; donc

$$ds = dydz\dots \sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2} + \frac{dx^2}{dz^2} + \dots\right)} = dydz\dots \frac{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \dots\right)}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}}$$

en sorte que

$$(C) \dots \int \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} + \dots\right) dxdydz\dots = \int \frac{\left(P \frac{dL}{dx} + Q \frac{dL}{dy} + R \frac{dL}{dz} + \dots\right) dydz\dots}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}}$$

Remettons dans la formule (B) pour $P, Q, R\dots$ leurs valeurs $U\delta x, U\delta y, U\delta z\dots$ nous aurons :

$$\int \left[\frac{d(U\delta x)}{dx} + \frac{d(U\delta y)}{dy} + \frac{d(U\delta z)}{dz} + \dots\right] dxdydz\dots = \int \frac{U\left(\frac{dL}{dx} \delta x + \frac{dL}{dy} \delta y + \frac{dL}{dz} \delta z + \dots\right) ds}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \dots\right)}}$$

ou bien

$$\int \left[\frac{d(U\delta x)}{dx} + \frac{d(U\delta y)}{dy} + \frac{d(U\delta z)}{dz} + \dots\right] dxdydz\dots = \int \frac{U \delta L ds}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \dots\right)}}$$

et par suite

$$\delta V = \int \frac{U \delta L ds}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \dots\right)}} + \int DU dx dy dz \dots$$

VIII. Nous allons maintenant indiquer les réductions à faire dans le terme $\int DU dx dy dz \dots$ de la variation δV , réductions qui consistent à faire disparaître autant que possible, les différences partielles de la quantité DU sous le signe \int .

Au moyen de la formule (B) de l'article précédent, il sera facile de remplacer l'intégrale $\int DU dx dy dz \dots$ par la somme de deux autres intégrales $\int W DU dx dy dz \dots$ et $\int \Theta ds$, dont la première est, comme $\int DU dx dy dz \dots$ relative à toutes les valeurs de $x, y, z \dots$ qui satisfassent à l'inégalité $L < 0$, et dont la seconde ne comprend que les valeurs des mêmes variables, qui satisfont à l'équation $L = 0$. La fonction W ne renferme point la variation Du ; la fonction Θ au contraire la renferme, ainsi que ses différences partielles par rapport à $x, y, z \dots$; quant à la différentielle ds , elle est la même que dans l'article précédent, c'est-à-dire

$$ds = \sqrt{(dy^2 dz^2 \dots + dx^2 dz^2 \dots + dx^2 dy^2 \dots + \dots)}$$

Ainsi nous aurons

$$\int DU dx dy dz \dots = \int W DU dx dy dz \dots + \int \Theta ds,$$

et par suite

$$\delta V = \int W DU dx dy dz \dots + \int \frac{U \delta L ds}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \dots\right)}} + \int \Theta ds$$

Les intégrales $\int W DU dx dy dz \dots$ et $\int \frac{U \delta L ds}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \dots\right)}}$ ne sont susceptibles d'aucune réduction, mais l'intégrale $\int \Theta ds$ peut encore être réduite.

Pour opérer la réduction de $\int \Theta ds$, il faut avant tout remplacer les variables $x, y, z \dots$, liées entr'elles par l'équation $L = 0$, par d'autres quantités $a, b \dots$ indépendantes entr'elles. Le nombre des quantités $a, b \dots$, doit être inférieure d'une unité à celui des variables primitives $x, y, z \dots$.

En regardant $x, y, z \dots$ comme fonctions de $a, b \dots$, transformons l'élément ds en élément proportionnel au produit $da db \dots$, on trouvera

$$ds = K da db \dots$$

K étant une fonction finie de $a, b \dots$; transformons aussi les différentielles $\frac{dDu}{dx}, \frac{dDu}{dy}, \frac{dDu}{dz}, \dots, \frac{d^2Du}{dx^2}, \frac{d^2Du}{dx dy}, \dots$ en $\frac{dDu}{da}, \frac{dDu}{db}, \dots, \frac{d^2Du}{da^2}, \frac{d^2Du}{da db}, \dots$; nous aurons pour cet objet

$$\frac{dDu}{da} = \frac{dx}{da} \frac{dDu}{dx} + \frac{dy}{da} \frac{dDu}{dy} + \frac{dz}{da} \frac{dDu}{dz} + \dots$$

$$\frac{dDu}{db} = \frac{dx}{db} \frac{dDu}{dx} + \frac{dy}{db} \frac{dDu}{dy} + \frac{dz}{db} \frac{dDu}{dz} + \dots$$

.....

$$\frac{d^2Du}{da^2} = \frac{dx^2}{da^2} \frac{d^2Du}{dx^2} + 2 \frac{dx}{da} \frac{dy}{da} \frac{d^2Du}{dx dy} + \dots$$

$$\frac{d^2Du}{da db} = \frac{dx}{da} \frac{dx}{db} \frac{d^2Du}{dx^2} + \left(\frac{dx}{da} \frac{dy}{db} + \frac{dx}{db} \frac{dy}{da} \right) \frac{d^2Du}{dx dy} + \dots$$

.....

Mais comme les équations précédentes ne sont pas en nombre suffisant pour en tirer la valeur de toutes les quantités $\frac{dDu}{dx}, \frac{dDu}{dy}, \frac{dDu}{dz}, \dots, \frac{d^2Du}{dx^2}, \frac{d^2Du}{dx dy}, \dots$, quelques unes de ces différentielles resteront indéterminées, les autres s'exprimeront au moyen de celles-ci et des quantités $\frac{dDu}{da}, \frac{dDu}{db}, \dots, \frac{d^2Du}{da^2}, \frac{d^2Du}{da db}, \dots$.

Au lieu de considérer comme indéterminées quelques unes des différentielles $\frac{Du}{dx}, \frac{dDu}{dy}, \frac{dDu}{dz}, \dots, \frac{d^2Du}{dx^2}, \frac{d^2Du}{dx dy}, \dots$ il convient, pour plus de symétrie dans le calcul, d'introduire autant de fonctions linéaires $p, q, r \dots$ de $\frac{dDu}{dx}, \frac{dDu}{dy}, \frac{dDu}{dz}, \dots, \frac{d^2Du}{dx^2}, \frac{d^2Du}{dx dy}, \dots$ qu'il en faudra pour exprimer toutes les quantités $\frac{dDu}{dx}, \frac{dDu}{dy}, \frac{dDu}{dz}, \dots, \frac{d^2Du}{dx^2}, \frac{d^2Du}{dx dy}, \dots$ en $p, q, r, \dots, \frac{dDu}{da}, \frac{dDu}{db}, \dots, \frac{d^2Du}{da^2}, \frac{d^2Du}{da db}, \dots$, et ce sont ces fonctions $p, q, r \dots$ qu'on laissera arbitraires.

Or, introduire les quantités $p, q, r \dots$ revient évidemment à feindre parmi les variables $a, b \dots$ une variable ω de plus; alors, le nombre des quantités $\omega, a, b \dots$

étant égal à celui des variables x, y, z, \dots , en considérant x, y, z, \dots comme fonction de ω, a, b, \dots , on trouve autant d'équations

$$\frac{dDu}{d\omega} = \frac{dx}{d\omega} \frac{dDu}{dx} + \frac{dy}{d\omega} \frac{dDu}{dy} + \frac{dz}{d\omega} \frac{dDu}{dz} + \dots$$

$$\frac{dDu}{da} = \frac{dx}{da} \frac{dDu}{dx} + \frac{dy}{da} \frac{dDu}{dy} + \frac{dz}{da} \frac{dDu}{dz} + \dots$$

$$\frac{dDu}{db} = \frac{dx}{db} \frac{dDu}{dx} + \frac{dy}{db} \frac{dDu}{dy} + \frac{dz}{db} \frac{dDu}{dz} + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{d^2 Du}{d\omega^2} = \frac{dx^2}{d\omega^2} \frac{d^2 Du}{dx^2} + 2 \frac{dx}{d\omega} \frac{dy}{d\omega} \frac{d^2 Du}{dx dy} + \dots$$

$$\frac{d^2 Du}{d\omega da} = \frac{dx}{d\omega} \frac{dx}{da} \frac{d^2 Du}{dx^2} + \left(\frac{dx}{d\omega} \frac{dy}{da} + \frac{dx}{da} \frac{dy}{d\omega} \right) \frac{d^2 Du}{dx dy} + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

qu'il en faut pour exprimer toutes les différentielles $\frac{dDu}{dx}, \frac{dDu}{dy}, \frac{dDu}{dz}, \dots, \frac{d^2 Du}{dx^2}, \frac{d^2 Du}{dx dy}, \dots$ en $\frac{dDu}{d\omega}, \frac{dDu}{da}, \frac{dDu}{db}, \dots, \frac{d^2 Du}{d\omega^2}, \frac{d^2 Du}{d\omega da}, \dots$ mais comme la variable ω réellement n'existe pas, on doit regarder les différentielles $\frac{dx}{d\omega}, \frac{dy}{d\omega}, \frac{dz}{d\omega}, \dots$ comme quantités dont on pourra disposer pour simplifier l'expression de $\frac{dDu}{dx}, \frac{dDu}{dy}, \frac{dDu}{dz}, \dots, \frac{d^2 Du}{dx^2}, \frac{d^2 Du}{dx dy}, \dots$. Quant aux différentielles $\frac{dDu}{d\omega}, \frac{d^2 Du}{d\omega^2}, \dots$, elles doivent rester entièrement indéterminées.

Ayant exprimé les différentielles $\frac{dDu}{dx}, \frac{dDu}{dy}, \frac{dDu}{dz}, \dots, \frac{d^2 Du}{dx^2}, \frac{d^2 Du}{dx dy}, \dots$ en $\frac{dDu}{d\omega}, \frac{dDu}{da}, \frac{dDu}{db}, \dots, \frac{d^2 Du}{d\omega^2}, \frac{d^2 Du}{d\omega da}, \dots$ il faut mettre leurs valeurs dans l'intégrale $\int \Theta ds = \int \Theta K da db \dots$, après quoi on pourra, en faisant usage de la formule (B) et en supposant pour abrégér $ds' = \sqrt{(db^2 \dots + da^2 \dots + \dots)}$, remplacer l'intégrale $\int \Theta K da db \dots$ par la somme

$$\int (P Du + Q \frac{dDu}{d\omega} + R \frac{d^2 Du}{d\omega^2} + \dots) da db \dots + \int \Phi ds'$$

de deux intégrales $\int (P Du + Q \frac{dDu}{d\omega} + R \frac{d^2 Du}{d\omega^2} + \dots) da db \dots$ et $\int \Phi ds'$,

dont la première n'est plus susceptible d'aucune réduction, et dont la seconde peut être réduite de la même manière que l'intégrale $\int \Theta ds$.

Nous aurons

$$\delta V = \int W Du \, dx dy dz \dots + \int \frac{U \delta L \, ds}{V \left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \dots \right)} \\ + \int \left(P Du + Q \frac{dDu}{d\omega} + R \frac{d^2 Du}{d\omega^2} + \dots \right) da db \dots + \int \Phi ds'.$$

L'on traitera l'intégrale $\int \Phi ds'$ comme on a traité $\int \Theta ds$; on la décomposera en deux autres dont l'une sera entièrement réduite, et l'autre encore susceptible de réductions; en continuant de la même manière on épuisera, en quelque sorte, toutes les réductions à faire dans les intégrales qui se présenteront les unes après les autres; alors la variation δV aura reçu la forme propre aux applications.

IX. Comme l'intégrale $\int \Theta ds$ de l'article précédent est relative aux valeurs de x, y, z, \dots qui satisfont à l'équation $L = 0$, on peut regarder une de ces quantités comme fonction de toutes les autres, et celles-ci comme indépendantes entr'elles. Considérons, par exemple, x comme fonction de y, z, \dots , nous aurons d'après l'article VII

$$ds = \frac{V \left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \dots \right)}{V \left(\frac{dL^2}{dx^2} \right)} dy dz \dots$$

et en faisant pour abrégé

$$\frac{\Theta V \left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \dots \right)}{V \left(\frac{dL^2}{dx^2} \right)} = \Psi$$

nous trouverons

$$\int \Theta ds = \int \Psi dy dz \dots$$

on obtiendra l'équation relative aux limites de y, z, \dots en éliminant x entre

$$L = 0 \text{ et } \frac{dL}{dx} = 0.$$

La fonction Ψ renferme les différences partielles $\frac{dDu}{dx}$, $\frac{dDu}{dy}$, $\frac{dDu}{dz}$, $\frac{d^2Du}{dx^2}$, $\frac{d^2Du}{dx dy}$, prises relativement à x, y, z , dans l'hypothèse que ces variables sont indépendantes entr'elles; mais après la différentiation on doit y mettre pour sa valeur, fournie par l'équation $L=0$. Il est bon d'éliminer autant que possible les différences dont nous parlons; pour cet objet, en considérant x comme fonction de y, z , ... nous aurons

$$\frac{dDu}{dy} = \left(\frac{dDu}{dy} \right) + \left(\frac{dDu}{dx} \right) \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{dDu}{dz} = \left(\frac{dDu}{dz} \right) + \left(\frac{dDu}{dx} \right) \frac{dx}{dz}$$

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{dDu}{dx} \right) = \left(\frac{d^2Du}{dx dy} \right) + \left(\frac{d^2Du}{dx^2} \right) \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{dDu}{dx} \right) = \left(\frac{d^2Du}{dx dz} \right) + \left(\frac{d^2Du}{dx^2} \right) \frac{dx}{dz}$$

$$\frac{d^2Du}{dy^2} = \left(\frac{d^2Du}{dy^2} \right) + 2 \left(\frac{d^2Du}{dx dy} \right) \frac{dx}{dy} + \left(\frac{d^2Du}{dx^2} \right) \frac{dx^2}{dy^2} + \left(\frac{dDu}{dx} \right) \frac{d^2x}{dy^2}$$

$$\frac{d^2Du}{dy dz} = \left(\frac{d^2Du}{dy dz} \right) + \left(\frac{d^2Du}{dx dy} \right) \frac{dx}{dz} + \left(\frac{d^2Du}{dx dz} \right) \frac{dx}{dy} + \left(\frac{d^2Du}{dx^2} \right) \frac{dx}{dy} \frac{dx}{dz} + \left(\frac{dDu}{dx} \right) \frac{d^2x}{dy dz}$$

$$\frac{d^2Du}{dz^2} = \left(\frac{d^2Du}{dz^2} \right) + 2 \left(\frac{d^2Du}{dx dz} \right) \frac{dx}{dz} + \left(\frac{d^2Du}{dx^2} \right) \frac{dx^2}{dz^2} + \left(\frac{dDu}{dx} \right) \frac{d^2x}{dz^2}$$

Nous avons entouré de parenthèses les différences partielles de la quantité Du , prises en considérant x, y, z , ... comme indépendantes entr'elles.

On tire des équations précédentes

$$\left(\frac{dDu}{dy} \right) = \frac{dDu}{dy} - \left(\frac{dDu}{dx} \right) \frac{dx}{dy}$$

$$\left(\frac{dDu}{dz} \right) = \frac{dDu}{dz} - \left(\frac{dDu}{dx} \right) \frac{dx}{dz}$$

$$\left(\frac{d^2 Du}{dx dy}\right) = \frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dy} - \left(\frac{d^2 Du}{dx^2}\right) \frac{dx}{dy}$$

$$\left(\frac{d^2 Du}{dx dz}\right) = \frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dz} - \left(\frac{d^2 Du}{dx^2}\right) \frac{dx}{dz}$$

.....

$$\left(\frac{d^2 Du}{dy^2}\right) = \frac{d^2 Du}{dy^2} - 2 \frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dy} \frac{dx}{dy} + \left(\frac{d^2 Du}{dx^2}\right) \frac{dx^2}{dy^2} - \left(\frac{dDu}{dx}\right) \frac{d^2 x}{dy^2}$$

$$\left(\frac{d^2 Du}{dy dz}\right) = \frac{d^2 Du}{dy dz} - \frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dy} \frac{dx}{dz} - \frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dz} \frac{dx}{dy} + \left(\frac{d^2 Du}{dx^2}\right) \frac{dx dx}{dy dz} - \left(\frac{dDu}{dx}\right) \frac{d^2 x}{dx dy}$$

$$\left(\frac{d^2 Du}{dz^2}\right) = \frac{d^2 Du}{dz^2} - 2 \frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dz} \frac{dx}{dz} + \left(\frac{d^2 Du}{dx^2}\right) \frac{dx^2}{dz^2} - \left(\frac{dDu}{dx}\right) \frac{d^2 x}{dz^2}$$

.....

ou bien, en mettant pour $\frac{dx}{dy}$, $\frac{dx}{dz}$ $\frac{d^2 x}{dy^2}$, $\frac{d^2 x}{dy dz}$, $\frac{d^2 x}{dz^2}$ leurs valeurs, tirées de l'équation $L=0$,

$$\left(\frac{dDu}{dy}\right) = \frac{\frac{dL}{dx} \frac{dDu}{dy} + \frac{dL}{dy} \left(\frac{dDu}{dx}\right)}{\frac{dL}{dx}}$$

$$\left(\frac{dDu}{dz}\right) = \frac{\frac{dL}{dx} \frac{dDu}{dz} + \frac{dL}{dz} \left(\frac{dDu}{dx}\right)}{\frac{dL}{dx}}$$

.....

$$\left(\frac{d^2 Du}{dx dy}\right) = \frac{\frac{dL}{dx} \frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dy} + \frac{dL}{dy} \left(\frac{d^2 Du}{dx^2}\right)}{\frac{dL}{dx}}$$

$$\left(\frac{d^2 Du}{dx dz}\right) = \frac{\frac{dL}{dx} \frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dz} + \frac{dL}{dz} \left(\frac{d^2 Du}{dx^2}\right)}{\frac{dL}{dx}}$$

.....

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d^2 Du}{dy^2}\right) &= \frac{\frac{dL}{dx} \left[\frac{dL^2}{dx^2} \frac{d^2 Du}{dy^2} + 2 \frac{dL}{dx} \frac{dL}{dy} \frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dy} + \frac{dL^2}{dy^2} \left(\frac{d^2 Du}{dx^2}\right) \right] + \left(\frac{dL^2}{dx^2} \frac{d^2 L}{dy^2} - 2 \frac{dL}{dx} \frac{dL}{dy} \frac{d^2 L}{dx dy} + \frac{dL^2}{dy^2} \right) \frac{dL^3}{dx^3}}{\frac{dL^3}{dx^3}} \\
 \left(\frac{d^2 Du}{dy dz}\right) &= \frac{\frac{dL}{dx} \left[\frac{dL^2}{dx^2} \frac{d^2 Du}{dy dz} + \frac{dL}{dx} \frac{dL}{dz} \frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dy} + \frac{dL}{dx} \frac{dL}{dy} \frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dz} + \frac{dL}{dy dz} \left(\frac{d^2 Du}{dx^2}\right) \right] + \left(\frac{dL^2}{dx^2} \frac{d^2 L}{dy dz} - \frac{dL}{dx} \frac{dL}{dz} \frac{d^2 L}{dx dy} - \frac{dL}{dx} \frac{dL}{dy} \frac{d^2 L}{dx dz} + \frac{dL}{dy dz} \frac{d^2 L}{dx^2} \right) \left(\frac{dDu}{dx}\right)}{\frac{dL^3}{dx^3}} \\
 \left(\frac{d^2 Du}{dz^2}\right) &= \frac{\frac{dL}{dx} \left[\frac{dL^2}{dx^2} \frac{d^2 Du}{dz^2} + 2 \frac{dL}{dx} \frac{dL}{dz} \frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dz} + \frac{dL^2}{dz^2} \left(\frac{d^2 Du}{dx^2}\right) \right] + \left(\frac{dL^2}{dx^2} \frac{d^2 L}{dz^2} - 2 \frac{dL}{dx} \frac{dL}{dz} \frac{d^2 L}{dx dz} + \frac{dL^2}{dz^2} \right) \frac{dL^3}{dx^3}}{\frac{dL^3}{dx^3}}
 \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans

$$\int \Theta ds = \int \Psi dy dz \dots$$

et en employant la formule (C) de l'article VII, on remplacera l'intégrale $\int \Psi dy dz \dots$ par la somme

$$\int \left[P Du + Q \left(\frac{dDu}{dx}\right) + R \left(\frac{d^2 Du}{dx^2}\right) + \dots \right] dy dz \dots + \int \Phi dz \dots$$

de deux intégrales $\int \left[P Du + Q \left(\frac{dDu}{dx}\right) + R \left(\frac{d^2 Du}{dx^2}\right) + \dots \right] dy dz \dots$ et $\int \Phi dz \dots$ dont la première est toute réduite, et dont la seconde peut être encore susceptible de réductions. Cette dernière est relative aux variables $z \dots$. Ses limites dépendent de l'équation qu'on obtiendra en éliminant x et y entre $L = 0$, $\frac{dL}{dx} = 0$, $\frac{dL}{dy} = 0$; enfin elle est toute semblable à l'intégrale $\int \Psi dy dz \dots$, et on la traitera de la même manière.

Nous n'avons fait qu'indiquer les transformations qu'on doit faire subir à la partie $\int DU dx dy dz \dots$ de la variation δV ; parce que ces transformations, se réduisant à l'intégration par parties, appartiennent plutôt au calcul intégral, qu'à la méthode des variations. A la vérité, un des principes fondamentaux de cette dernière méthode consiste à faire disparaître, autant que possible, les différentielles des variations qui se trouvent sous un signe intégral; mais le calcul des variations ne fait qu'indiquer cette opération et en laisse l'exécution au calcul intégral.

S U R

LA TRANSFORMATION DES VARIABLES

DANS

LES INTÉGRALES MULTIPLES;

PAR

M. OSTROGRADSKY.

(Lu le 12 août 1836.)

L arrive fréquemment que, pour faciliter la recherche d'une intégrale multiple, l'on remplace les variables, par rapport auxquelles les intégrations doivent s'effectuer, par d'autres quantités qui sont fonctions des premières. Le principe de ce changement des variables est connu. On le doit à Euler et à Lagrange; mais ces grands géomètres ne l'ont pas, ce me semble, exposé avec toute la clarté désirable.

Je vais d'abord faire voir comment l'interprétation, à mon avis la plus naturelle des paroles d'Euler et de Lagrange *), peut conduire à un résultat complètement erroné; puis j'ajouterai ce qui manque à l'exposition de ces deux grands géomètres pour la mettre à l'abri de fausses interprétations.

§ 1. Ne considérons qu'une intégrale double $\int V dx dy$, V étant une fonction de x et de y . Supposons que x et y soient des coordonnées rectangles d'un point, que l'intégrale $\int V dy dx$ s'étend à tous les points de l'intérieur de la figure $ABCD$ (fig. 1), et que l'on veuille remplacer les coordonnées rectangles x et y par les coordonnées

*) Voyez Mémoires de l'académie de Berlin, 1773.

polaires r et p en sorte que $x = r \cos. p$, $y = r \sin. p$. Pour cela, en substituant dans V , à la place de x et de y , leurs valeurs précédentes, il ne restera qu'exprimer le parallélogramme différentiel $dx dy$ en r et p . Supposons que $MM'M''M$ représente $dx dy$; pour avoir l'aire $dx dy$, il faut trouver $dx = MM'$ et $dy = MM''$. Or, pour passer du point M au point M' , il faut, sans varier y , changer x en $x + dx$ ce qui donnera

$$dx = dr \cos. p - r \sin. p dp$$

$$0 = dr \sin. p + r \cos. p dp$$

d'où

$$dx = \frac{dr}{\cos. p} = - \frac{r dp}{\sin. p}.$$

Pour passer du point M à M'' , il faut au contraire laisser x constant et changer y en $y + dy$. Mais x étant constant, il ne s'en suit pas que la valeur de dx , qu'on vient de trouver, soit nulle; car chaque passage du point M à un point voisin exige d'autres accroissements de x et de y ; et ce sera un autre dx qu'on doit évaluer à zéro, en sorte, qu'en désignant par δp et δr les différentielles relatives au passage de M à M'' , on aura

$$0 = \delta r \cos. p - r \sin. p \delta p$$

$$dy = \delta r \sin. p + r \cos. p \delta p$$

d'où

$$dy = \frac{\delta r}{\sin. p} = \frac{r \delta p}{\cos. p}$$

et par suite

$$dx dy = \frac{dr \delta r}{\cos. p \sin. p} = \frac{r \delta r \delta p}{\cos.^2 p} = - \frac{r \delta r dp}{\sin.^2 p} = - \frac{r^2 dp \delta p}{\cos. p \sin. p}$$

aucune de ces quatre valeurs n'est celle que l'on connaît.

§ 2. Considérons de nouveau l'intégrale $\int V dy dx$ dont les limites sont arbitrairement données. L'intégration, d'abord par rapport à y , puis par rapport à x , présentant des difficultés, on veut changer les variables x et y en d'autres, u et v , qui sont fonctions des premières, et l'on trouve commode d'effectuer les intégrations, relatives aux nouvelles variables, d'abord par rapport à v , puis par rapport à u .

Sur la transformation des variables dans les intégrales multiples. 403

Comme l'intégrale $\int V dy dx$ est la somme de tous les éléments différentiels, pour la trouver il n'y a qu'à ajouter tous les $V dy dx$ qui répondent à la surface d'une courbe $ABCDEF$ (fig. 2) dont le contour a pour coordonnées les valeurs limites de x et y . L'ordre, dans lequel on ajoutera les éléments $V dy dx$, est évidemment indifférent pour le résultat définitif. Mais, en le choisissant convenablement, on simplifiera beaucoup l'intégration. C'est dans les différentes manières d'ajouter les éléments différentiels, que consiste toute la théorie du changement des variables dans les intégrales multiples. Si, par exemple, on prenait l'intégrale $\int V dy dx$, d'abord par rapport à y et puis par rapport à x , cela reviendrait à ajouter d'abord tous les éléments $V dy dx$ qui sont relatifs à la bande AD , parallèle à l'axe des y et ayant dx pour largeur, et puis ajouter ce qui relatif à toutes les bandes semblables à AD et que l'on peut tracer dans l'intérieur de $ABCDEF$. Mais la même somme $\int V dy dx$ peut s'obtenir en ajoutant les éléments $V dy dx$ dans tout autre ordre, par exemple, d'abord tout ceux qui répondent à une bande courbe $BCEF$ infiniment étroite, puis on continuera l'addition des éléments par bandes semblables à $BCEF$, jusqu'à ce qu'on les aura épuisées.

Revenons à la transformation que nous avons en vue. Puisque on veut intégrer d'abord par rapport à v et puis par rapport à u , on veut évidemment ajouter d'abord tous les éléments qui répondent à une même valeur de u , et puis continuer l'addition par systèmes d'éléments, chaque système répondant à une même valeur de u ; mais les valeurs de cette quantité, pour les différents systèmes, sont différentes. Comme x et y sont fonctions de u et de v , en considérant tous les x et y qui se rapportent à une même valeur de u , on parcourra une courbe que je représente par BF . — x , y et v seront différents pour les différents points de cette courbe, mais u reste le même. Si l'on fait varier u infiniment peu, en le faisant croître de du , et puis si l'on cherche tous les points qui répondent à une même valeur $u + du$ de u , on trouvera une courbe CF infiniment peu différente de BF . Aux différents points de cette courbe répondront les différentes valeurs de x , y et de v .

Nous allons sommer d'abord tous les éléments qui se rapportent à la surface $BCEF$; pour cela, divisons la en éléments comme il suit. Prenons un point M répondant à une certaine valeur de v , sur la courbe BF , et un point M' , répondant à la même valeur de v , sur la courbe CE ; puis marquons deux autres points M'' et M''' qui répondent tous deux à une même valeur $v + dv$ de v , et dont le premier se trouve sur la courbe BF , et le second sur la courbe CE . Nous pouvons considérer le quadrilatère $MM'M''M'''$ comme élément de la surface $ABCDEF$. Il n'est pas nécessaire qu'il soit égal à $dydx$; sa valeur n'entre pour rien dans le résultat du calcul.

En désignant $MM'M''M'''$ par ω , on peut remplacer $Vdydx$ par $V\omega$, et nous pouvons considérer V comme fonction de v et de u qui résulte de la substitution de ces variables à la place de x et y . Nous aurons

$$\int Vdydx = \int V\omega.$$

La dernière intégrale doit être prise d'abord relativement à toutes les valeurs de v qui répondent à la courbe BF , et puis relativement à toutes les différentes valeurs que u peut recevoir dans l'intérieur de la figure $ABCDEF$.

Il nous reste à trouver la surface différentielle ω , ce qui est très facile; car les quatre côtes de cette surface, répondant aux coordonnées x, y ; $x + \frac{dx}{du} du$, $y + \frac{dy}{du} du$, $x + \frac{dx}{dv} dv$, $y + \frac{dy}{dv} dv$, $x + \frac{dx}{du} du + \frac{dx}{dv} dv$, $y + \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv$ on en conclut que ω est un parallélogramme, donc, en vertu d'un théorème de la géométrie élémentaire, on aura

$$\omega = i \left(\frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv} \frac{dy}{du} \right) dvdu$$

i designant ± 1 , afin que ω soit toujours positif. Nous aurons

$$\int Vdydx = \int V \left(\frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv} \frac{dy}{du} \right) i dvdu$$

résultat connu.

Voici l'énoncé du théorème de géométrie que nous avons cité: Désignant par x, y ; $x + p$, $y + q$; $x + p'$, $y + q'$, les coordonnées de trois quelconques des

quatre angles d'un parallélogramme, rapportées à son plan, l'aire du parallélogramme sera $i(pq' - qp')$, la quantité $i = \pm 1$ doit avoir le signe qui rend $i(pq' - qp')$ positif.

§ 3. Il serait facile d'étendre les considérations précédentes aux intégrales triples et de retrouver les résultats connus. Mais ces mêmes considérations, à cause du théorème de géométrie, que nous y avons mêlé, ne s'appliqueront pas à la transformation des variables dans les intégrales relatives à plus de trois quantités; par cette raison et pour rendre compte des procédés généralement employés, nous allons transformer l'intégrale $\int V dy dx$ d'une autre manière.

Comme il s'agit d'abord de prendre la somme de tous les $V dy dx$ qui répondent à l'intérieur de la bande $BCEF$, je prendrai cette somme par le principe ordinaire, en intégrant par rapport à y depuis $y = PM$ jusqu'à $y = PN$, et puis par rapport à x depuis $x = OQ$ jusqu'à $x = OR$. Or, intégrer par rapport à y , entre les limites ci-dessus, revient à multiplier par $MN = dy$, en sorte qu'il ne restera qu'à intégrer par rapport à x ; or on a $MN = dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv$ et, en même temps, on doit faire $0 = \frac{dx}{du} du + \frac{dx}{dv} dv$, car il s'agit de passer du point M au point N . D'où, en éliminant dv , on trouve $dy = \frac{\left(\frac{dx}{dv} \frac{dy}{du} - \frac{dx}{du} \frac{dy}{dv}\right) du}{\frac{dx}{dv}}$.

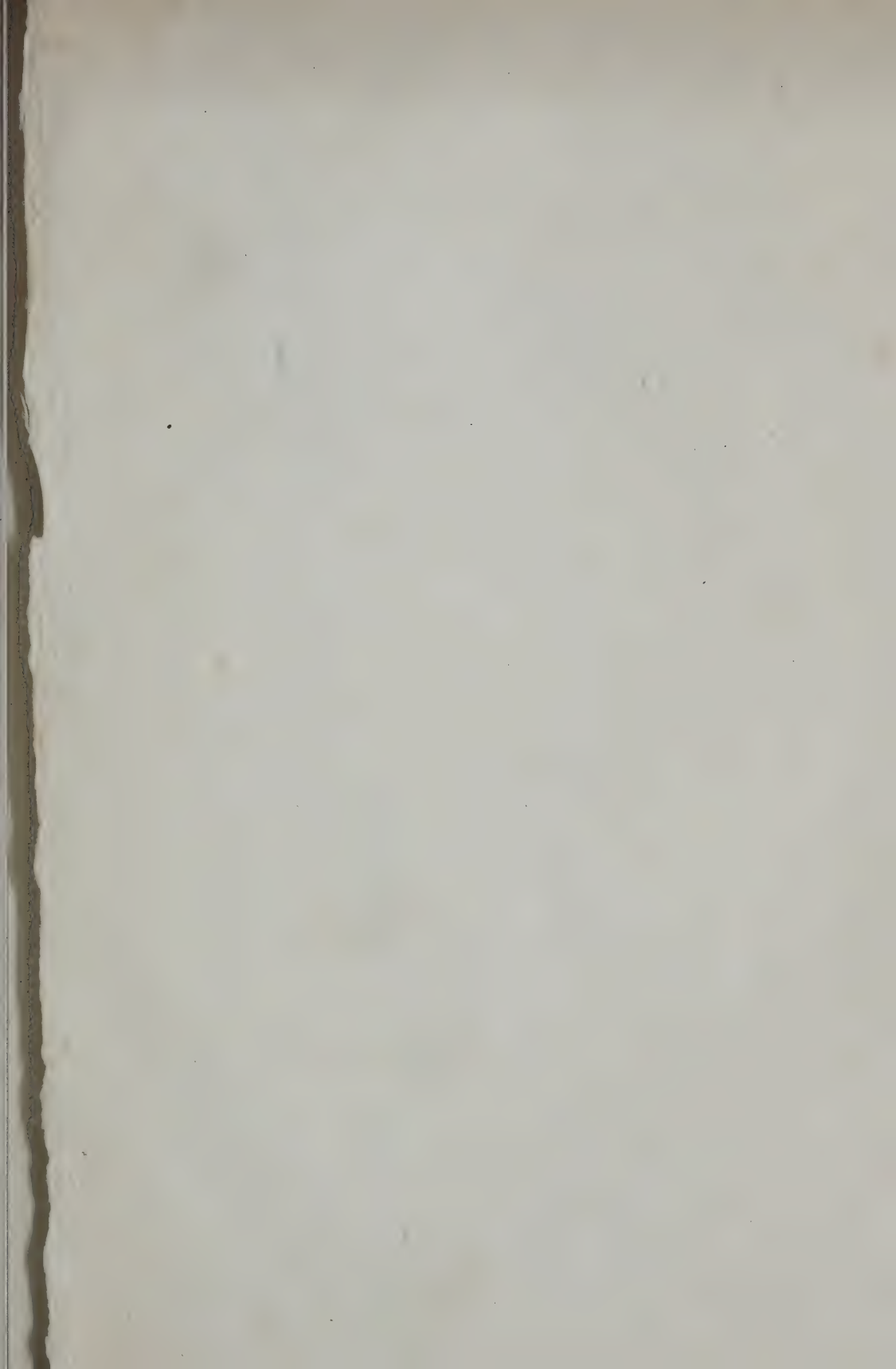
Ainsi le résultat de l'intégration par rapport à y sera

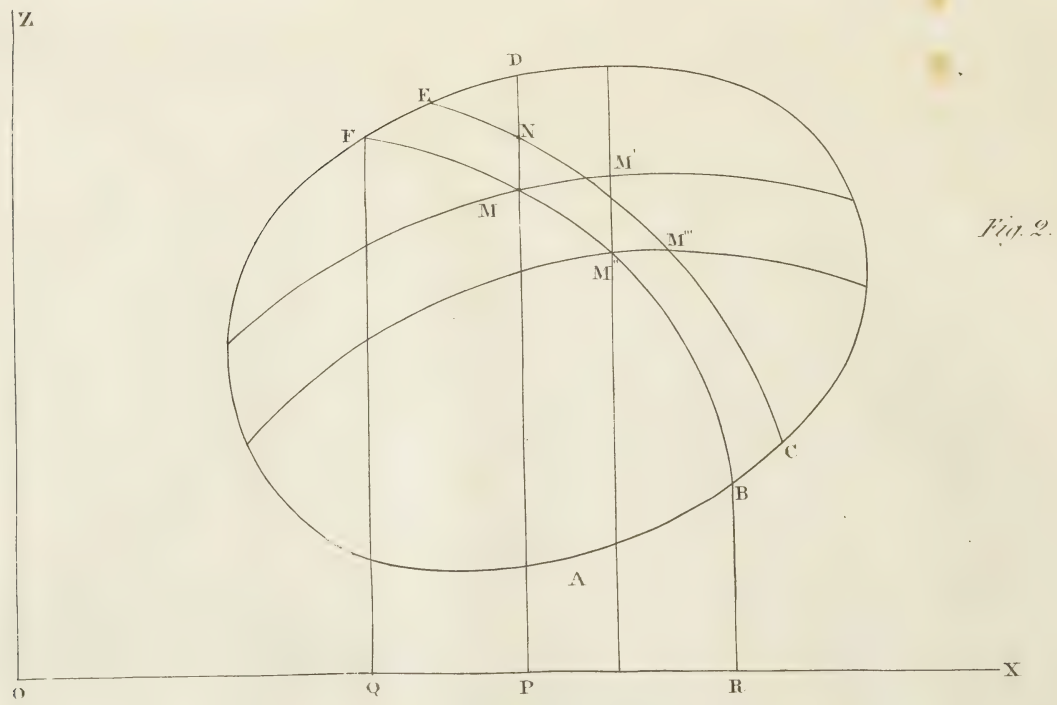
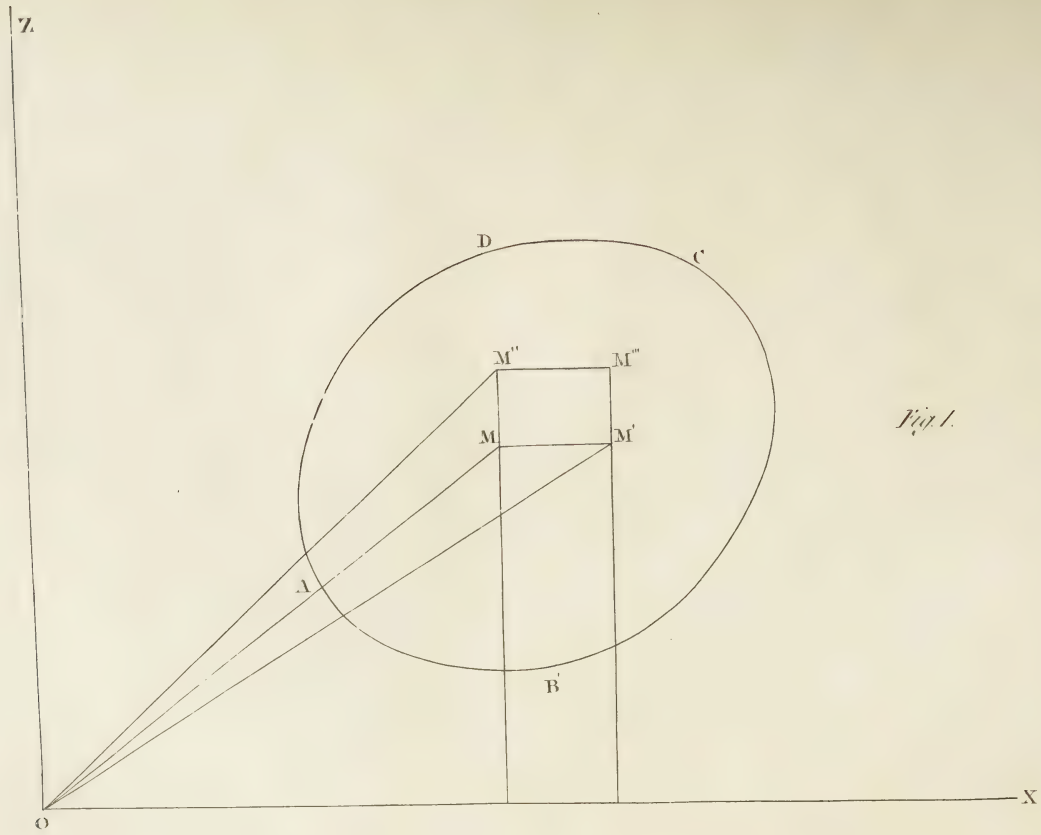
$$\frac{\int V \left(\frac{dx}{dv} \frac{dy}{du} - \frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} \right) du dv}{\frac{dx}{dv}}.$$

Maintenant il faut intégrer par rapport à x ; mais il convient mieux d'introduire v à la place de x , et prendre l'intégrale depuis v qui répond au point F , jusqu'à v relatif au point B . Or comme $dx = \frac{dx}{dv} dv$, car u reste invariable pour tous les points de la courbe FB , nous aurons

$$\int V \left(\frac{dx}{dv} \frac{dy}{du} - \frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} \right) dv du$$







P r o g r a m m

wodurch

zur Feier des allerhöchsten Geburtsfestes

SEINER KÖNIGLICHEN HOHEIT

unseres Durchlauchtigsten Grossherzogs

L E O P O L D

im Namen

des akademischen Senates

die Angehörigen

der

Albert-Ludwigs-Universität

einladet

der gegenwärtige Prorector

Dr. LUDWIG ÖTTINGER.

*Die Einladung enthält eine Abhandlung über eine Methode, die höhern Differenziale
der Functionen von Functionen zu entwickeln.*

Freiburg 1846.

Universitäts-Buchdruckerei von HERMANN M. POPPEN.



Mit lobenswerther Pietät huldigt unsere Universität der althergebrachten, schönen Sitte, den Geburtstag Ihres Hohen Beschützers und Rectors als einen Festtag zu begrüßen und an ihm, der die Brust eines jeden Badeners mit Freude und Lust bewegt, die Gefühle tiefster Verehrung dem geliebten Landesvater darzubringen. Alle die der hiesigen Universität als Mitglieder angehören, alle die sich ihre Bürger nennen, mögen ihren Dank und ihre Freude dem Hochgefühle des Landes einmischen, welchem an diesem Tag ein Fürst geschenkt wurde, der durch Wohlwollen die Herzen aller derer gewinnt, die sich Ihm nahen; der mit Vaterhuld die Noth der Armuth und des Unglücks lindert; der mit unermüdlichem Eifer das Wohl seiner Unterthanen fördert; der mit aufmerksamer Sorge Ackerbau, Gewerbe und Verkehr, die Quellen des Wohlstandes, pflegt, der mit fester Hand Gesetz und Ordnung schirmt und bessert, und bei den vielen Mühen, welche den goldenen Glanz der Krone unsichtbar umlagern, Wissenschaft und Künste, die Blüthen der Humanität und Civilisation, schützt und hebt.

Alle mögen sich an diesem Tage mit innigem Dankgefühle zu dem Gebete erheben, das an allen Orten unseres Vaterlandes frommen Gemüthern entschwebt,

Zeit hindurch dauert, niederdrückend auf die Frequenz einer Universität einwirke, kann nur der in Frage stellen wollen, welcher seine Augen gerne der Wahrheit verschliesst. Am einfachsten lässt sich die Richtigkeit dieser Behauptung durch Zahlen nachweisen und das an hiesiger Universität für das Sommerhalbjahr 1846 ausgegebene Verzeichniss ist leider im Stande, den Beweis hiefür zu führen. Wer übrigens die Schwierigkeiten kennt, welche mit der Berufung ausgezeichneten Männer verbunden sind, und die Verzögerungen, welche sich oft auf eine sehr unwillkommene Weise einmischen, würdigt, der wird auch geneigt seyn, den Verhältnissen eine billige Rücksicht zu tragen und sich gerne mit der wohlbegründeten Hoffnung trösten, die Besetzung der noch vacanten Professuren an hiesiger Universität mit tüchtigen Lehrern und Gelehrten in der nächsten Zukunft und noch vor Eröffnung des kommenden Wintersemesters durch die Bemühung des Grossherzoglichen Ministeriums verwirklicht zu sehen. Unter solch günstigen Aussichten wird unsere Anstalt einer bessern Zukunft entgegen gehen.

Mit Bedauern und Wehmuth muss jeder Unbefangene, der an Förderung der Wissenschaften und Humanität Interesse nimmt, die Angriffe beklagen, welche in der nächsten Vergangenheit wiederholt gegen die hiesige Universität gerichtet wurden und die von der einen Seite nicht geradezu ihre Aufhebung, doch ihre allmälige Auflösung bezwecken, auf der andern Seite Zwietracht und Zerwürfniss in ihre Mitte zu bringen sich bemühen. Unsere Universität, die mehrere Jahrhunderte hindurch für das Wohl der Menschheit wirkte, und immer eine ehrenvolle Stelle unter ihren Schwestern behauptete, trauert mit Recht über die Unbilden, welche

die Neuzeit ihr zuzufügen strebt. Statt liebevoller Pflege zur Wiedererhebung aus der Ungunst äusserer Verhältnisse, worein sie fürwahr nicht durch eigene Schuld gebracht wurde, tritt ein wiederholtes Andrängen gegen ihre Existenz und ein bedauerliches Mühen gegen ihr inneres Erstarken hervor. Ungeachtet so vielen Missgeschickes und ungeachtet der Missgunst der Gegenwart ist sie doch nicht freudelos. Ihr hoher Beschützer und Rector steht mit seinem Fürsten-Worte schirmend über ihr. Er wird sie mit starkem Arme aus der Ungunst der Verhältnisse einem frischen Leben entgegen führen.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

CHICAGO, ILLINOIS

1900

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

CHICAGO, ILLINOIS

1900

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

CHICAGO, ILLINOIS

1900

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

CHICAGO, ILLINOIS

Ueber
e i n e M e t h o d e

die

höhern Differenziale

der

Functionen von Functionen

zu entwickeln

von

Dr. L. Öttinger,

Grossherzogl. Bad. Hofrathe und Professor der reinen und angewandten Mathematik an der
Universität zu Freiburg i. B.

Freiburg 1846.

Universitäts - Buchdruckerei von HERMANN M. POPPEN.

Ein anderer Zweck sollte durch diese Arbeit, wenn nicht erreicht, doch mit berücksichtigt werden. Es ist unstreitig für die weitere Ausbildung der Differenzial- und Integral-Rechnung von grosser Wichtigkeit, Ausdrücke für die höhern Differenziale zu erhalten, die einem positiven und negativen Exponenten genügen. Die allgemeinen Formeln, welche bis jetzt zur Entwicklung der höhern Differenziale aufgestellt wurden, genügen in der Regel dieser Forderung nicht. Daher muss man sich der Untersuchung im Speciellen zuwenden. Diese verlangt bekanntlich viel Raum, und deswegen konnte sie auch hier nicht weiter beachtet werden. Vielleicht findet sich Gelegenheit, ein andermal auf diese Untersuchung zurückzukommen. Dass die Ausführung dieser Idee nicht allein gedenkbar, sondern auch möglich ist, geht daraus hervor, dass sich dieses Problem in der Differenzen- und Summen-Rechnung lösen lässt, wie sich aus §. 19 und 20 meiner Abhandlung über Fakultäten ergibt, die im 33^{ten} Bande des Journals von Crelle abgedruckt wird.

Dass unter Bekanntten auch neue Entwicklungen und Sätze gegeben sind, geht aus den §§. 3 — 12 und der darin aufgeführten Literatur hervor. Die allgemeine Gleichung 16 §. 1 wurde von Rothe, die 12 §. 4 von Pfaff aufgestellt.

Die hier gegebenen Gleichungen zur Darstellung der Differenziale der Functionen von Functionen §. 1 — 7 lassen sich auch auf drei und mehrere Functionen anwenden, und man hat zu dem Ende in den gefundenen allgemeinen Formeln unter y selbst wieder eine Function von einer Function u. s. w. zu verstehen, und dafür die nöthigen Werthe einzuführen.

Freiburg im August 1846.

Der Verfasser.

§. 1.

So oft es gelingt verschiedene Darstellungen oder Formen für eine und dieselbe Sache zu gewinnen, hat man den Vortheil, die gewonnenen Resultate untereinander vergleichen, und daraus weitere Folgerungen und Sätze ableiten zu können. Dadurch wird nämlich möglich, das Resultat, worauf eine Entwicklung oder Darstellung führt, als Aequivalent für die andere zu betrachten, und die Geschäfte, welche die eine Darstellung vorschreibt, durch diejenige, welche die andere angibt, zu ersetzen.

Diese Bemerkung läßt sich zur Entwicklung der höhern Differenzialquotienten der Functionen von Functionen, und zwar zunächst eigentlich der Potenzen eines Polynomiums (denn dieß sind Functionen von Functionen) benutzen. Diese Beschränkung ist aber deswegen von keiner Bedeutung, weil sich die für die Potenzen eines Polynomiums gefundenen Resultate leicht auf jede Function von einer Function übertragen lassen.

Zu Erreichung dieses Zweckes dient einerseits die entwickelte Darstellung des in irgend eine Potenz erhobenen Polynomiums, andererseits die Entwicklungen, wozu die Taylor'sche Reihe führt. Auf beiden Wegen kann man eine und dieselbe Aufgabe lösen. Man wird daher sofort zwei Darstellungen erhalten, welche beide an Inhalt gleich, an Form aber verschieden sind. Setzt man nun, was durch das Gesagte gerechtfertigt ist, die so erhaltenen Entwicklungen einander gleich, so kann man jede von ihnen als Begriff und die andere als die hiezu gehörige Definition auffassen. Unter dieser Definition ist aber hier nichts anders zu verstehen, als An-

deutung oder Angabe der Geschäfte, welche in der entsprechenden zweiten Form enthalten sind. Es ergeben sich sofort in dem vorliegenden Falle zwei Begriffe und zwei Definitionen.

Um das Gesagte benutzen zu können, wird wesentlich nöthig zwei Entwicklungen zu erhalten, die miteinander verglichen werden können. Bezeichnet man nun die q^{te} Potenz eines Polynomiums von unbeschränkter Gliederanzahl durch

$$1) (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots)^q = X^q$$

so sind bekanntlich die Glieder der entwickelten Darstellung desselben nach den steigenden Potenzen von x geordnet und man kann sie daher so bezeichnen

$$2) (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots)^q = V_1 + V_2 x + V_3 x^2 + V_4 x^3 + \dots$$

worin $V_1, V_2, V_3, V_4 \dots$ Gebilde sind, welche nur die Größen $a_1, a_2, a_3 \dots$ enthalten.

Man kann die q^{te} Potenz des Polynomiums, welches offenbar eine Function von x ist, auch durch

$$3) fx = X^q$$

andeuten. Die Darstellung fx ist aber in dieser Form nicht nach den steigenden Potenzen von x darstellbar, so daß hiedurch eine Vergleichung mit 2 nicht möglich wird. Daher ist auf diesem Wege keine Förderung zu erwarten.

Um die Aufgabe löslich zu machen, bleibt nichts übrig als eine neue ordnende Gröfse, die k heißen soll, in 1 und 3 einzuführen. Hiedurch wird nämlich nach den nöthigen Vorbereitungen eine entwickelte Darstellung nicht nur für 1, sondern auch für 3 möglich.

Zu dem Ende setzen wir $x + k$ statt x in 1 und 3 und suchen dann hiefür eine entwickelte Darstellung, welche nach den Potenzen von k geordnet ist. Hieraus erhalten wir vorerst

$$4) (a_1 + a_2 [x + k] + a_3 [x + k]^2 + a_4 [x + k]^3 + \dots)^q = f(x + k) = X_1^q$$

Die Function $f(x + k)$ läßt sich bekanntlich leicht nach den steigenden Potenzen von k entwickeln. Die Taylor'sche Reihe gibt hiefür das Gesetz an und man erhält

$$5) f(x + k) = fx + \frac{dfx}{dx} k + \frac{d^2fx}{1 \cdot 2 (dx)^2} k^2 + \frac{d^3fx}{1 \cdot 2 \cdot 3 (dx)^3} k^3 + \dots$$

die Vorzahlen der k sind bekanntlich die Differenzialquotienten der gegebenen Function* ($fx = X^q$).

Um nun eine hiemit vergleichbare, entwickelte Darstellung zu erhalten, hat man die Grundreihe in dem Polynomium 4 nach den steigenden Potenzen von k zu ordnen, und dann die nöthigen Entwicklungen zu machen. Hiernach wird

$$a_2 (x + k) = a_2 x + a_2 k$$

$$a_3 (x + k)^2 = a_3 x^2 + 2 a_3 x k + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} a_3 k^2$$

$$a_4 (x + k)^3 = a_4 x^3 + 3 a_4 x^2 k + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} a_4 x k^2 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_4 k^3$$

$$a_5 (x + k)^4 = a_5 x^4 + 4 a_5 x^3 k + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} a_5 x^2 k^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_5 x k^3 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a_5 k^4$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Ordnet man nun alle die so erhaltenen Glieder nach den Potenzen von k , so wird

$$\begin{aligned} 6) X_1 &= a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^5 + \dots \\ &+ (a_2 + 2 a_3 x + 3 a_4 x^2 + 4 a_5 x^3 + 5 a_6 x^4 + \dots) k \\ &+ \left(\frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} a_3 + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} a_4 x + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} a_5 x^2 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} a_6 x^3 + \dots \right) k^2 \\ &+ \left(\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_4 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_5 x + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_6 x^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_7 x^3 + \dots \right) k^3 \\ &\cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\ &\cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\ &\cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \end{aligned}$$

Stellt man nun die Reihen, welche in dieser Darstellung mit den Potenzen von k verbunden sind, der Kürze wegen, durch Elemente dar, und gebraucht hiebei für die Fakultäten folgende abkürzende Bezeichnungsweise (die im Folgenden allenthalben beibehalten werden soll)

$$7) \frac{n^{r-1}}{1^{r-1}} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} = (n)_r$$

$$8) \frac{n!}{r!} = \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} = [n],$$

und setzt

$$\begin{aligned} 9) \quad & a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots = b_1 \\ & a_2 + 2 a_3 x + 3 a_4 x^2 + 4 a_5 x^3 + \dots = b_2 \\ & a_3 + (3)_2 a_4 x + (4)_2 a_5 x^2 + (5)_2 a_6 x^3 + \dots = b_3 \\ & a_4 + (4)_3 a_5 x + (5)_3 a_6 x^2 + (6)_3 a_7 x^3 + \dots = b_4 \end{aligned}$$

so geht die Darstellung 4 in folgende über

$$10) f(x+k) = X_1^q = (b_1 + b_2 k + b_3 k^2 + b_4 k^3 + \dots)^q$$

Diese Darstellung ist nun ein Polynomium von der Form 1 oder 2 und unterscheidet sich von dem dort angegebenen nur dadurch, daß die ordnende GröÙe x durch k und die Elemente $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$ durch $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \dots$ ersetzt sind, von denen jedes Element eine ins Unbestimmte fortlaufende Reihe bezeichnet.

Ganz analog mit der Darstellung in 2 kann man nun das in 10 aufgeführte Polynomium in eine Reihe entwickeln, deren Glieder nach den Potenzen von k fortlaufen. Hieraus ergibt sich dann folgende Darstellung

$$11) X_1^q = V_1 + V_2 k + V_3 k^2 + V_4 k^3 + V_5 k^4 + \dots$$

Die Vorzahlen $V_1, V_2, V_3, V_4 \dots$ dieser Darstellung werden auf die nämliche Weise aus den Elementen $b_1, b_2, b_3, b_4 \dots$ hervorgebracht, wie die in 2 aus den Elementen $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$ hervorgebracht werden.

Die Darstellungen 5, 10 und 11 sind an Inhalt gleich. Diese Bemerkung führt zu folgender Gleichung

$$\begin{aligned} 12) f(x+k) = X_1^q &= fx + \frac{dfx}{dx} k + \frac{d^2fx}{1 \cdot 2 (dx)^2} k^2 + \frac{d^3fx}{1 \cdot 2 \cdot 3 (dx)^3} k^3 + \dots \\ &= V_1 + V_2 k + V_3 k^2 + V_4 k^3 + V_5 k^4 + \dots \end{aligned}$$

Da nun die Glieder in der entwickelten Darstellung, welche gleichen Potenzen von k zugehören, einander gleich sind, so hat man hieraus folgende Zusammenstellung

$$\begin{aligned} V_1 &= fx \\ V_2 &= \frac{dfx}{dx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{d^2 f_x}{1 \cdot 2 (dx)^2} \\ V_4 &= \frac{d^3 f_x}{1 \cdot 2 \cdot 3 (dx)^3} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ V_{n+1} &= \frac{d^n f_x}{1^{n+1} (dx)^n} \end{aligned}$$

und hieraus gewinnt man

$$13) \frac{d^n f_x}{(dx)^n} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n V_{n+1}$$

wobei zu bemerken ist, daß V_{n+1} aus Gebilden besteht, welche nur die Elemente $b_1, b_2, b_3, b_4 \dots$ enthalten, und daß

$$f_x = (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots)^q$$

bedeutet.

Die vorstehende Gleichung hat daher folgende Bedeutung:

„Man findet den n^{ten} Differential-Quotienten eines in irgend eine Potenz erhobenen Polynomiums, wenn man in der Grundreihe $x+k$ statt x setzt, die letztere nach den Potenzen von k ordnet, Nro. 6, dann das Polynomium nach den Potenzen von k entwickelt, Nro. 10 und 11, die Vorzahl des $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliedes (oder die Vorzahl von k^n) in der so erhaltenen entwickelten Darstellung nimmt, und diese Vorzahl mit der n^{ten} um die Einheit steigenden Fakultät von 1 vervielfacht.“

Um nun den n^{ten} Differenzial-Quotienten von X^q wirklich darstellen zu können, ist erforderlich, die Vorzahl des $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliedes eines Polynomiums bilden zu können. Diese Aufgabe löst die combinatorische Analysis. Es ist nämlich nach meinem Differenzial-Calcul Pg. 80 Nro. 92

$$\begin{aligned} 14) (m_1 + m_2 z + m_3 z^2 + m_4 z^3 + \dots)^q &= P'(sq; m_1, m_2, m_3 \dots)^q \\ &+ P'(s[q+1]; m_1, m_2, m_3 \dots)^q z \\ &+ P'(s[q+2]; m_1, m_2, m_3 \dots)^q z^2 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

wenn $P'(s\ t; m_1, m_2, m_3 \dots)^q$ die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe t in der q^{ten} Classe aus den Elementen $m_1, m_2, m_3 \dots$ bezeichnet. Hiernach ist für

$$15) V_{n+1} = P'(s[q+n]; m_1, m_2, m_3 \dots)^q$$

oder wenn diese Gleichung auf 13 angewendet wird.

$$16) \frac{d^q f_X}{(dX)^n} = \frac{d^n X^q}{(dX)^n} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n P'(s[q+n]; b_1, b_2, b_3, b_4; \dots)^q$$

Hierin haben die Elemente b_1, b_2, b_3, \dots die in Nro. 9 angegebenen Werthe.

Es läßt sich das in 14 angegebene Polynomium auch noch auf eine andere Weise nach den Potenzen von z nach meinem Differenzial-Calcul Pg. 102 Nro. 136 entwickeln, und zwar so, daß q einen positiven und negativen Werth haben kann. Für diesen Fall ist

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2 z + m_3 z^2 + m_4 z^2 + m_5 z^4 + \dots)^q = & m_1^q + q m_1^{q-1} P'(s2)^1 z \\ & + q m_1^{q-1} P'(s3)^1 z^2 \\ & + (q)_2 m_1^{q-2} P'(s4)^2 z^3 \\ & + q m_1^{q-1} P'(s4)^1 z^3 \\ & + (q)_2 m_1^{q-2} P'(s5)^2 z^4 \\ & + (q)_3 m_1^{q-3} P'(s6)^3 z^5 \\ & \vdots \\ & \vdots \\ & (m_2, m_3, m_4 \dots) \end{aligned}$$

wenn unter $P'(s\ t)^u$ die Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe t in der u^{ten} Classe aus den Elementen $m_2, m_3, m_4 \dots$ verstanden werden. Das allgemeine, hier gültige Gesetz, das sich also auch auf 11 übertragen läßt ist

$$\begin{aligned} 17) V_{n+1} = & q b_1^{q-1} P'(s[n+1]; b_2, b_3, b_4, \dots)^1 \\ & \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2} b_1^{q-2} P'(s[n+2]; b_2, b_3, b_4, \dots)^2 \\ & \frac{q(q-1)(q-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b_1^{q-3} P'(s[n+3]; b_2, b_3, b_4, \dots)^3 \\ & \vdots \\ & \vdots \\ & \frac{q(q-1)(q-2) \dots (q-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} b_1^{q-n} P'(s[2n]; b_2, b_3, b_4, \dots)^n \end{aligned}$$

Diese Darstellung kann bei positivem q nie mehr als q verschiedene Glieder in sich begreifen; denn alle Glieder verschwinden wegen $(q)_n$, wenn n gröfser als q werden sollte.

Wird nun diese Darstellung in 16 eingeführt, so entsteht

$$\begin{aligned}
 18) \quad \frac{d^n X^q}{(dx)^n} = & 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n [q b_1^{q-1} P'(s[n+1]; b_2, b_3, b_4, \dots)^1 \\
 & + (q)_2 b_1^{q-2} P'(s[n+2]; b_2, b_3, b_4, \dots)^2 \\
 & + (q)_3 b_1^{q-3} P'(s[n+3]; b_2, b_3, b_4, \dots)^3 \\
 & \vdots \\
 & (q)_n b_1^{q-n} P'(s[2n]; b_2, b_3, b_4, \dots)^n]
 \end{aligned}$$

Hierin gelten die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 19) \quad X &= a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots \\
 b_1 &= a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots \\
 b_2 &= a_2 + 2 a_3 x + 3 a_4 x^2 + 4 a_5 x^3 + \dots \\
 b_3 &= \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} a_3 + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} a_4 x + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} a_5 x^2 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} a_6 x^3 + \dots \\
 b_4 &= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_4 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_5 x + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_6 x^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_7 x^3 + \dots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

§. 2.

In dem Vorhergehenden § wurde gezeigt, wie man die höhern Differenzial-Quotienten eines in irgend eine Potenz erhobenen Polynomiums durch die Sätze der combinatorischen Analysis darstellen kann. Nun soll auch gezeigt werden, wie man umgekehrt die Vorzahlen der entwickelten Darstellung eines in irgend eine Potenz erhobenen Polynomiums finden kann.

Aus 2 §. 1 ist

$$1) \quad X^q = (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots)^q = V_1 + V_2 x + V_3 x^2 + V_4 x^3 + \dots$$

Wird nun hievon das erste, zweite, dritte Differenzial u. s. w. genommen, so wird

$$\begin{aligned}
 2) \quad \frac{dX^q}{dx} &= V_2 + 2 \cdot V_3 x + 3 V_4 x^2 + 4 V_5 x^3 + \dots \\
 \frac{d^2 X^q}{(dx)^2} &= 2 \cdot 1 V_3 + 3 \cdot 2 V_4 x + 4 \cdot 3 V_5 x^2 + 5 \cdot 4 V_6 x^3 + \dots \\
 \frac{d^3 X^q}{(dx)^3} &= 3 \cdot 2 \cdot 1 V_4 + 4 \cdot 3 \cdot 2 V_5 x + 5 \cdot 4 \cdot 3 V_6 x^2 + \dots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \frac{d^n X^q}{(dx)^n} &= 1^{n!} V_{n+1} + 2^{n!} V_{n+2} x + 3^{n!} V_{n+3} x^2 + \dots
 \end{aligned}$$

Hieraus erhält man sofort folgende Vergleichung

$$3) \quad V_{n+1} = \frac{d^n X^q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n (dx)^n}$$

wenn nach geschעהener Differenziation $x=0$ gesetzt wird.

Diefs führt zu folgender Regel:

Man erhält die $(n+1)$ Vorzahl der entwickelten Darstellung eines in irgend eine Potenz erhobenen Polynomiums, wenn man den n^{ten} Differenzial-Quotienten von X^q angibt, $x=0$ setzt und dann das erhaltene Resultat durch $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n$ theilt.

Hiemit ist nun die zu Anfang des vorigen §. ausgesprochene Behauptung gerechtfertigt, daß man die Geschäfte, welche die Auflösung eines Problems vorschreibt, durch andere ersetzen kann, wenn es möglich wird, zwei verschiedene Wege der Auflösung für ein und dasselbe Problem aufzufinden.

Da es nicht der Zweck ist die Sätze der combinatorischen Analysis hier aufzufinden, so erörtern wir die in diesem §. aufgestellte Bemerkung nicht weiter, sondern wenden uns zur weitem Verfolgung des in dem vorhergehenden §. entwickelten Gesetzes.

§. 3.

Die in §. 1 aufgefundenen Darstellungen lassen noch andere, die Ausführung der angezeigten Geschäfte erleichternde, Umformungen zu. Diefs soll vorerst gezeigt werden.

Die Stellenzahlen der Elemente b_1, b_2, b_3, b_4 in 16 und 18 §. 1 können, ohne Beeinträchtigung der Gültigkeit der dort aufgestellten Gesetze, sämmtlich um die Einheit erniedrigt werden. Dadurch erhält man folgende $b_0, b_1, b_2, b_3 \dots$ und die Werthe der nun so veränderten Elemente sind

$$\begin{aligned}
 1) \quad X &= a_1 + a_2 x + a_2 x^2 + a_4 x^3 + \dots \\
 b_0 &= a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots \\
 b_1 &= a_2 + 2 a_3 x + 3 a_4 x^2 + 4 a_5 x^3 + \dots \\
 b_2 &= \frac{2.1}{1.2} a_3 + \frac{3.2}{1.2} a_4 x + \frac{4.3}{1.2} a_5 x^2 + \frac{5.4}{1.2} a_6 x^3 + \dots \\
 b_3 &= \frac{3.2.1}{1.2.3} a_4 + \frac{4.3.2}{1.2.3} a_5 x + \frac{5.4.3}{1.2.3} a_6 x^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3} a_7 x^3 + \dots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Werden nun die Stellenzahlen der Elemente, woraus die Versetzungen mit Wiederholungen gebildet werden sollen, erniedrigt, so ändern sich die Gruppen nicht, sondern nur die Summen, welche die Stellenzahlen der Elemente hervorbringen. Letztere erniedrigen sich nämlich um so viele Einheiten als die Versetzungsclassen angibt. Hiernach gehen die Gleichungen 16 und 18 §. 1 in folgende über

$$\begin{aligned}
 2) \quad \frac{d^n fX}{(dX)^n} &= \frac{d^n X^q}{(dX)^n} = 1.2.3 \dots n P'(s n; b_0, b_1, b_2, b_3 + \dots)^q \\
 3) \quad \frac{d^n X^q}{(dX)^n} &= 1.2.3 \dots n [q b_0^{q-1} P'(s n; b_1, b_2, b_3 \dots)^1 \\
 &\quad + \frac{q(q-1)}{1.2} b_0^{q-2} P'(s n; b_1, b_2, b_3 \dots)^2 \\
 &\quad + \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3} b_0^{q-3} P'(s n; b_1, b_2, b_3 \dots)^3 \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + \frac{q(q-1) \dots (q-n+1)}{1.2 \dots n} b_0^{q-n} P'(s n; b_1, b_2, b_3 \dots)^n]
 \end{aligned}$$

mit der unter 1 angegebenen Bedeutung.

Bemerkt man nun, daß die Werthe der b als durch Differenziation hervorgebracht, angesehen werden können

$$\begin{aligned} 4) \quad b_0 &= a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots = X \\ b_1 &= a_2 + 2 a_3 x + 3 a_4 x^2 + 4 a_5 x^3 + \dots = \frac{dX}{dx} \\ b_2 &= \frac{2.1}{1.2} a_2 + \frac{3.2}{1.2} a_4 x + \frac{4.3}{1.2} a_5 x^2 + \dots = \frac{d^2 X}{1.2(dx)^2} \\ b_3 &= \frac{3.2.1}{1.2.3} a_4 + \frac{4.3.2}{1.2.3} a_5 x + \frac{5.4.3}{1.2.3} a_6 x^2 + \dots = \frac{d^3 X}{1.2.3(dx)^3} \end{aligned}$$

Werden nun diese Werthe in 2 und 3 eingeführt, so entsteht

$$\begin{aligned} 5) \quad \frac{d^n X^q}{(dx)^n} &= 1.2.3\dots n P'(sn; \frac{d^0 X}{(dx)^0}, \frac{dX}{dx}, \frac{d^2 X}{1.2(dx)^2}, \dots)^q \\ 6) \quad \frac{d^n X^q}{(dx)^n} &= 1.2.3\dots n \left(q X^{q-1} P'(sn; \frac{dX}{dx}, \frac{d^2 X}{1.2(dx)^2}, \frac{d^3 X}{1.2.3(dx)^3}, \dots)^1 \right. \\ &\quad (q)_2 X^{q-2} P'(sn; \frac{dX}{dx}, \frac{d^2 X}{1.2(dx)^2}, \frac{d^3 X}{1.2.3(dx)^3}, \dots)^2 \\ &\quad (q)_3 X^{q-3} P'(sn; \frac{dX}{dx}, \frac{d^2 X}{1.2(dx)^2}, \frac{d^3 X}{1.2.3(dx)^3}, \dots)^3 \\ &\quad \dots \\ &\quad \left. (q)_n X^{q-n} P'(sn; \frac{dX}{dx}, \frac{d^2 X}{1.2(dx)^2}, \frac{d^3 X}{1.2.3(dx)^3}, \dots)^n \right) \end{aligned}$$

Die Gleichung 6 läßt sich noch weiter verändern. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} 7) \quad q X^{q-1} &= \frac{dX^q}{dX} \\ (q)_2 X^{q-2} &= \frac{q(q-1)}{1.2} X^{q-2} = \frac{d^2 X^q}{1.2} \\ (q)_3 X^{q-3} &= \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3} X^{q-3} = \frac{d^3 X^q}{1.2.3} \\ &\dots \\ (q)_n X^{q-n} &= \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{1.2\dots n} X^{q-n} = \frac{d^n X^q}{1.2.3\dots n} \end{aligned}$$

wobei zu bemerken ist, daß die Differenziation nur in Rücksicht auf X^a , als Potenz einer veränderlichen Gröfse (hier X) nicht als eine Function von einer Function auszuführen ist. Hält man diese Bemerkung fest, so gewinnt man aus 6 folgende Darstellung

$$\begin{aligned}
 8) \frac{d^n X^a}{(dx)^n} &= 1.2.3 \dots n [dX^a P'(sn)^1 \\
 &\quad + \frac{d^2 X^a}{1.2} P'(sn)^2 \\
 &\quad + \frac{d^3 X^a}{1.2.3} P'(sn)^3 \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + \frac{d^n X^a}{1.2.3 \dots n} P'(sn)^n] \\
 &\left(\frac{dX}{(dx)}, \frac{d^2 X}{1.2 (dx)^2}, \frac{d^3 X}{1.2.3 (dx)^3}, \frac{d^4 X}{1.2.3.4 (dx)^4}, \dots \right)
 \end{aligned}$$

In dieser Darstellung sind die Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe n in den verschiedenen Classen so zu bilden, daß die unten angeschriebenen Differenzial-Quotienten

$$\frac{dX}{dx}, \frac{d^2 X}{1.2 (dx)^2}, \frac{d^3 X}{1.2.3 (dx)^3}, \frac{d^4 X}{1.2.3.4 (dx)^4}, \dots$$

die erzeugenden Elemente bilden, und daß hiebei die Exponenten der Differenziale die Stellenzahlen der Elemente vertreten, woraus die angegebenen Summen hervorgebracht werden.

Hiebei werden die Geschäfte, welche bei Entwicklung des n^{ten} Differenzial-Quotienten nöthig werden, in zwei Arten geschieden, nämlich in Differenziation der Function X^a , als einer für sich zu betrachtenden Gröfse, und in die Differenziation der Grundreihe

$$X = a_1 + a_2 + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots$$

als solcher.

Nun bemerkt man leicht, daß wenn X eine Function von x , wie hier bezeichnet, X^a die Function von dieser Function ist. Da

nun in der Gleichung 8 die auszuführenden Geschäfte des Differenzirens auf die Function von der Function einerseits und auf die Function einer veränderlichen andererseits bezogen und dadurch in zwei Abtheilungen geschieden werden, so wird man leicht zu der Bemerkung geführt, daß die Trennung dieser Geschäfte überhaupt gelte, und daher auf jede beliebige Function von einer Function bezogen werden könne.

Bezeichnet daher y überhaupt eine Function von x und ϕy die Function einer Function im Allgemeinen, so erhält man nach der Analogie von 8 folgende Gleichung

$$9) \frac{d^n \phi y}{(dx)^n} = 1.2.3 \dots n \left(d\phi y P'(sn; \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{1.2(dx)^2}, \frac{d^3 y}{1.2.3(dx)^3}, \dots)^1 \right. \\ \frac{d^2 \phi y}{1.2} P'(sn; \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{1.2(dx)^2}, \frac{d^3 y}{1.2.3(dx)^3}, \dots)^2 \\ \frac{d^3 \phi y}{1.2.3} P'(sn; \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{1.2(dx)^2}, \frac{d^3 y}{1.2.3(dx)^3}, \dots)^3 \\ \dots \\ \left. \frac{d^n \phi y}{1.2.3 \dots n} P'(sn; \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{1.2(dx)^2}, \frac{d^3 y}{1.2.3(dx)^3}, \dots)^n \right)$$

Hierin bedeutet $d^r \phi y$ den r^{ten} Differenzialcoefficienten von ϕy als einer Function für sich, also in Beziehung auf y , den man auch so bezeichnen kann $\frac{d^r \phi y}{(dy)^r}$; $\frac{d^r y}{(dx)^r}$ aber bedeutet den r^{ten} Differenzial-Quotienten von y , als einer Function von x .

Die vorstehende Gleichung 9 wurde von Pfaff in der zweiten Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen v. C. Fr. Hindenburg, Nro. V Pag. 160, unter etwas veränderter Form aufgestellt.

§. 4.

Ogleich die in 9 §. 3 aufgestellte Gleichung ganz richtig ist, so beruht doch ihre Richtigkeit nur auf der Basis der Analogie. Man kann daher mit Recht eine schärfere Begründung für die Rich-

tigkeit dieser Darstellung verlangen. Diese Begründung soll auf folgende Weise gegeben werden.

Wir behalten zu dem Ende die in 9 §. 3 angenommene allgemeinere Bezeichnungsweise bei, verstehen unter y eine Function von x , und unter ϕy eine Function dieser Function, und lösen die Aufgabe dadurch, daß wir das erste Differenzial bestimmen, vom ersten auf das zweite übergehen, vom zweiten zum dritten u. s. w., wodurch sich dann das allgemeine Uebergangsgesetz ergeben wird. Hiebei deuten wir das Differenzial in Beziehung auf y durch $d\phi y$, das Differenzial in Beziehung auf x aber durch dy an.

Es ist bekanntlich

$$1) \frac{d(\phi y)}{dx} = d\phi y \cdot dy$$

Das zweite Differenzial wird nun durch Differenziren des ersten Differenzials erhalten. Hiernach ist

$$d\left(\frac{d\phi y}{dx}\right) = d(d\phi y \cdot dy)$$

Bezieht man das Differenziren zuerst auf $d\phi y$ und dann auf dy , so entsteht aus 1

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi y}{(dx)^2} &= d(d\phi y) dy + d\phi y d(dy) \\ &= d^2\phi y dy \cdot dy + d\phi y d^2y \end{aligned}$$

oder

$$2) \frac{d^2\phi y}{(dx)^2} = d^2\phi y (dy)^2 + d\phi y d^2y$$

Wird die Gleichung 2 differenzirt, so entsteht der dritte Differenzial-Quotient und es ist

$$d\left(\frac{d^2\phi y}{(dx)^2}\right) = d(d^2\phi y \cdot [dy]^2) + d(d\phi y d^2y)$$

Durch Ausführung der auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens angedeuteten Geschäfte ergibt sich, da jedes Glied zu zwei weitem führt, und $d(dy)^2 = 2 dy d^2y$ ist.

$$3) \frac{d^3 \varphi y}{(dx)^3} = d^3 \varphi y \, dy \cdot (dy)^2 + d^2 \varphi y \, 2 \, dy \cdot d^2 y \\ + d^2 \varphi y \, dy \cdot d^2 y + d \varphi y \cdot d^3 y \\ = d^3 \varphi y \, (dy)^3 + 3 d^2 \varphi y \, dy \, d^2 y + d \varphi y \, d^3 y$$

Wird die Darstellung 3 wiederholt differenziert, so führt das erste Glied auf zwei, das zweite auf drei, das dritte auf drei neue Ausdrücke, und man erhält folgende ausführliche Darstellung

$$\frac{d^4 \varphi y}{(dx)^4} = d^4 \varphi y \, dy \cdot (dy)^3 + d^3 \varphi y \cdot 3 (dy)^2 \, d^2 y \\ + 3 d^3 \varphi y \, dy \cdot dy \cdot d^2 y + 3 d^2 \varphi y \, d^2 y \cdot d^2 y \\ + 3 d^2 \varphi y \, dy \cdot d^3 y \\ + d^2 \varphi y \, dy \cdot d^3 y + d \varphi y \, d^4 y$$

oder

$$4) \frac{d^4 \varphi y}{(dx)^4} = d^4 \varphi y \, (dy)^4 + 6 d^3 \varphi y \, (dy)^2 \, d^2 y + 3 d^2 \varphi y \, d^2 y \, d^2 y + d \varphi y \, d^4 y \\ + 4 d^2 \varphi y \, dy \, d^3 y$$

Wird nun auch 4 differenziert und werden die Glieder von 4 nach dem Differenzieren geordnet, so entsteht

$$5) \frac{d^5 \varphi y}{(dx)^5} = d^5 \varphi y \, (dy)^5 + 10 d^4 \varphi y \, d^2 y \, (dy)^3 + 15 d^3 \varphi y \, dy \, d^2 y \, d^2 y \\ + 10 d^3 \varphi y \, (dy)^2 \, d^3 y \\ + 10 d^2 \varphi y \, d^2 y \, dy + d \varphi y \, d^5 y \\ + 5 d^2 \varphi y \, dy \, d^4 y$$

Ebenso gewinnt man für das sechste Differenzial folgende Darstellung

$$6) \frac{d^6 \varphi y}{(dx)^5} = \\ d^6 \varphi y \, (dy)^6 + 15 d^5 \varphi y \, (dy)^4 \, d^2 y + 45 d^4 \varphi y \, (dy)^2 \, d^2 y \, d^2 y + 15 d^3 \varphi y \, (dy)^2 \, d^4 y + 10 d^2 \varphi y \, d^2 y \, d^4 y \\ + 20 d^4 \varphi y \, (dy)^3 \, d^3 y + 60 d^3 \varphi y \, dy \, d^2 y \, d^3 y + 6 d^2 \varphi y \, d^2 y \, d^4 y \\ + 15 d^3 \varphi y \, d^2 y \, d^2 y \, d^2 y + 15 d^2 \varphi y \, d^2 y \, d^4 y \\ + d \varphi y \, d^6 y$$

Aus diesen Darstellungen kann man das allgemeine Bildungsgesetz erkennen.

Die Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens sind geordnet nach den fallenden Differenzialen der Function von der

Function als solcher, also in Beziehung auf y . Mit diesen fallenden Differenzialen treten in Verbindung die Differenziale der Grundgröfse y als solcher, also in Beziehung auf x . Die Gesetze, wornach dieses Zusammentreten erfolgt, werden durch die Verbindungen mit Wiederholungen zu den verschiedenen Classen und bestimmten Summen ausgedrückt, wenn man die Exponenten der Differenziale der Grundgröfse (d^1y , d^2y , d^3y , d^4y , ...) als die Stellenzahlen der Elemente betrachtet, woraus die Verbindungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen gebildet werden sollen.

Um das Gesagte zu verdeutlichen, knüpfen wir dasselbe an einen bestimmten Fall, die Darstellung 6, an, und durchlaufen die Reihe der sechs Glieder-Gruppen, woraus der sechste Differenzial-Quotient von ϕy zusammengesetzt ist.

Das erste Glied besteht aus dem sechsten Differenzial von ϕy (für sich betrachtet), und aus dem Differenzial der Grundgröfse (dy) so oft mal als die Gruppenanzahl der Verbindungen mit Wiederholungen zur Summe 6 in der sechsten Classe angibt, wenn dy , d^2y , d^3y , ... als Elemente gewonnen werden, woraus die Gruppen zu bilden sind, und die Exponenten als Stellenzahlen betrachtet werden. Nun ist nach §. 16 meiner Combinations - Lehre

$$C'(s6; a_1, a_2, a_3 \dots)^6 = a_1 a_1 a_1 a_1 a_1 a_1 = (a_1)^6$$

also ist

$$d^6\phi y (dy)^6 = d^6\phi y C'(s6; d^1y, d^2y, d^3y \dots) = d^6\phi y dy dy dy dy dy dy$$

Das zweite Glied besteht aus dem fünften Differenzial von ϕy , das mit so viel verschiedenen Gruppen zusammentritt, als Verbindungen mit Wiederholungen zur Summe 6 in der fünften Classe aus den Elementen dy , d^2y , d^3y , ... gebildet werden können, wenn die Exponenten als Stellenzahlen betrachtet werden. Nun ist

$$C'(s6; a_1, a_2, a_3 \dots)^5 = a_1 a_1 a_1 a_1 a_2 = (a_1)^4 a_2$$

also erhält man

$$d^5\phi y (dy)^4 d^2y = d^5\phi y dy dy dy dy d^2y = d^5\phi y C'(s6; dy, d^2y, d^3y \dots)^5$$

Das dritte Glied besteht aus dem vierten Differenzial von ϕy , das mit so viel verschiedenen Gruppen zusammentritt, als Verbin-

dungen mit Wiederholungen zur Summe 6 in der vierten Classe aus den Elementen dy, d^2y, d^3y, \dots gebildet werden können, wenn die Exponenten als Stellenzahlen betrachtet werden. Nun ist

$$C'(s6; a_1, a_2, a_3 \dots)^4 = a_1 a_1 a_1 a_3 = (a_1)^3 a_3$$

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \quad (a_1)^2 a_2 a_2$$

also erhält man folgende Gruppen

$$d^4qy (dy)^4 d^3y = d^4qy dy dy dy d^3y = d^3qy C'(s6; d^1y, d^2y, d^3y \dots)^4$$

$$d^4qy (dy)^2 d^2y d^2y \quad d^4qy dy dy d^2y d^2y$$

Das vierte Glied besteht aus dem dritten Differenzial von ϕ_y , das mit so viel verschiedenen Gruppen zusammentritt, als Verbindungen mit Wiederholungen zur Summe 6 in der dritten Classe aus den Elementen d^1y, d^2y, d^3y, \dots gebildet werden können, wenn die Exponenten als Stellenzahlen betrachtet werden. Nun ist

$$C'(s6; a_1, a_2, a_3, \dots)^3 = a_1 a_1 a_4 = (a_1)^2 a_4$$

$$a_1 a_2 a_3 \quad a_1 a_2 a_3$$

$$a_2 a_2 a_2 \quad a_2 a_2 a_4$$

Man erhält daher folgende Gruppen

$$d^3qy (dy)^2 d^4y = d^3qy dy dy d^4y = d^3qy C'(s6; d^1y, d^2y, d^3y, \dots)^3$$

$$d^3qy dy d^2y d^3y \quad d^3qy dy d^2y d^3y$$

$$d^3qy d^2y d^2y d^2y \quad d^3qy d^2y d^2y d^2y$$

Das fünfte Glied besteht aus dem zweiten Differenzial von ϕ_y , das mit so viel verschiedenen Gruppen zusammentritt, als Verbindungen mit Wiederholungen zur Summe 6 in der zweiten Classe aus den Elementen d^1y, d^2y, d^3y, \dots gebildet werden können. Man erhält daher

$$d^2qy dy d^5y = d^2qy C'(s6; d^1y, d^2y, d^3y, \dots)^2$$

$$d^2qy d^2y d^4y$$

$$d^2qy d^3y d^3y$$

Das sechste Glied besteht aus dem ersten Differenzial von ϕ_y , das mit so viel verschiedenen Gruppen zusammentritt, als Verbindungen mit Wiederholungen zur Summe 6 in der ersten Classe aus

den Elementen d^1y , d^2y , d^3y , . . . gebildet werden können. Man erhält daher

$$d^6y \, d^6y = d^6y \, C'(s_6; d^1y, d^2y, d^3y \dots)$$

Setzt man nun die Entwicklungen 1—6 weiter fort, so erkennt man leicht, daß die eben gemachten Bemerkungen für jeden besondern Fall gelten und daher allgemein sind.

Mit jedem einzelnen Gliede in der entwickelten Darstellung ist eine Vorzahl verbunden, deren Bildung die Aufmerksamkeit fesselt, da auf ihrer Darstellung die ganze Ableitungsweise beruht. Beobachtet man diese Zahlen genau, so bemerkt man, daß sie sich durch Bruchfakultäten darstellen lassen, und zwar durch Fakultäten von so viel Dimensionen, als die Summe angibt, wozu die Verbindungen gebildet werden sollen. Die Zahl jeder Fakultät besteht aus der so vielen, um die Einheit steigenden Fakultät von 1 als die Summe angibt, wozu die Verbindungen gebildet werden sollen, oder als der Exponent des Differenzial-Quotienten, um dessen Bestimmung es sich handelt, ausweist. Der Nenner besteht aus so vielen, um die Einheit steigenden Fakultäten von 1 als die Exponenten der Differenziale d^ny oder $(dy)^n$ angeben. Sie wiederholen sich so oft, als sich diese Exponenten wiederholen. Kommt der nämliche Exponent mehreremal vor, so tritt im Nenner noch eine steigende Fakultät von 1 in der so vielen Dimension zu, als der Exponent wiederholt erscheint. Kommen verschiedene Exponenten mehreremal wiederholt vor, so wiederholt sich auch die eben bezeichnete Fakultät.

Hiernach erhalten wir für die einzelnen Glieder in der entwickelten Darstellung von 6 der Reihe nach folgende Ausdrücke

$$1. d^6y \, (dy)^6 = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6} d^6y \, (dy)^6 = \frac{6^{6|-1}}{1^{6,1}} d^6y \, C'(s_6; dy, d^2y, \dots)^6$$

für das zweite Glied

$$15. d^5y \, (dy)^4 d^2y = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.1.2} d^5y \, (dy)^4 d^2y = \frac{6^{6|-1}}{1^{4,1}1^{2,1}} C'(s_6; dy, d^2y, \dots)^5$$

für das dritte Glied

$$45 \cdot d^4 q y \, dy \, dy \, d^2 y \, d^2 y = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} d^4 q y \, (dy)^2 \, d^2 y \, d^2 y$$

$$20 \cdot d^4 q y \, dy \, dy \, dy \, d^3 y = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} d^4 q y \, (dy)^3 \, d^3 y$$

für das vierte Glied

$$15 \, d^3 q y \, dy \, dy \, d^4 y = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^3 q y \, (dy)^2 \, d^6 y$$

$$60 \, d^3 q y \, dy \, d^2 y \, d^3 y = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} d^3 q y \, dy \, d^2 y \, d^3 y$$

$$15 \, d^3 q y \, d^2 y \, d^2 y \, d^2 y = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} d^3 q y \, d^2 y \, d^2 y \, d^2 y$$

für das fünfte Glied

$$10 \cdot d^2 q y \, d^3 y \, d^3 y = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} d^2 q y \, d^3 y \, d^3 y$$

$$15 \cdot d^2 q y \, d^2 y \, d^4 y = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^2 q y \, d^2 y \, d^4 y$$

$$6 \cdot d^2 q y \, dy \, d^5 y = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} d^2 q y \, dy \, d^5 y$$

für das sechste Glied

$$1 \cdot d q y \, d^6 y = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} d q y \, d^6 y$$

Dehnt man nun diese Betrachtungsweise auf die in 1—6 aufgestellten besondern Fälle, und noch auf später folgende aus, so bestätigt sich die Richtigkeit der Behauptung, und man bemerkt leicht, daß die hier aufgestellten Gesetze allgemein gültig sind.

Die so eben gewonnenen Ausdrücke lassen sich nun auch auf solche zurückführen, welche die Ausführung der nöthigen Geschäfte sehr erleichtern, wenn man die Fakultäten, welche durch die Exponenten der Differenziale ($d^2 y$, $d^3 y$, $d^4 y$, ...) hervorgebracht werden, unter diese schreibt. Dadurch gewinnt man folgende Darstellung für 6

$$\begin{aligned}
 7) \frac{d^6 q_Y}{(dx)^6} = & \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 6 \cdot 1} d^6 q_Y (dy)^6 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^5 q_Y (dy)^4 \frac{d^2 y}{1 \cdot 2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} d^4 q_Y (dy)^2 \frac{d^2 y}{1 \cdot 2} \frac{d^2 y}{1 \cdot 2} \\
 & + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^4 q_Y (dy)^3 \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\
 & + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2} d^3 q_Y (dy)^2 \frac{d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2} d^2 q_Y \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\
 & + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3 q_Y dy \frac{d^2 y}{1 \cdot 2} \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2} d^2 q_Y \frac{d^2 y}{1 \cdot 2} \frac{d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\
 & + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3 q_Y \frac{d^2 y}{1 \cdot 2} \frac{d^2 y}{1 \cdot 2} \frac{d^2 y}{1 \cdot 2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} d^2 q_Y dy \frac{d^5 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \\
 & + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} d q_Y \frac{d^6 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}
 \end{aligned}$$

Diese Darstellung läßt sich nun, wenn man die Fakultäten, welche durch wiederholtes Vorkommen der mit gleichen Exponenten bezeichneten Differenzialen der Grundfunction (y) bedingt werden, durch einen rechts an die Verbindungs-Klammer gesetzten Strich bezeichnet, auf folgende Weise geben

$$\begin{aligned}
 8) \frac{d^6 q_Y}{(dx)^6} = & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \left(d^6 q_Y C'(s_6; dy, \frac{d^2 y}{1 \cdot 2}, \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots),^6 + d^5 q_Y C'(s_6; dy, \frac{d^2 y}{1 \cdot 2}, \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots),^5 \right. \\
 & + d^4 q_Y C'(s_6; dy, \frac{d^2 y}{1 \cdot 2}, \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots),^4 + d^3 q_Y C'(s_6; dy, \frac{d^2 y}{1 \cdot 2}, \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots),^3 \\
 & \left. + d^2 q_Y C'(s_6; dy, \frac{d^2 y}{1 \cdot 2}, \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots),^2 + d q_Y C'(s_6; dy, \frac{d^2 y}{1 \cdot 2}, \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots),^1 \right)
 \end{aligned}$$

oder einfacher so

$$\begin{aligned}
 9) \frac{d^6 q_Y}{(dx)^6} = & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 [d^6 q_Y C'(s_6),^6 + d^5 q_Y C'(s_6),^5 + d^4 q_Y C'(s_6),^4 \\
 & + d^3 q_Y C'(s_6),^3 + d^2 q_Y C'(s_6),^2 + d q_Y C'(s_6),^1] \\
 & (dy, \frac{d^2 y}{1 \cdot 2}, \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \dots)
 \end{aligned}$$

Die eben gewonnenen Darstellungen lassen sich jedoch auch noch dadurch weiter umformen, daß man die Verbindungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen, auf die Versetzungen mit

Wiederholungen zu bestimmten Summen zurückführt. Diefs geschieht, wenn man die Versetzungszahlen, welche durch diese Uebertragung eingeführt werden, ausscheidet, also durch dieselben theilt. Dadurch entsteht der Vertheil, dafs die Division der Fakultäten, welche durch wiederholtes Vorkommen der Differenziale mit gleichen Exponenten erzeugt werden, nicht besonders angedeutet werden darf, weil die wiederholt vorkommenden Elemente mit gleichen Stellenzahlen (was hier die Exponenten sind), dieses Gesetz schon in sich schliessen. Dieser Bemerkung zufolge läfst sich 8 auch so darstellen

$$\begin{aligned}
 10) \frac{d^6 \varphi Y}{(dx)^6} = & \\
 1^{6 \cdot 1} \left(\frac{d^6 \varphi Y}{1^{6 \cdot 1}} P' (s6; dy, \frac{d^2 Y}{1.2}, \frac{d^3 Y}{1.2.3}, \dots)^6 + \frac{d^5 \varphi X}{1^{5 \cdot 1}} P' (s6; dy, \frac{d^2 Y}{1.2}, \frac{d^3 Y}{1.2.3}, \dots)^5 \right. \\
 & + \frac{d^4 \varphi Y}{1^{4 \cdot 1}} P' (s6; dy, \frac{d^2 Y}{1.2}, \frac{d^3 Y}{1.2.3}, \dots)^4 + \frac{d^3 \varphi Y}{1^{3 \cdot 1}} P' (s6; dy, \frac{d^2 Y}{1.2}, \frac{d^3 Y}{1.2.3}, \dots)^3 \\
 & \left. + \frac{d^2 \varphi Y}{1^{2 \cdot 1}} P' (s6; dy, \frac{d^2 Y}{1.2}, \frac{d^3 Y}{1.2.3}, \dots)^2 + d\varphi Y P' (s6; dy, \frac{d^4 Y}{1.2}, \frac{d^3 Y}{1.2.3}, \dots)^1 \right)
 \end{aligned}$$

Nachdem nun die Darstellungsweise des oben erörterten Gesetzes bestimmt ist, so läfst sich dasselbe in allgemeinen Zeichen nach 8 und 10 so ausdrücken

$$\begin{aligned}
 11) \frac{d^n \varphi Y}{(dx)^n} = 1.2.3 \dots n \left(d^n \varphi Y C' (sn; dy, \frac{d^2 Y}{1.2}, \frac{d^3 Y}{1.2.3}, \dots),^n \right. \\
 + d^{n-1} \varphi Y C' (sn; dy, \frac{d^2 Y}{1.2}, \frac{d^3 Y}{1.2.3}, \dots),^{n-1} \\
 + d^{n-2} \varphi Y C' (sn; dy, \frac{d^2 Y}{1.2}, \frac{d^3 Y}{1.2.3}, \dots),^{n-2} \\
 \vdots \\
 + d^2 \varphi Y C' (sn; dy, \frac{d^2 Y}{1.2}, \frac{d^3 Y}{1.2.3}, \dots),^2 \\
 \left. + d\varphi Y C' (sn; dy, \frac{d^2 Y}{1.1}, \frac{d^3 Y}{1.2.3}, \dots),^1 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12) \quad \frac{d^n q y}{(dx)^n} = 1.2.3\dots n & \left(\frac{d^n q y}{1.2\dots n} P'(sn; dy, \frac{d^2 y}{1.2}, \frac{d^3 y}{1.2.3}, \dots)^n \right. \\
 & \frac{d^{n-1} q y}{1.2\dots(n-1)} P'(sn; dy, \frac{d^2 y}{1.2}, \frac{d^3 y}{1.2.3}, \dots)^{n-1} \\
 & \frac{d^{n-2}}{1.2.3\dots(n-2)} P'(sn; dy, \frac{d^2 y}{1.2}, \frac{d^3 y}{1.2.3}, \dots)^{n-2} \\
 & \vdots \\
 & \frac{d^2 q y}{1.2} P'(sn; dy, \frac{d^2 y}{1.2}, \frac{d^3 y}{1.2.3}, \dots)^2 \\
 & \left. d q y P'(sn; dy, \frac{d^2 y}{1.2}, \frac{d^3 y}{1.2.3}, \dots)^1 \right)
 \end{aligned}$$

Aus der Vergleichung der Gleichung 9 §. 3 mit der vorstehenden geht deutlich hervor, daß beide zusammenfallen, da die einzelnen Glieder in beiden Darstellungen nur hinsichtlich der Anordnung von einander verschieden sind.

§. 5.

Die in 11 und 12 §. 4 mitgetheilten Gleichungen lassen noch zweckmäßigere Darstellungen zu, wenn man das erste Differenzial der Grundfunction oder das Element dy aus den Ausdrücken, welche die Verbindungen oder Versetzungen zu bestimmten Summen bezeichnen, ausscheidet.

Hiedurch wird zugleich die Ausscheidung von Fakultäten nöthig, welche angeben, wie oft die so erzeugten Gruppen vorkommen. Es ändern sich durch diese Ausscheidungen die Summen, wozu die Verbindungen oder Versetzungen gebildet werden sollen. Die Gebilde, in welche sich die Ausdrücke der Darstellung 11 §. 4 zerlegen, lassen sich am bequemsten dadurch übersehen, daß wir die Gruppen, welche durch die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
 & C'(sn),^n, C'(sn),^{n-1}, C'(sn),^{n-2}, \dots \\
 & \left(dy, \frac{d^2 y}{1.2}, \frac{d^3 y}{1.2.3}, \frac{d^4 y}{1.2.3.4}, \dots \right)
 \end{aligned}$$

in 11 §. 4 angedeutet sind, auf die gewöhnliche Weise durch die Elemente $a_1 = dy$, $a_2 = \frac{d^2y}{1 \cdot 2}$, $a_3 = \frac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, ... darstellen, ohne hiebei die Fakultäten zu berücksichtigen, welche als Vorzahlen und Divisoren (wegen der wiederholt vorkommenden Differenziale mit gleichen Exponenten) mit ihnen in Verbindung zu treten haben. Es ist so-
dann

$$\begin{aligned}
 1) \quad C'(sn; a_1, a_2, a_3 \dots)^n &= a_1^n \\
 C'(sn; a_1, a_2, a_3 \dots)^{n-1} &= a_1^{n-2} a_2 \\
 C'(sn; a_1, a_2, a_3 \dots)^{n-2} &= a_1^{n-3} a_3 \\
 &\quad a_1^{n-4} a_2 a_2 \\
 C'(sn; a_1, a_2, a_3 \dots)^{n-3} &= a_1^{n-4} a_4 \\
 &\quad a_1^{n-5} a_2 a_3 \\
 &\quad a_1^{n-6} a_2 a_2 a_2 \\
 C'(sn; a_1, a_2, a_3 \dots)^{n-4} &= a_1^{n-5} a_5 \\
 &\quad a_1^{n-6} \left| \begin{array}{l} a_2 a_4 \\ a_3 a_3 \end{array} \right. \\
 &\quad a_1^{n-7} a_2 a_2 a_3 \\
 &\quad a_1^{n-8} a_2 a_2 a_2 a_2
 \end{aligned}$$

u. s. w. Durch die Darstellung 1 werden die Gruppen der Verbindungen zur Summe n in den verschiedenen Classen auf niederere Summen zurückgebracht, deren Bildungsgesetz sich leicht erkennen läßt. Man erhält sofort, wenn die oben besprochenen Fakultäten in den Calcul aufgenommen werden, folgende Darstellung für den n^{ten} Differenzial-Quotienten einer Function von einer Function

$$\begin{aligned}
 2) \quad \frac{d^n \varphi y}{(dx)^n} &= d^n \varphi y (dy)^n + n^{2|-1} d^{n-1} \varphi y (dy)^{n-2} C'(s2),^1 \\
 &\quad + n^{3|-1} d^{n-2} \varphi y (dy)^{n-3} C'(s3),^1 \\
 &\quad + n^{4|-1} d^{n-3} \varphi y (dy)^{n-4} C'(s4),^2 \\
 &\quad + n^{4|-1} d^{n-3} \varphi y (dy)^{n-4} C'(s4),^1 \\
 &\quad + n^{5|-1} d^{n-3} \varphi y (dy)^{n-5} C'(s5),^2 \\
 &\quad + n^{6|-1} d^{n-3} \varphi y (dy)^{n-6} C'(s6),^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ n^{5|-1} d^{n-4} \varphi y (dy)^{n-5} C'(s5),^1 \\
 &+ n^{6|-1} d^{n-4} \varphi y (dy)^{n-6} C'(s6),^2 \\
 &+ n^{7|-1} d^{n-4} \varphi y (dy)^{n-7} C'(s7),^3 \\
 &+ n^{8|-1} d^{n-4} \varphi y (dy)^{n-8} C'(s8),^4 \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \left(\frac{d^2 y}{1.2}, \frac{d^3 y}{1.2.3}, \frac{d^4 y}{1.2.3.4}, \frac{d^5 y}{1.2.3.4.5}, \dots \right)
 \end{aligned}$$

Diese Darstellung ist nach den fallenden Differenzialen von φy als Function von y geordnet. Die Ausdrücke, welche einem und demselben Differenzial-Exponenten zugehören, unterliegen, wie man leicht erkennt, einem bestimmten Gesetze. Das Gesetz, welches für das $(r+1)^{te}$ Glied gilt, stellt sich auf folgende Weise dar

$$\begin{aligned}
 3) \quad &n^{r+1|-1} d^{n-r} \varphi y (dy)^{n-r-1} C' s(r+1),^1 \\
 &n^{r+2|-1} d^{n-r} \varphi y (dy)^{n-r-2} C' s(r+2),^2 \\
 &n^{r+3|-1} d^{n-r} \varphi y (dy)^{n-r-3} C' s(r+3),^3 \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \vdots \\
 &n^{2r|-1} d^{n-r} \varphi y (dy)^{n-2r} C' s(2r),^r \\
 &\quad \left(\frac{d^2 y}{1.2}, \frac{d^3 y}{1.2.3}, \frac{d^4 y}{1.2.3.4}, \frac{d^5 y}{1.2.3.4.5}, \dots \right)
 \end{aligned}$$

Die nämliche Ausscheidung kann man an den Ausdrücken in der Darstellung 12 §. 4 vornehmen. Dadurch und in Rücksicht auf 1 geht diese Darstellung in folgende über

$$\begin{aligned}
 4) \quad \frac{d^n \varphi y}{(dx)^n} &= d^n \varphi y (dy)^n + n^{2|-1} d^{n-1} \varphi y (dy)^{n-2} P'(s2)^1 \\
 &+ n^{3|-1} d^{n-2} \varphi y (dy)^{n-3} P'(s3)^1 \\
 &+ \frac{n^{4|-1}}{1.2} d^{n-3} \varphi y (dy)^{n-4} P'(s4)^2 \\
 &+ n^{4|-1} d^{n-3} \varphi y (dy)^{n-4} P'(s4)^1 \\
 &+ \frac{n^{5|-1}}{1.2} d^{n-3} \varphi y (dy)^{n-5} P'(s5)^2 \\
 &+ \frac{n^{6|-1}}{1.2.3} d^{n-3} \varphi y (dy)^{n-6} P'(s6)^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{n^{5|-1}}{1 \cdot 2} d^{n-4} \varphi y (dy)^{n-5} P' (s5)^1 \\
 &+ \frac{n^{6|-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^{n-4} \varphi y (dy)^{n-6} P' (s6)^2 \\
 &+ \frac{n^{7|-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^{n-4} \varphi y (dy)^{n-7} P' (s7)^3 \\
 &+ \frac{n^{8|-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} d^{n-4} \varphi y (dy)^{n-8} P' (s8)^4
 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d^2 y}{1 \cdot 2}, \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \frac{d^5 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \dots \right)$$

Das allgemeine, $(r+1)^{te}$, Glied dieser Darstellung ist folgendes

$$5) \frac{n^{r+1|-1}}{1 \cdot 2} d^{n-r} \varphi y (dy)^{n-r-1} P' s(r+1)^1$$

$$\frac{n^{r+2|-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^{n-r} \varphi y (dy)^{n-r-2} P' s(r+2)^2$$

$$\frac{n^{r+3|-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^{n-r} \varphi y (dy)^{n-r-3} P' s(r+3)^3$$

$$\begin{aligned}
 &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 &\cdot \quad \cdot \quad \cdot
 \end{aligned}$$

$$\frac{n^{2r|-1}}{1 \cdot r \cdot 1} d^{n-r} \varphi y (dy)^{n-2r} P' s(2r)^r$$

$$\left(\frac{d^2 y}{1 \cdot 2}, \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \dots \right)$$

Die Darstellungen 2 und 4 sind nach den Differenzial-Exponenten von φy geordnet. Man kann sie jedoch auch anders und nach den Classen ordnen, zu welchen die Verbindungen oder Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen gebildet werden sollen. Geschieht dies, so leiten sich aus 2 und 4 folgende Darstellungen ab

6) $\frac{d^ny}{(dx)^n} =$

$$\begin{aligned} & d^n qy (dy)^n + n^{2-1} d^{n-1} qy (dy)^{n-2} C'(s2),^1 + n^{4|-1} d^{n-2} qy (dy)^{n-3} C'(s4),^2 + n^{6|-1} d^{n-3} qy (dy)^{n-4} C'(s6),^3 + \dots \\ & + n^{3|-1} d^{n-2} qy (dy)^{n-2} C'(s3),^1 + n^{5|-1} d^{n-3} qy (dy)^{n-3} C'(s5),^2 + n^{7|-1} d^{n-4} qy (dy)^{n-4} C'(s7),^3 + \dots \\ & + n^{4|-1} d^{n-3} qy (dy)^{n-3} C'(s4),^1 + n^{6|-1} d^{n-4} qy (dy)^{n-4} C'(s6),^2 + n^{8|-1} d^{n-5} qy (dy)^{n-5} C'(s8),^3 + \dots \\ & + n^{5|-1} d^{n-4} qy (dy)^{n-4} C'(s5),^1 + n^{7|-1} d^{n-5} qy (dy)^{n-5} C'(s7),^2 + n^{9|-1} d^{n-6} qy (dy)^{n-6} C'(s9),^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d^2y}{1.2}, \frac{d^3y}{1.2.3}, \frac{d^4y}{1.2.3.4}, \frac{d^5y}{1.2.3.4.5}, \frac{d^6y}{1.2.3.4.5.6}, \dots \right)$$

$$7) \frac{d^n \varphi y}{(dx)^n} =$$

$$d^n q_Y (dy)^n + n^{2l-1} d^{n-1} q_Y (dy)^{n-2} P' (s_2)^1 + \frac{n^{4l-1}}{1.2} d^{n-2} q_Y (dy)^{n-4} P' (s_4)^2 + \frac{n^{6l-1}}{1.2.3} d^{n-3} q_Y (dy)^{n-6} P' (s_6)^3 + \dots$$
$$+ n^{3l-1} d^{n-2} q_Y (dy)^{n-3} P' (s_3)^1 + \frac{n^{5l-1}}{1.2} d^{n-3} q_Y (dy)^{n-5} P' (s_5)^2 + \frac{n^{7l-1}}{1.2.3} d^{n-4} q_Y (dy)^{n-7} P' (s_7)^3 + \dots$$
$$+ n^{4l-1} d^{n-3} q_Y (dy)^{n-4} P' (s_4)^1 + \frac{n^{6l-1}}{1.2} d^{n-4} q_Y (dy)^{n-6} P' (s_6)^2 + \frac{n^{8l-1}}{1.2.3} d^{n-5} q_Y (dy)^{n-8} P' (s_8)^3 + \dots$$
$$+ n^{5l-1} d^{n-4} q_Y (dy)^{n-5} P' (s_5)^1 + \frac{n^{7l-1}}{1.2} d^{n-5} q_Y (dy)^{n-7} P' (s_7)^2 + \frac{n^{9l-1}}{1.2.3} d^{n-6} q_Y (dy)^{n-9} P' (s_9)^3 + \dots$$
$$\left(\frac{d^2 y}{1.2}, \frac{d^3 y}{1.2.3}, \frac{d^4 y}{1.2.3.4}, \frac{d^5 y}{1.2.3.4.5}, \frac{d^6 y}{1.2.3.4.5.6}, \dots \right)$$

$$\left(\frac{d^2y}{1.2}, \frac{d^3y}{1.2, 3}, \frac{d^4y}{1.2, 3, 4}, \frac{d^5y}{1.2, 3, 4, 5}, \frac{d^6y}{1.2, 3, 4, 5, 6}, \dots \right)$$

§. 6.

Die in dem vorigen §. aufgefundenen Gesetze eignen sich für die Anwendung sehr gut. Diefs zeigt sich besonders dann, wenn die höhern Differenziale von y so beschaffen sind, daß sie von einem bestimmten Grade an in 0 übergehen.

Ist $\frac{d^3y}{1.2.3} = 0$, $\frac{d^4y}{1.2.3.4} = 0$ u. s. w. so ergibt sich aus 6 oder 7 §. 5

$$\begin{aligned}
 1) \frac{d^n qy}{(dx)^n} &= d^n qy (dy)^n + n(n-1) d^{n-1} qy (dy)^{n-2} \frac{d^2y}{1.2} \\
 &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2} d^{n-3} qy (dy)^{n-6} \frac{d^2y}{1.2} \cdot \frac{d^2y}{1.2} \\
 &+ \frac{n(n-1) \dots (n-5)}{1.2.3} d^{n-5} qy (dy)^{n-10} \frac{d^2y}{1.2} \cdot \frac{d^2y}{1.2} \cdot \frac{d^2y}{1.2} \\
 &+ \frac{n(n-1) \dots (n-7)}{1.2.3.4} d^{n-7} qy (dy)^{n-14} \frac{d^2y}{1.2} \cdot \frac{d^2y}{1.2} \cdot \frac{d^2y}{1.2} \cdot \frac{d^2y}{1.2} \\
 &\vdots \\
 &\frac{n^{2r|-1}}{1^{r|1}} d^{n-2r} qy (dy)^{n-4r} \left(\frac{d^2y}{1.2} \right)^r
 \end{aligned}$$

Ist $\frac{d^4y}{1.2.3.4} = 0$, $\frac{d^5y}{1.2.3.4.5} = 0$ u. s. w., so entsteht

$$\begin{aligned}
 2) \frac{d^n qy}{(dx)^n} &= d^n qy (dy)^n + n^{2|-1} d^{n-1} qy (dy)^{n-2} \frac{d^2y}{1.2} \\
 &+ n^{3|-1} d^{n-2} qy (dy)^{n-3} \frac{d^3y}{1.2.3} \\
 &+ \frac{1}{1.2} \left| + n^{4|-1} d^{n-2} qy (dy)^{n-4} \frac{d^2y}{1.2} \cdot \frac{d^2y}{1.2} \right. \\
 &\quad + 2n^{5|-1} d^{n-3} qy (dy)^{n-5} \frac{d^2y}{1.2} \cdot \frac{d^3y}{1.2.3} \\
 &\quad \left. + n^{6|-1} d^{n-4} qy (dy)^{n-6} \frac{d^3y}{1.2.3} \cdot \frac{d^3y}{1.2.3} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{1.2.3} \left| n^{6|-1} d^{n-3} \varphi y (dy)^{n-6} \left(\frac{d^2 y}{1.2} \right)^3 \right. \\
 & \quad + 3 n^{7|-1} d^{n-4} \varphi y (dy)^{n-7} \left(\frac{d^2 y}{1.2} \right)^2 \frac{d^3 y}{1.2.3} \\
 & \quad + \frac{3.2}{1.2} n^{8|-1} d^{n-5} \varphi y (dy)^{n-8} \frac{d^2 y}{1.2} \left(\frac{d^3 y}{1.2.3} \right)^2 \\
 & \quad + \frac{3.2.1}{1.2.3} n^{9|-1} d^{n-6} \varphi y (dy)^{n-9} \left(\frac{d^3 y}{1.2.3} \right)^3 \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad \vdots
 \end{aligned}$$

u. s. w. Das Fortgangsgesetz läßt sich leicht erkennen. Die Vorzeichen und die Differenziale von y , $\left(\frac{d^2 y}{1.2}, \frac{d^3 y}{1.2.3} \right)$ unterliegen den Gesetzen des Binomiums.

Ist $\frac{d^5 y}{1.2.3.4.5} = 0$, $\frac{d^6 y}{1.2...6} = 0$ u. s. w., so entsteht

$$\begin{aligned}
 3) \frac{d^n \varphi y}{(dx)^n} &= d^n \varphi y (dy)^n + n^{2|-1} d^{n-1} \varphi y (dy)^{n-2} \frac{d^2 y}{1.2} \\
 & \quad + n^{3|-1} d^{n-2} \varphi y (dy)^{n-3} \frac{d^3 y}{1.2.3} \\
 & \quad + n^{4|-1} d^{n-3} \varphi y (dy)^{n-4} \frac{d^4 y}{1.2.3.4} \\
 & \quad + \frac{1}{1.2} \left| n^{4|-1} d^{n-2} \varphi y (dy)^{n-4} \left(\frac{d^2 y}{1.2} \right)^2 \right. \\
 & \quad + 2 \left| n^{5|-1} d^{n-3} \varphi y (dy)^{n-5} \frac{d^2 y}{1.2} \frac{d^3 y}{1.2.3} \right. \\
 & \quad \quad \left. n^{6|-1} d^{n-4} \varphi y (dy)^{n-6} \frac{d^2 y}{1.2} \frac{d^4 y}{1.2.3.4} \right. \\
 & \quad + \frac{2.1}{1.2} \left| n^{6|-1} d^{n-4} \varphi y (dy)^{n-6} \left(\frac{d^3 y}{1.2.3} \right)^2 \right. \\
 & \quad \quad 2 n^{7|-1} d^{n-5} \varphi y (dy)^{n-7} \frac{d^3 y}{1.2.3} \frac{d^4 y}{1.2.3.4} \\
 & \quad \quad \left. n^{8|-1} d^{n-6} \varphi y (dy)^{n-8} \left(\frac{d^4 y}{1.2.3.4} \right)^2 \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{1.2.3} \left| n^{6|-1} d^{n-3} \varphi y (dy)^{n-6} \left(\frac{d^2 y}{1.2} \right)^3 \right. \\
 & \quad + 3 \left| n^{7|-1} d^{n-4} \varphi y (dy)^{n-7} \left(\frac{d^2 y}{1.2} \right)^2 \frac{d^3 y}{1.2.3} \right. \\
 & \quad \left. n^{8|-1} d^{n-5} \varphi y (dy)^{n-8} \left(\frac{d^2 y}{1.2} \right)^2 \frac{d^4 y}{1.2.3.4} \right. \\
 & + \frac{3.2}{1.2} \left| n^{8|-1} d^{n-5} \varphi y (dy)^{n-8} d^2 y \left(\frac{d^3 y}{1.2.3} \right)^2 \right. \\
 & \quad + 2 n^{9|-1} d^{n-6} \varphi y (dy)^{n-9} \frac{d^2 y}{1.2} \frac{d^3 y}{1.2.3} \frac{d^4 y}{1.2.3.4} \\
 & \quad + n^{10|-1} d^{n-7} \varphi y (dy)^{n-10} \frac{d^2 y}{1.2} \left(\frac{d^4 y}{1.2.3.4} \right)^2 \\
 & + \frac{3.2.1}{1.2.3} \left| n^{9|-1} d^{n-6} \varphi y (dy)^{n-9} \left(\frac{d^3 y}{1.2.3} \right)^3 \right. \\
 & \quad + 3 n^{10|-1} d^{n-7} \varphi y (dy)^{n-10} \left(\frac{d^3 y}{1.2.3} \right)^2 \frac{d^4 y}{1.2.3.4} \\
 & \quad + 3 n^{11|-1} d^{n-8} \varphi y (dy)^{n-11} \frac{d^3 y}{1.2.3} \left(\frac{d^4 y}{1.2.3.4} \right)^2 \\
 & \quad \left. + n^{12|-1} d^{n-9} \varphi y (dy)^{n-12} \left(\frac{d^4 y}{1.2.3.4} \right)^3 \right.
 \end{aligned}$$

u. s. w. Die Vorzahlen und die Differenziale von $y, \left(\frac{d^2 y}{1.2.3}, \frac{d^3 y}{1.2.3.4}, \frac{d^4 y}{1.2.3.4} \right)$ unterliegen, wie man erkennt, den Gesetzen des Trinoms.

Es lassen sich auf diesem Wege die weiteren Entwicklungen leicht verfolgen.

§. 7.

Für die bisher gewonnenen Entwicklungen lassen sich jedoch noch andere Darstellungen geben.

Kommt man auf die Gleichung 9 §. 3 oder 12 §. 4 zurück, so sind die Elemente, woraus die Versetzungen gebildet werden sollen,

die verschiedenen Differenziale der Grundfunction $dy, \frac{d^2y}{1.2}, \frac{d^3y}{1.2.3}, \dots$

Die Function y kommt nirgends vor. Auch diese kann man einführen.

Wie diefs geschieht, soll im folgenden gezeigt werden. Nach 80 Pag. 92 meines Differenzial-Calculs ist

$$\begin{aligned} 1) (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)^q &= Z^q \\ &= P'(sq)^q x^q + P'(s(q+1))^q x^{q+1} + P'(s(q+2))^q x^{q+2} + \dots \\ &\quad \dots P'(sm)^q x^m + P'(s(m+1))^q x^{m+1} + \dots \\ &\quad (a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad a_5, \quad \dots) \end{aligned}$$

wenn unter $P'(sq)^q$, $P'(s(q+1))^q$, $P'(s(q+2))^q$, ... die Versetzungen mit Wiederholungen in der q^{ten} Classe zu den verschiedenen Summen aus den untergeschriebenen Elementen verstanden werden.

Nun hat

$$\begin{aligned} 2) (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)^q &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots - a_0)^q \\ &= (Y - a_0)^q \end{aligned}$$

unter der Voraussetzung, daß $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = Y$ ist. Entwickelt man $(Y - a_0)^q$ nach den Gesetzen des Binomiums, so hat man

$$(Y - a_0)^q = Y^q - q a_0 Y^{q-1} + (q)_2 a_0^2 Y^{q-2} - (q)_3 a_0^3 Y^{q-3} + \dots$$

Behandelt man nun die Potenzen des Polynomiums Y nach dem in 1 ausgesprochenen Gesetze, so erhält man

$$\begin{aligned} 3) Z^q &= \\ P'(s0)^q &+ P'(s1)^q x + P'(s2)^q x^2 + \dots + P'(sm)^q x^m + \dots \\ - q a_0 P'(s0)^{q-1} &- q a_0 P'(s1)^{q-1} x - q a_0 P'(s2)^{q-1} x^2 \dots - q a_0 P'(sm)^{q-1} x^m + \dots \\ + (q)_2 a_0^2 P'(s0)^{q-2} &+ (q)_2 a_0^2 P'(s1)^{q-2} x + (q)_2 a_0^2 P'(s2)^{q-2} x^2 + \dots + (q)_2 a_0^2 P'(sm)^{q-2} x^m + \dots \\ - (q)_3 a_0^3 P'(s0)^{q-3} &- (q)_3 a_0^3 P'(s1)^{q-3} x + (q)_3 a_0^3 P'(s2)^{q-3} x^2 \dots - (q)_3 a_0^3 P'(sm)^{q-3} x^m + \dots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$(a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad \dots)$$

In dieser Darstellung verschwinden alle Vertikalreihen, welche Potenzen von x tragen, die niederer als q sind, denn es ist, wie

sich leicht rechtfertigt, wenn man die Versetzungen mit Wiederholungen darstellt

$$P'(s0)^q - q \cdot a_0 P'(s0)^{q-1} + (q)_2 a_0^2 P'(s0)^{q-2} - (q)_3 a_0^3 P'(s0)^{q-3} + \dots \\ = (1-1)^q a_0^q = 0$$

$$(P'[s1]^q - q \cdot a_0 P'[s1]^{q-1} + [q]_2 a_0^2 P'[s1]^{q-2} - [q]_3 a_0^3 P'[s1]^{q-3} + \dots)^q \\ = q a_1 (1-1)^{q-1} a_0^q x = 0$$

u. s. f. Diefs folgert sich auch einfach aus der Bemerkung, dafs die entwickelte Darstellung von

$$(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)^q = Z^q = (Y - a_0)^q$$

nur Glieder haben kann, welche die ordnende Gröfse in der Potenz q oder in einer höhern enthalten.

Aus 1 und 3 ergibt sich nun folgende Vergleichung

$$\begin{aligned} 4) P'(sm; a_1, a_2, a_3, \dots)^q &= P'(sm; a_0, a_1, a_2, \dots)^q \\ &- q \cdot a_0 P'(sm; a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)^{q-1} \\ &+ \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2} a_0^2 P'(sm; a_0, a_1, a_2, \dots)^{q-2} \\ &- \frac{q(q-1)(q-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_0^3 P'(sm; a_0, a_1, a_2, \dots)^{q-3} \\ &\dots \\ &(-)^q \frac{q(q-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q} a_0^q P'(sm; a_0, a_1, a_2, \dots)^0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung zeigt, wie die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen aus den Elementen $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$ in der q^{ten} Classe zur Summe m zurückgeführt werden können auf die Versetzungen mit Wiederholungen aus den Elementen $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ zur nämlichen Summe in der nämlichen und allen vorhergehenden Classen.

Hat man die Elemente $a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ und die Elemente $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ untereinander in Beziehung zu bringen, so ändert sich die Summe, und zwar um so viele Einheiten, als die Exponen-

ten der Classen sich verändern. Die vorstehende Gleichung geht dann in folgende über

$$\begin{aligned}
 5) P'(sm; a_2, a_3, a_4, \dots)^n &= P'(sm; a_1, a_2, a_3, \dots)^n \\
 &\quad - q a_1 P'(s[m-1]; a_1, a_2, a_3, \dots)^{n-1} \\
 &\quad + \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2} a_1^2 P'(s[m-2]; a_1, a_2, a_3, \dots)^{n-2} \\
 &\quad - \frac{q(q-1)(q-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_1^3 P'(s[m-3]; a_1, a_2, a_3, \dots)^{n-3} \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad (-)^q \frac{q(q-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q} a_1^q P'(s[m-q]; a_1, a_2, a_3, \dots)^0
 \end{aligned}$$

Hiebei ist zu bemerken, daß

$$P'(s[m-q]; a_1, a_2, a_3, \dots)^0 = 0$$

ist, so lange $m-q > 0$. Wird aber $m-q=0$ so geht der vorstehende Ausdruck in 1 über.

Dieser Satz wird gewöhnlich speciell auf die Vorzahlen des Polynomiums bezogen, und dort zu einer zurücklaufenden Bildungsweise benutzt, wie man sich aus Fischers Theorie der Dimensionszeichen Pag. 136 u. ff. überzeugen kann. Hier ist er auch auf die Combinationen ausgedehnt.

Benutzt man ihn nun für die, oben zur Darstellung des n^{ten} Differenzial-Quotienten aufgestellten Gleichungen, so hat man

$$a_0 = d^0 y = y, a_1 = dy, a_2 = \frac{d^2 y}{1 \cdot 2}, a_3 = \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots$$

und statt q allmählig die Werthe 1, 2, 3, 4, ... zu setzen. Hiedurch ergibt sich aus 12 §. 4 folgende Darstellung, wenn man die abgekürzten Zeichen gebraucht

$$\begin{aligned}
 6) \frac{d^2 \varphi y}{(dx)^2} &= 1^{n+1} [d\varphi y P'(sn)^1 \\
 &\quad + \frac{d^2 \varphi y}{1 \cdot 2} (P'[sn]^2 - 2 y P'[sn]^1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{d^3 q y}{1.2.3} \left(P' [sn]^3 - 3 y P' [sn]^2 + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} y^2 P' [sn]^1 \right) \\
 & + \frac{d^4 q y}{1.2.3.4} \left(P' [sn]^4 - 4 y P' [sn]^3 + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} P' [sn]^2 - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} P' [sn]^1 \right) \\
 & \quad \vdots \\
 & + \frac{d^{n-1} q y}{1.2.3 \dots (n-1)} \left(P' [sn]^{n-1} - (n-1) y P' [sn]^{n-2} + (n-1)_2 y^2 P' [sn]^{n-3} - \dots [-]^{n-2} (n-1)_{n-2} P' [sn] \right) \\
 & + \frac{d^n q y}{1.2.3 \dots n} \left(P' [sn]^n - n y P' [sn]^{n-1} + (n)_2 y^2 P' [sn]^{n-2} - \dots [-]^{n-1} (n)_{n-1} y^{n-1} P' [sn] \right) \\
 & \quad \left(y, \quad \frac{dy}{1}, \quad \frac{d^2 y}{1 \cdot 2}, \quad \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots \right)
 \end{aligned}$$

Diese Darstellung läßt sich auch auf folgende Weise in Zeichen andeuten

$$7) \frac{d^n q y}{(dx)^n} = 1^{n|1} \sum \frac{d^x q y}{1^{x|1}} \sum (-)^k \frac{(k+h)^{k|1-1}}{1^{k|1}} y^k P' (sn; y, dy, \frac{d^2 y}{1 \cdot 2}, \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3} \dots)^h$$

Für z sind allmählig die Werthe $1, 2, 3 \dots n$ und für jeden besondern Zahlenwerth von z ist $k+h=z$, für k sind allmählig die Werthe $0, 1, 2, 3 \dots z-1$ zu setzen.

Ordnet man nach den Versetzungsclassen, so ergibt sich folgende Darstellung

$$\begin{aligned}
 8) \frac{d^n q y}{(dx)^n} = & 1^{n|1} \left[\left(d q y - 2 y \frac{d^2 q y}{1 \cdot 2} + 3 y^2 \frac{d^3 q y}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 4 y^3 \frac{d^4 q y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right) P' (sn)^1 \right. \\
 & + \left(\frac{d^2 q y}{1 \cdot 2} - (3)_2 y \frac{d^3 q y}{1 \cdot 2 \cdot 3} + (4)_2 y^2 \frac{d^4 q y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - (5)_2 y^3 \frac{d^5 q y}{1 \cdot 2 \dots 5} + \dots \right) P' (sn)^2 \\
 & + \left(\frac{d^3 q y}{1 \cdot 2 \cdot 3} - (4)_3 y \frac{d^4 q y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + (5)_3 y^2 \frac{d^5 q y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - (6)_3 y^3 \frac{d^6 q y}{1 \cdot 2 \dots 6} + \dots \right) P' (sn)^3 \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad \left. (y, \quad dy, \quad \frac{d^2 y}{1 \cdot 2}, \quad \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \frac{d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \dots) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad q \ b_0^{q-1} P'(sn)^1 (-)^{n-1} \frac{(q-2)^{n-1|-1}}{1^{n-1|1}} &= (-)^{n-1} \frac{q(q-2)^{n-1|-1}}{1 \cdot 1^{n-1|1}} b_0^{q-1} P'(sn)^1 \\
 \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2} b_0^{q-2} P'(sn)^2 (-)^{n-2} \frac{(q-3)^{n-2|-1}}{1^{n-2|1}} &= (-)^{n-2} \frac{q^{2|-1} (q-3)^{n-2|-1}}{1^{2|1} 1^{n-2|1}} b_0^{q-2} P'(sn)^2 \\
 \frac{q(q-1)(q-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b_0^{q-3} P'(sn)^3 (-)^{n-3} \frac{(q-4)^{n-3|-1}}{1^{n-3|1}} &= (-)^{n-3} \frac{q^{3|-1} (q-4)^{n-3|-1}}{1^{3|1} 1^{n-3|1}} b_0^{q-3} P'(sn)^3
 \end{aligned}$$

Werden diese Darstellungen in I eingeführt, so gewinnt man aus

$$\begin{aligned}
 5) \quad \frac{d^n X^q}{(dx)^n} &= 1^{n|1} [(-)^{n-1} (q)_1 (q-2)_{n-1} b_0^{q-1} P'(sn; b_0, b_1, b_2, \dots)^1 \\
 &\quad (-)^{n-2} (q)_2 (q-3)_{n-2} b_0^{q-2} P'(sn; b_0, b_1, b_2, \dots)^2 \\
 &\quad (-)^{n-3} (q)_3 (q-4)_{n-3} b_0^{q-3} P'(sn; b_0, b_1, b_2, \dots)^3 \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad (-)^0 (q)_n (q-n)_0 b_0^{q-n} P'(sn; b_0, b_1, b_2, \dots)^n]
 \end{aligned}$$

Oder auch folgende

$$\begin{aligned}
 6) \quad \frac{d^n X^q}{(dx)^n} &= (-)^{n-1} n (q)_1 (q-2)^{n-1|-1} b_0^{q-1} P'(sn; b_0, b_1, b_2, \dots)^1 \\
 &\quad (-)^{n-2} n^{2|-1} (q)_2 (q-3)^{n-2|-1} b_0^{q-2} P'(sn; b_0, b_1, b_2, \dots)^2 \\
 &\quad (-)^{n-3} n^{3|-1} (q)_3 (q-4)^{n-3|-1} b_0^{q-3} P'(sn; b_0, b_1, b_2, \dots)^3 \\
 &\quad \vdots \\
 7) \quad \frac{d^n X^q}{(dx)^n} &= q^{n+1|-1} [(-)^{n-1} (n)_1 \frac{b_0^{q-1}}{q-1} P'(sn; b_0, b_1, b_2, \dots)^1 \\
 &\quad (-)^{n-2} (n)_2 \frac{b_0^{q-2}}{q-2} P'(sn; b_0, b_1, b_2, \dots)^2 \\
 &\quad (-)^{n-3} (n)_3 \frac{b_0^{q-3}}{q-3} P'(sn; b_0, b_1, b_2, \dots)^3 \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad (-)^{n-r} (n)^r \frac{b_0^{q-r}}{q-r} P'(sn; b_0, b_1, b_2, \dots)^r]
 \end{aligned}$$

Hierin ist

$$8) b_0 = X = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots$$

$$b_1 = \frac{dX}{dx} = a_2 + 2 a_3 x + 3 a_4 x^2 + 4 a_5 x^3 + \dots$$

$$b_2 = \frac{d^2 X}{1.2(dx)^2} = (2)_2 a_3 + (3)_2 a_4 x + (4)_2 a_5 x^2 + \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Daher gilt für jedes Polynomium

$$\begin{aligned} 9) \frac{d^n X^q}{(dx)^n} &= q^{n+1-1} \left((-)^{n-1} n \frac{X^{q-1}}{q-1} P'(\text{sn})^1 (-)^{n-2} (n)_2 \frac{X^{q-2}}{q-2} P'(\text{sn})^2 \dots \right. \\ &\quad \left. \dots (-)^{n-r} (n)^r \frac{X^{q-r}}{q-r} P'(\text{sn})^r \dots + (n)^n \frac{X^{q-n}}{q-n} P'(\text{sn})^n \right) \\ &\left(X, \frac{dX}{dx}, \frac{d^2 X}{1.2(dx)^2}, \frac{d^3 X}{1.2.3(dx)^3}, \dots \right) \end{aligned}$$

§. 9.

Wir wenden uns nun zur Anwendung der gefundenen Gleichungen auf besondere Fälle. Hiebei ist zu bemerken, dass sich auch andere Wege auffinden lassen werden, um zu dem nämlichen Resultate zu gelangen, die aus den Eigenthümlichkeiten des einzelnen Falles zu gewinnen sind.

Das n^{te} Differenzial von $(a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^q$ soll bestimmt werden. Hiezu sind die Differenziale in Beziehung auf die Function $(a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^q$ als solche (ϕy) und in Beziehung auf die Grundgröfse $a_1 + a_2 x + a_3 x^2$ nöthig. Es ist

$$1) \frac{d^r \phi y}{(dy)^r} = q^{r-1} (a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^{q-r}$$

$$\frac{dy}{dx} = a_2 + 2 a_3 x, \quad \frac{d^2 y}{1.2 dx} = a_3$$

Werden diese Werthe in 7 §. 5 Pag. 31 oder 1 §. 6 Pag. 26 eingeführt, so entsteht

$$\begin{aligned}
 2) \frac{d^n(a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^q}{(dx)^n} &= q^{n|-1} (a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^{q-1} (a_2 + 2 a_3 x)^n \\
 &+ n^{2|-1} q^{n-1|-1} (a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^{q-n+1} (a_2 + 2 a_3 x)^{n-2} a_3 \\
 &+ \frac{n^{4|-1}}{1^{3|1}} q^{n-2|-1} (a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^{q-n+2} (a_2 + 2 a_3 x)^{n-4} a_3^2 \\
 &+ \frac{n^{6|-1}}{1^{3|1}} q^{n-3|-1} (a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^{q-n+3} (a_2 + 2 a_3 x)^{n-6} a_3^3 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Auf die nämliche Darstellung führen auch die Gleichungen §. 4 und §. 5.

Wird

$q^{n|-1}, (a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^{q-n}, (a_2 + 3 a_3 x)^n$ in 2 ausgeschieden, so geht diese Darstellung in folgende über, da

$$q^{n-r|-1} = q^{n|-1} (q-n)^{-r|-1} = \frac{q^{n|-1}}{(q-n+r)^{r|-1}} = \frac{q(q-1)(q-2) \dots (q-n+1)}{(q-n+r)(q-n+r-1) \dots (q-n+1)}$$

ist,

$$\begin{aligned}
 3) \frac{d^n(a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^q}{(dx)^n} &= \\
 &= q^{n|-1} (a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^{q-n} (a_2 + 2 a_3 x)^n \left(1 + \frac{n(n-1)(a_1 + a_2 x + a_3 x^2) a_3}{1 \cdot (q-n+1) (a_2 + 2 a_3 x)^2} \right. \\
 &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^2 a_3^2}{1 \cdot 2 \cdot (q-n+1) (q-n+2) (a_2 + 2 a_3 x)^3} \\
 &\quad + \frac{n(n-1) \dots (n-5) (a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^3 a_3^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 (q-n+1) (q-n+2) (q-n+3) (a_2 + 2 a_3 x)^4} \\
 &\quad \left. + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Ist das n^{te} Differenzial von $(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3)^q$ zu bestimmen, so wird hiezu nöthig

$$\begin{aligned}
 4) \frac{d^n q y}{(dy)^r} &= q^{r|-1} (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3)^{q-r} \\
 y = b_1 &= a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \\
 \frac{dy}{dx} &= a_2 + 2 a_3 x + 3 a_4 x^2 = b_2
 \end{aligned}$$

$$\frac{d^2y}{1.2(dx)^2} = a_3 + 3 a_4 x = b_3$$

$$\frac{d^3y}{1.2.3(dx)^3} = a_4 = b_4$$

Werden diese Werthe in 2 §. 6 eingeführt, so entsteht

$$\begin{aligned} 5) \frac{d^n(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3)^q}{(dx)^n} = & \\ & = q^{n|-1} (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3)^{q-n} (a_2 + 2 a_3 x + 3 a_4 x^2)^n \\ & + n^{2|-1} q^{n-1|-1} (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3)^{q-n+1} (a_2 + 2 a_3 x + 3 a_4 x^2)^{n-2} (a_3 + 3 a_4 x) \\ & + n^{3|-1} q^{n-2|-1} (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3)^{q-n+2} (a_2 + 2 a_3 x + 3 a_4 x^2)^{n-3} a_4 \\ & + \frac{1}{1.2} \left[n^{4|-1} q^{n-3|-1} (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3)^{q-n+3} (a_2 + 3 a_3 x + 3 a_4 x^2)^{n-4} (a_3 + a_4 x)^2 \right. \\ & \left. + 2 n^{5|-1} q^{n-3|-1} (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3)^{q-n+3} (a_2 + 2 a_3 x + 3 a_4 x^2)^{n-5} (a_3 + a_4 x) a_4 \right. \\ & \left. + n^{6|-1} q^{n-4|-1} (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3)^{q-n+4} (a_2 + 2 a_3 x + 3 a_4 x^2)^{n-6} a_4^2 \right] \end{aligned}$$

Einfacher und übersichtlicher läßt sich dieses Gesetz darstellen, wenn man b_1, b_2, b_3, b_4 , statt der durch sie in 4 angedeuteten Ausdrücke einführt. Man erhält dann

$$\begin{aligned} 6) \frac{d^n(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3)^q}{(dx)^n} = & \\ = q^{n|-1} b_1^{q-n} b_2^n + n^{2|-1} q^{n-1|-1} b_1^{q-n+1} b_2^{n-2} b_3 + \frac{n^{4|-1}}{1.2} q^{n-2|-1} b_1^{q-n+2} b_2^{n-4} b_3^2 + \dots \\ & + n^{3|-1} q^{n-2|-1} b_1^{q-n+2} b_2^{n-3} b_4 + \frac{2.n^{5|-1}}{1.2} q^{n-3|-1} b_1^{q-n+3} b_2^{n-5} b_3 b_4 + \dots \\ & + \frac{n^{6|-1}}{1.2} q^{n-4|-1} b_1^{q-n+4} b_2^{n-6} b_4^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) \frac{d^n(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4)^q}{(dx)^n} = & \\ = q^{n|-1} b_1^{q-n} b_2^n + n^{2|-1} q^{n-1|-1} b_1^{q-n+1} b_2^{n-2} b_3 + \frac{1}{1.2} \left[n^{4|-1} q^{n-2|-1} b_1^{q-n+2} b_2^{n-4} b_3^2 + \dots \right. \\ & \left. + 2 n^{5|-1} q^{n-3|-1} b_1^{q-n+3} b_2^{n-5} b_3 b_4 \right. \\ & \left. + n^{6|-1} q^{n-4|-1} b_1^{q-n+4} b_2^{n-6} b_3 b_5 \right. \\ & \left. + \frac{2.1}{1.2} n^{6|-1} q^{n-4|-1} b_1^{q-n+4} b_2^{n-6} b_4^2 \right. \\ & \left. + 2 n^{7|-1} q^{n-5|-1} b_1^{q-n+5} b_2^{n-7} b_4 b_5 \right. \\ & \left. + n^{8|-1} q^{n-6|-1} b_1^{q-n+6} b_2^{n-8} b_5^2 \right] \end{aligned}$$

Hierin ist

$$b_1 = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4$$

$$b_2 = a_2 + 2 a_3 x + 3 a_4 x^2 + 4 a_5 x^3$$

$$b_3 = a_3 + 3 a_4 x + 6 a_5 x^2$$

$$b_4 = a_4 + 4 a_5 x$$

$$b_5 = a_5$$

Die in §. 6 gegebenen Darstellungen lassen sich nun leicht auf jedes Polynomium von irgend einer beliebigen Gliederanzahl ausdehnen.

§. 10.

Eine besondere Darstellung der höhern Differenzial-Quotienten der Polynomien ergibt sich nun noch, wenn man auf die in 1 — 13 §. 1 angegebene Entwicklungsweise zurückkömmt, $x + k$ statt x in die Grundreihe einführt, die Glieder nach den steigenden Potenzen von k ordnet, und dann die Vorzahl von k^n bestimmt.

Um die dabei vorkommenden Entwicklungen nicht zu verwickelt zu machen, so soll der n^{te} Differenzial-Quotient von $(a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^n$ bestimmt werden. Es ist

$$1) (a_1 + a_2 (x + k) + a_3 (x + k)^2)^n = [(a_1 + a_2 x + a_3 x^2) + (a_2 + 2 a_3 x)k + a_3 k^2]^n \\ = (b_1 + b_2 k + b_3 k^2)^n$$

so dafs

$$2) b_1 = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$$

$$b_2 = a_2 + 2 a_3 x$$

$$b_3 = a_3$$

Das durch die Umformung entstandene Polynomium läfst sich nun auch so darstellen

$$(b_1 + b_2 k + b_3 k^2)^n = b_1^n \left(1 + \frac{b_2}{b_1} k + \frac{b_3}{b_1} k^2\right)^n$$

Zählt man nun hierin $\left(\frac{b_2}{2b_1} k\right)^2$ zu und ab, so entsteht

$$3) (b_1 + b_2 k + b_3 k^2)^q = b_1^q \left(1 + \frac{b_2}{b_1} k + \frac{b_2^2}{4 b_1^2} k^2 + \left(\frac{b_3}{b_1} - \frac{b_2^2}{4 b_1^2} \right) k^2 \right)^q$$

$$= b_1^q \left[\left(1 + \frac{b_2}{2 b_1} k \right)^2 + \frac{4 b_1 b_3 - b_2^2}{4 b_1^2} k^2 \right]$$

oder

$$4) (b_1 + b_2 k + b_3 k^2)^q = b_1^q [(1 + g k)^2 + h k^2]^q$$

wenn $\frac{b_2}{2 b_1} = g$ und $\frac{4 b_1 b_3 - b_2^2}{4 b_1^2} = h$ gesetzt wird.

Entwickelt man nun die Darstellung 4 als ein Binomium in eine Reihe, so entsteht

$$(b_1 + b_2 k + b_3 k^2)^q =$$

$$= b_1^q [(1 + g k)^{2q} + q(1 + g k)^{2q-2} h k^2 + (q)_2 (1 + g k)^{2q-4} h^2 k^4 + (q)_3 (1 + g k)^{2q-6} h^3 k^6 + \dots]$$

Hierin erscheinen nun selbst wieder die Binomien

$$(1 + g k)^{2q}, (1 + g k)^{2q-2}, (1 + g k)^{2q-4}, (1 + g k)^{2q-6}, \dots$$

Werden nun auch diese entwickelt und die hieraus sich ergebenden Resultate mit den begleitenden Factoren in Verbindung gebracht, so entsteht

$$(1 + g k)^{2q} = 1 + (2q) g k + (2q)_2 g^2 k^2 + (2q)_3 g^3 k^3 + \dots (2q)_n g^n k^n \dots$$

$$q(1 + g k)^{2q-2} h k^2 = q(h k^2 + (2q-2)_1 g h k^3 + (2q-2)_2 g^2 h k^4 + (2q-2)_3 g^3 h k^5 + \dots (2q-2)_{n-2} g^{n-2} h k^n +$$

$$(q)_2 (1 + g k)^{2q-4} h^2 k^4 = (q)_2 (h^2 k^4 + (2q-4)_1 g h^2 k^5 + (2q-4)_2 g^2 h^2 k^6 + \dots (2q-4)_{n-4} g^{n-4} h^2 k^n +$$

$$(q)_3 (1 + g k)^{2q-6} h^3 k^6 = (q)_3 (h^3 k^6 + (2q-6)_1 g h^3 k^7 + (2q-6)_2 g^2 h^3 k^8 + \dots (2q-6)_{n-6} g^{n-6} h^3 k^n +$$

Aus dieser Darstellung erkennt man nun leicht das Gesetz, wornach die Vorzahl von k^n gebildet wird. Hebt man nun dasselbe hervor, vervielfacht mit b_1^q und $1^{n!}$, so erhält man den fraglichen Differenzial-Quotienten und es ist

$$5) \frac{d^n (a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^q}{(dx)^n} =$$

$$= 1^{n!} b_1^q \left((2q)_n g^n + q \cdot (2q-2)_{n-2} g^{n-2} h + (q)_2 (2q-4)_{n-4} g^{n-4} h^2 \right.$$

$$\left. + (q)_3 (2q-6)_{n-6} g^{n-6} h^3 + \dots (q)_r (2q-2r)_{n-2r} g^{n-2r} h^r \dots \right)$$

wenn $g = \frac{b_2}{2 b_1}$ und $h = \frac{b_3}{b_1} - \frac{b_2^2}{4 b_1^2} = \frac{4 b_1 b_3 - b_2^2}{4 b_1^2}$ ist.

Setzt man nun den Werth $\frac{b_2}{2b_1}$ für g und $h = \frac{m}{4b_1^2}$ in 5, so erhält man

$$\frac{d^n (a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^q}{(dx)^n} =$$

$$= 1^{n|1} b_1^q \left[(2q)_n \frac{b_2^n}{(2b_1)^n} + q (2q-2)_{n-2} \frac{b_2^{n-2} m}{(2b_1)^{n-2} (2b_1)^2} + (q)_2 (2q-4)_{n-4} \frac{b_2^{n-4} m^2}{(2b_1)^{n-4} (2b_1)^4} \right.$$

$$\left. + (q)_3 (2q-6)_{n-6} \frac{b_2^{n-6} m^3}{(2b_1)^{n-6} (2b_1)^6} + \dots \right]$$

Wird hierin $(2q)_n$ und $(2b_1)^n$ und b_2^n ausgeschieden, so geht diese Darstellung in folgende über

$$6) \frac{d^n (a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^q}{(dx)^n} =$$

$$= (2q) (2q-1) \dots (2q-n+1) \frac{b_2^n b_1^{q-n}}{2^n} \left[1 + q \frac{n (n-1) m}{2q (2q-1) b_2^2} \right.$$

$$+ (q)_2 \frac{n (n-1) (n-2) (n-3) m^2}{2q (2q-1) (2q-2) (2q-3) b_2^4}$$

$$+ (q)_3 \frac{n (n-1) \dots (n-5) m^3}{2q (2q-1) \dots (2q-5) b_2^6}$$

$$\left. \dots \right]$$

Hierin ist $m = 4 b_1 b_3 - b_2^2$. Entwickelt man diesen Werth, so erhält man

$$m = 4 b_1 b_3 - b_2^2 = 4 (a_1 + a_2 x + a_3 x^2) a_3 - (a_2 + 2 a_3 x)^2 = 4 a_1 a_3 - a_2^2 - 4 a_2 a_3 x - 4 a_3^2 x^2$$

Werden nun auch die übrigen Werthe statt b_1 und b_3 eingeführt, so ergibt sich

$$7) \frac{d^n (a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^q}{(dx)^n} =$$

$$= (2q)^{n|1} \frac{(a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^{q-n} (a + 2 a_3 x)^n}{2^n} \left[1 + q \frac{n^{2|1-1} (4 a_1 a_3 - a_2^2 a_2)}{(2q)^{2|1-1} (a_2 + 2 a_3 x)^2} \right.$$

$$+ (q)_2 \frac{n^{4|1-1} (4 a_1 a_3 - a_2^2 a_2)^2}{(2q)^{4|1-1} (a_2 + 2 a_3 x)^4}$$

$$+ (q)_3 \frac{n^{6|1-1} (4 a_1 a_3 - a_2^2 a_2)^3}{(2q)^{6|1-1} (a_2 + 2 a_3 x)^6}$$

$$\left. \dots \right]$$

Die eben gezeigte Entwicklungs-Methode kann auch auf Polynomen, deren Grundreihen eine grössere Gliederanzahl haben, ausgedehnt werden. Wir wählen, um dies zu zeigen, vorerst ein Quadrinomium von der Form

$$(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3)^q$$

Setzt man $x + k$ statt x und ordnet nach den Potenzen von k , so entsteht

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2(x+k) + a_3(x+k)^2 + a_4(x+k)^3)^q &= \\ &= [a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + (a_2 + 2 a_3 x + 3 a_4 x^2)k \\ &\quad + (a_3 + 3 a_4 x)k^2 + a_4 k^3]^q \\ &= (b_1 + b_2 k + b_3 k^2 + b_4 k^3)^q \\ &= b_1^q \left(1 + \frac{b_2}{b_1} k + \frac{b_3}{b_1} k^2 + \frac{b_4}{b_1} k^3\right)^q \end{aligned}$$

Zählt man nun, wie vorhin $\left(\frac{b_2}{2b_1}\right)^2$ zu und ab, so erhält man

$$\begin{aligned} 8) (b_1 + b_2 k + b_3 k^2 + b_4 k^3)^q &= \\ &= b_1^q \left(1 + \frac{b_2}{b_1} k + \left(\frac{b_2}{2b_1}\right)^2 k^2 + \left[\frac{b_3}{b_1} - \left(\frac{b_2}{2b_1}\right)^2\right] k^2 + \frac{b_4}{b_1} k^3\right)^q \\ &= b_1^q [(1 + gk)^2 + h_2 k^2 + h_3 k^3]^q \end{aligned}$$

unter der Bedingung, dass $g = \frac{b_2}{2b_1}$, $h_2 = \frac{4b_1 b_3 - b_2^2}{4b_1^2}$, $h_3 = \frac{b_4}{b_1}$ ist.

Wird nun $[(1 + gk)^2 + h_2 k^2 + h_3 k^3]^q$ als Binomium entwickelt, so entsteht

$$\begin{aligned} b_1^q [(1 + gk)^2 + h_2 k^2 + h_3 k^3]^q &= \\ &= b_1^q \left((1 + gk)^{2q} + q(1 + gk)^{2q-2} (h_2 k^2 + h_3 k^3) \right. \\ &\quad + (q)_2 (1 + gk)^{2q-4} (h_2 k^2 + h_3 k^3)^2 \\ &\quad + (q)_3 (1 + gk)^{2q-6} (h_2 k^2 + h_3 k^3)^3 \\ &\quad \left. + \dots \right) \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
 (1 + g k)^{2q} &= 1 + (2q) g k + (2q)_2 g^2 k^2 + \dots (2q)_n g^n k^n \\
 q (1 + g k)^{2q-2} (h_2 k^2 + h_3 k^3) &= q [h_2 k^2 + (2q-2)_2 g h_2 k^3 + \dots (2q-2)_{n-2} g^{n-2} h_2 k^{n-2} \\
 &\quad + q [h_3 k^3 + (2q-2) g h_3 k^4 + \dots (2q-2)_{n-3} g^{n-3} h_3 k^{n-3} \\
 (q)_2 (1 + g k)^{2q-4} (h_2 k^2 + h_3 k^3)^2 &= (q)_2 [h_2 k^4 + (2q-4) g h_2^2 k^5 + \dots (2q-4)_{n-4} g^{n-4} h_2^2 k^{n-4} \\
 &\quad + (q)_2 2 [h_2 h_3 k^5 + 2q-4) g h_2 h_3 k^6 + \dots (2q-4)_{n-5} g^{n-5} h_2 h_3 k^{n-5} \\
 &\quad + (q)_2 [h_3^2 k^6 + (2q-4) g h_3^2 k^7 + \dots (2q-4)_{n-6} g^{n-6} h_3^2 k^{n-6} \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \vdots
 \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung erkennt man nun leicht das Gesetz, wornach die Vorzahl von k^n erzeugt wird. Hebt man diese heraus, vervielfacht sie mit b_1^q und $1^{n|1}$, so erhält man den gesuchten Differenzial - Quotienten

$$\begin{aligned}
 9) \frac{d^n (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3)^q}{(dx)^n} &= \\
 &= 1^{n|1} b_1^q \left[(2q)_n g^n + q (2q-2)_{n-2} g^{n-2} h_2 \right. \\
 &\quad \left. (2q-2)_{n-3} g^{n-3} h_3 \right. \\
 &\quad \left. + (q)_2 (2q-4)_{n-4} g^{n-4} h_2^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2 (2q-4)_{n-5} g^{n-5} h_2 h_3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} (2q-4)_{n-6} g^{n-6} h_3^2 \right. \\
 &\quad \left. + (q)_3 (2q-6)_{n-6} g^{n-6} h_2^3 \right. \\
 &\quad \left. + 3 (2q-6)_{n-7} g^{n-7} h_2^2 h_3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} (2q-6)_{n-8} g^{n-8} h_2 h_3^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} (2q-6)_{n-9} g^{n-9} h_3^3 \right. \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \left. \right]
 \end{aligned}$$

Hierin ist

$$10) b_1 = a_1 + a_2 x + a_3 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

$$g = \frac{b_2}{2b_1} = \frac{a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2}{2(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3)}$$

$$h_2 = \frac{4b_1 b_3 - b_2^2}{4b_1^2} = \frac{4(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3)(a_3 + 3a_4 x) - (a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2)^2}{4(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3)^2}$$

$$h_3 = \frac{b_4}{b_1} = \frac{a_4}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3}$$

Behält man nun diesen Entwicklungsgang bei, so kann man ein Polynomium von fünf und mehr Glieder darnach behandeln. Man erhält sofort

$$11) \frac{d^n (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4)^q}{(dx)^n} =$$

$$= 1^{n1} b_1^q \left[(2q)_n g^n + q \begin{array}{l} (2q-2)_{n-2} g^{n-2} h_2 \\ (2q-2)_{n-3} g^{n-3} h_3 \\ (2q-2)_{n-4} g^{n-4} h_4 \\ + (q)_2 \begin{array}{l} (2q-4)_{n-4} g^{n-4} h_2 h_2 \\ + 2 \begin{array}{l} (2q-4)_{n-5} g^{n-5} h_2 h_3 \\ (2q-4)_{n-6} g^{n-6} h_2 h_4 \end{array} \\ + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} \begin{array}{l} (2q-4)_{n-6} g^{n-6} h_3 h_3 \\ 2 (2q-4)_{n-7} g^{n-7} h_3 h_4 \\ (2q-4)_{n-8} g^{n-8} h_4 h_4 \end{array} \\ + (q)_3 \begin{array}{l} (2q-6)_{n-6} g^{n-6} h_2 h_2 h_2 \\ + 3 \begin{array}{l} (2q-6)_{n-7} g^{n-7} h_2 h_2 h_3 \\ (2q-6)_{n-8} g^{n-8} h_2 h_2 h_4 \end{array} \\ + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \begin{array}{l} (2q-6)_{n-9} g^{n-8} h_2 h_3 h_3 \\ 2 (2q-6)_{n-9} g^{n-9} h_2 h_3 h_4 \\ (2q-6)_{n-10} g^{n-10} h_2 h_4 h_4 \end{array} \\ + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \begin{array}{l} (2q-6)_{n-9} g^{n-9} h_3 h_3 h_3 \\ 3 (2q-6)_{n-10} g^{n-10} h_3 h_3 h_4 \\ \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} (2q-6)_{n-11} g^{n-11} h_3 h_4 h_4 \\ + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} (2q-6)_{n-12} g^{n-12} h_4 h_4 h_4 \end{array} \end{array} \end{array} \right]$$

Die Bedingungsgleichungen, welche hier gelten, sind

$$12) \quad b_1 = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4$$

$$b_2 = a_2 + 2 a_3 x + 3 a_4 x^2 + 4 a_5 x^3$$

$$b_3 = a_3 + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} a_4 x + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} a_5 x^2$$

$$b_4 = a_4 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_5 x$$

$$b_5 = a_5$$

$$g = \frac{b_2}{2 b_1}$$

$$h_2 = \frac{4 b_1 b_3 - b_2^2}{4 b_1^2}$$

$$h_3 = \frac{b_4}{b_1}$$

$$h_4 = \frac{b_5}{b_1}$$

Diese Darstellungen lassen sich auch so geben, wenn $(2q)_n$ und g^n ausgeschieden wird

$$13) \quad \frac{d^n (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3)^n}{(dx)^n} =$$

$$= (2q)^{n-1} b_1^n g^n \left[1 + q \left| \frac{n^{2|-1} h_2}{(2q)^{2|-1} g^2} + (q)_2 \left| \frac{n^{4|-1} h_2 h_2}{(2q)^{4|-1} g^4} + \dots \right. \right] \right.$$

$$\left. \frac{n^{3|-1} h_3}{(2q)^{3|-1} (2q-n+2) g^3} \quad \frac{2 n^{5|-1} h_2 h_3}{(2q)^{5|-1} (2q-n+2) g^5} \right.$$

$$\left. \frac{n^{6|-1} h_3 h_3}{(2q)^{6|-1} (2q-n+2)(2q-n+3) g^6} \right]$$

$$14) \quad \frac{d^n (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4)^n}{(dx)^n} =$$

$$= (2q)^{n-1} b_1^n g^n \left[1 + q \left| \frac{n^{2|-1} h_2}{(2q)^{2|-1} g^2} + (q)_2 \left| \frac{n^{4|-1} h_2 h_2}{(2q)^{4|-1} g^4} + \dots \right. \right] \right.$$

$$+ 2 \left| \frac{n^{5|-1} h_2 h_3}{(2q)^{5|-1} (2q-n+2) g^5} \right.$$

$$\left. \frac{n^{3|-1} h_3}{(2q)^{3|-1} (2q-n+2) g^3} \quad \frac{n^{6|-1} h_2 h_4}{(2q)^{6|-1} (2q-n+2)^{2|1} g^6} \right.$$

$$\left. \frac{n^{4|-1} h_4}{(2q)^{4|-1} (2q-n+2)^{2|1} g^4} \quad + \frac{2.1}{1.2} \frac{n^{6|-1} h_3 h_3}{(2q)^{6|-1} (2q-n+2)^{2|1} g^6} \right.$$

$$\left. \frac{2 n^{7|-1} h_3 h_4}{(2q)^{7|-1} (2q-n+2)^{3|1} g^7} \quad + \frac{n^{8|-1} h_4 h_4}{(2q)^{8|-1} (2q-n+2)^{4|1} g^8} \right]$$

Hier gelten die nämlichen Bedingungsgleichungen, welche oben in 10 und 12 angegeben wurden.

Das Fortgangsgesetz für sechs- und mehrgliedrige Polynomien liegt deutlich vor. Es schließt sich an das in §. 6 aufgestellte an, und läßt sich leicht auf jeden besondern Fall anwenden. Diese Gleichungen lassen sich auch nach Art der in Nro. 7 gegebenen umformen.

Endlich läßt sich auch folgende Entwicklung gewinnen.

Es ist

$$\begin{aligned}(b_1 + b_2 k + b_3 k^2)^q &= b_1^q \left(1 + \frac{b_2}{b_1} k + \frac{b_3}{b_2} k^2\right)^q = b_1^q [1 + c_2 k + c_3 k^2]^q \\ &= b_1^q [(1 + c_2 k) + c_3 k^2]^q\end{aligned}$$

worin

$$\begin{aligned}b_1 &= a_1 + a_2 x + a_3 x^2, & c_2 &= \frac{b_2}{b_1}, \\ b_2 &= a_2 + 2 a_3 x, & c_3 &= \frac{b_3}{b_1} \\ b_3 &= a_3\end{aligned}$$

ist. Wird diese Entwicklung mittelst des Binomiums ausgeführt und dann die Vorzahl von k^n bestimmt, so entsteht

$$\begin{aligned}15) \quad &\frac{d^n (a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^q}{(dx)^n} = \\ &= 1^{n!} b_1^q [(q)_n c_2^n + q(q-1)_{n-2} c_2^{n-2} c_3 + (q)_2 (q-2)_{n-4} c_2^{n-4} c_3^2 + (q)_3 (q-3)_{n-6} c_2^{n-6} c_3^3 + \dots]\end{aligned}$$

Hierin gelten die oben angeführten Werthe.

Eben so ist

$$\begin{aligned}16) \quad &\frac{d^n (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3)^q}{(dx)^n} = \\ &= 1^{n!} b_1^q [(q)_n c_2^n + q(q-1)_{n-2} c_2^{n-2} c_3 + (q)_2 (q-2)_{n-4} c_2^{n-4} c_3^2 + \dots] \\ &\quad + 2(q-1)_{n-3} c_2^{n-3} c_4 \quad \left| \begin{array}{l} + 2(q-2)_{n-5} c_2^{n-5} c_3 c_4 \\ + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} (q-2)_{n-6} c_2^{n-6} c_4^2 \end{array} \right.\end{aligned}$$

Hier gelten folgende Bedingungsgleichungen

$$17) \quad b_1 = a_1 + a_1 x + a_3 x^2 + a_4 x^3, \quad c_2 = \frac{b_2}{b_1}$$

$$b_2 = a_2 + 2 a_3 x + 3 a_4 x^2 \quad c_3 = \frac{b_3}{b_1}$$

$$b_3 = a_3 + 3 a_4 x \quad c_4 = \frac{b_4}{b_1}$$

$$b_4 = a_4$$

Eben so ist

$$18) \quad \frac{d^n (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4)^n}{(dx)^n} =$$

$$= 1^{n-1} b_1^n \left(\begin{array}{l} (q)_n c_2^n + q \left[(q-1)_{n-2} c_2^{n-2} c_3 + (q)_2 \left[(q-2)_{n-4} c_2^{n-4} c_3^2 + \dots \right] \right. \\ \left. (q-1)_{n-3} c_2^{n-3} c_4 \right. \\ \left. (q-1)_{n-4} c_2^{n-4} c_5 \right] \\ \left. + 2 \left[(q-2)_{n-5} c_2^{n-5} c_3 c_4 \right. \right. \\ \left. (q-2)_{n-6} c_2^{n-6} c_3 c_5 \right. \\ \left. + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} \left[(q-2)_{n-6} c_2^{n-6} c_4^2 \right. \right. \\ \left. \left. 2 (q-2)_{n-7} c_2^{n-7} c_4 c_5 \right. \right. \\ \left. \left. (q-2)_{n-8} c_2^{n-8} c_5^2 \right] \right] \end{array} \right)$$

Hier gelten folgende Bedingungsgleichungen

$$19) \quad b_1 = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4 \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{b_2}{b_1}$$

$$b_2 = a_2 + 2 a_3 x + 3 a_4 x^2 + 4 a_5 x^3 \quad c_3 = \frac{b_3}{b_1}$$

$$b_3 = a_3 + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} a_4 x + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} a_5 x^2 \quad c_4 = \frac{b_4}{b_1}$$

$$b_4 = a_4 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_5 x \quad c_5 = \frac{b_5}{b_1}$$

$$b_5 = a_5$$

Diese Darstellungen lassen sich, wie man sieht, leicht weiter fortsetzen.

Von den in diesem §. aufgefundenen Gleichungen hat Nro. 6 Pag. 40 Lagrange, Mém. de l'Acad. à Berlin 1772; Nro. 3 §. 9 Pag. 36 Lacroix, Calcul différ. et intégr. T. I Pag. 183 entwickelt.

§: 11.

Wir machen nun Anwendungen der gefundenen Resultate auf einige besondere Fälle.

Es ist bekanntlich

$$\frac{d \text{ Arc Tgx}}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$$

Nimmt man hievon das n^{te} Differenzial und theilt durch $(dx)^n$, so ist

$$1) \frac{d^{n+1} \text{ Arc Tgx}}{(dx)^{n+1}} = \frac{d^n}{(dx)^n} \frac{1}{1+x^2}$$

Um nun den $(n+1)^{\text{ten}}$ Differenzial-Quotienten des Bogens, dessen Tangente x ist, zu erhalten, hat man den n^{ten} Differenzial-Quotienten von $(1+x^2)^{-1}$ zu bestimmen.

Da $\frac{1}{1+x^2}$ eine Function von einer Function ist, so erreicht man die Absicht, wenn man in 3 §. 9 Pag. 36 solche Werthe für a_1, a_2, a_3 und q annimmt, welche die vorstehende Function erzeugen und sie dann in die entwickelte Darstellung einführt. Man hat sofort $q = -1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$ zu setzen. Hiedurch wird

$$(-1)^{n-1} = (-)^n 1^{n-1}, (-1-n+1)^{r-1} = (-)^r n^{r-1}$$

und es zerstören sich einzelne Glieder in den Fakultäten von n , welche in der Darstellung auf der rechten Seite in 3 §. 9 erscheinen.

Der $(n+1)^{\text{te}}$ Differenzial-Quotient des Bogens, dessen Tangente x heisst, ist daher

$$2) \frac{d^{n+1} \text{ Arc Tgx}}{(dx)^{n+1}} = (-)^n \frac{1.2.3\dots n.2^n x^n}{(1+x^2)^{n+1}} \left(1 - \frac{n-1}{1} \frac{1+x^2}{2^2 x^2} \right. \\ + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} \frac{(1+x^2)^2}{2^4 x^4} \\ - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{(1+x^2)^3}{2^6 x^6} \\ \vdots \\ (-)^r \frac{(n-r)^{r-1}}{1^{r-1}} \frac{(1+x^2)^r}{2^{2r} x^{2r}} \\ \vdots \\ \left. \right)$$

Eine andere Darstellung gewinnt man, wenn man die Gleichung 7 §. 10 Pag. 40 zu Grunde legt und die oben angegebenen Werthe einführt. Es wird dann

$$(-2)^{n-1} = (-)^n 2^{n-1} = (-)^n 1^{n-1}, (-1)_r = (-)^r \frac{1^{r-1}}{1^{r-1}} = (-)^r$$

und man erhält

$$3) \frac{d^{n+1} \text{Arc Tgx}}{(dx)^{n+1}} = (-)^n \frac{1.2.3 \dots (n+1) x^n}{(1+x^2)^{n+1}} \left(1 - \frac{n(n-1)}{1.2.3 x^2} \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5 x^4} \right. \\ \left. - \frac{n(n-1) \dots (n-5)}{1.2 \dots 7 x^6} \right. \\ \left. + \frac{n(n-1) \dots (n-7)}{1.2 \dots 9 x^8} \right.$$

$$(-)^r \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{1.2.3 \dots (r-1) x^r}$$

Die Darstellung 2 läßt sich noch auf eine andere und folgende Weise umgestalten.

Vervielfacht man mit 2^n , so geht Nro 2 über in

$$4) \frac{d^{n+1} \text{Arc Tgx}}{(dx)^{n+1}} = \\ = (-)^n \frac{1^{n-1} x^n}{(1+x^2)^{n+1}} \left(2^n - (n-1) \frac{2^{n-2}(1+x^2)}{x^2} + (n-2) \frac{2^{n-4}(1+x^2)^2}{x^4} - (n-3) \frac{2^{n-6}(1+x^2)^3}{x^6} + \dots \right)$$

Nun ist, wie aus der beifolgenden Figur erhellt,

$$\frac{d^{n+1} \text{Arc Tgx}}{(dx)^{n+1}} =$$

$$= (-)^n \cdot 1^{n+1} (\sin z)^n \cdot (\cos z)^{n+2} \left(2^n - \frac{(n-1)2^{n-2}}{(\sin z)^2} + \frac{(n-2)(n-3)2^{n-4}}{1 \cdot 2 (\sin z)^4} - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)2^{n-6}}{1 \cdot 2 \cdot 3 (\sin z)^6} \right)$$

Wird nun $z = \frac{\pi}{2} - u$ gesetzt, so erhält man

$$\sin z = \sin \left(\frac{\pi}{2} - u \right) = \cos u \text{ und } \cos z = \cos \left(\frac{\pi}{2} - u \right) = \sin u$$

Führt man diese Werthe in die vorstehende Gleichung ein, so ist

$$8) \frac{d^{n+1} \text{Arc Tgx}}{(dx)^{n+1}} =$$

$$= (-)^n \cdot 1^{n+1} (\sin u)^{n+1} (\cos u)^n \sin u \left(2^n - \frac{(n-1)2^{n-2}}{(\cos u)^2} + \frac{(n-2)(n-3)2^{n-4}}{1 \cdot 2 (\cos u)^4} - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)2^{n-6}}{1 \cdot 2 \cdot 3 (\cos u)^6} + \dots \right)$$

$$= (-)^n \cdot 1^{n+1} \sin u (\sin u)^{n+1} \left(2^n (\cos u)^n - (n-1)2^{n-2} (\cos u)^{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} 2^{n-4} (\cos u)^{n-4} - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2^{n-6} (\cos u)^{n-6} + \dots \right)$$

Nun stellt die Trigonometrie (s. m. Lehrbuch der Geometrie Nro. 6 § 130 Pag. 219) folgenden Satz auf

$$\sin (n+1) u = \sin u \left(2^n (\cos u)^n - (n-1)2^{n-2} (\cos u)^{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} 2^{n-4} (\cos u)^{n-4} - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2^{n-6} (\cos u)^{n-6} + \dots \right)$$

Wird diese Gleichung für die Darstellung 8 benutzt, so erhält man

$$9) \frac{d^{n+1} \text{Arc Tgx}}{(dx)^{n+1}} = (-)^n \cdot 1^{n+1} (\sin u)^{n+1} \sin (n+1) u$$

oder auch

$$10) \frac{d^{n+1} \text{Arc Tgx}}{(dx)^{n+1}} = (-)^n \cdot 1^{n+1} (\cos z)^{n+1} \cos (n+1) z$$

für

$$z = \text{Arc Tgx}, z = \frac{\pi}{2} - u, \sin z = \cos u, \cos z = \sin u$$

Hieraus folgt weiter

$$11) \frac{d^{n+1} \text{Arc Tgx}}{(dx)^{n+1}} = (-)^n 1^{n+1} (\cos z)^{n+1} \sin(n+1) \left(\frac{\pi}{2} - z \right)$$

$$12) \frac{d^{n+1} \text{Arc Tgx}}{(dx)^{n+1}} = (-)^n 1^{n+1} (\cos [\text{Arc Tgx}])^{n+1} \sin(n+1) \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arc Tgx} \right)$$

$$13) \frac{d^{n+1} \text{Arc Tgx}}{(dx)^{n+1}} = (-)^n 1^{n+1} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - z \right) \right]^{n+1} \sin(n+1) \left(\frac{\pi}{2} - z \right)$$

$$14) \frac{d^{n+1} \text{Arc Tgx}}{(dx)^{n+1}} = (-)^n 1^{n+1} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arc Tgx} \right) \right]^{n+1} \sin(n+1) \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arc Tgx} \right)$$

u. s. w.

Da nun nach 1

$$\frac{d^{n+1} \text{Arc Tgx}}{(dx)^{n+1}} = \frac{d^n (1+x^2)^{-1}}{(dx)^n}$$

ist, so erhält man sofort

$$15) \frac{d^n}{(dx)^n} \frac{1}{1+x^2} = (-)^n 1^{n+1} \left[\cos (\text{Arc Tgx}) \right]^{n+1} \sin(n+1) \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arc Tgx} \right)$$

$$= (-)^n 1^{n+1} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arc Tgx} \right) \right]^{n+1} \sin(n+1) \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arc Tgx} \right)$$

Da nun

$$\sin(n\pi + \beta) = (-)^n \sin \beta$$

ist, so hat man auch folgende Darstellungen

$$16) \frac{d^{n+1} \text{Arc Tgx}}{(dx)^{n+1}} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n (\sin u)^{n+1} \sin(n+1) [n\pi + u]$$

$$17) \frac{d^{n+1} \text{Arc Tgx}}{(dx)^{n+1}} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - z \right) \right]^{n+1} \sin(n+1) \left[\frac{2n+1}{2} \pi - z \right]$$

$$18) \frac{d^{n+1} \text{Arc Tgx}}{(dx)^{n+1}} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arc Tgx} \right) \right]^{n+1} \sin(n+1) \left[\frac{2n+1}{2} \pi - \text{Arc Tgx} \right]$$

u. s. w.

Die Gleichungen 2, 3 und 11 finden sich auch von Pfaff in seinem Aufsatz über „Lokalformeln für höhere Differenziale“ in der 2ten Sammlung combinatorisch analytischer Abhandlung von Hindenburg Pag. 168 u. ff. entwickelt.

§. 12.

Die Differenzial-Rechnung zeigt, dafs

$$\frac{d \operatorname{Arc Sin} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

ist. Hieraus hat man

$$1) \frac{d^{n+1} \operatorname{Arc Sin} x}{(dx)^{n+1}} = \frac{d^n}{(dx)^n} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Setzt man nun $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$, $q = -\frac{1}{2}$ in 3 §. 9, Pg. 36 so erhält man für den $(n+1)^{\text{ten}}$ Differenzial-Quotienten von $\operatorname{Arc Sin} x$

$$2) \frac{d^{n+1} \operatorname{Arc Sin} x}{(dx)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} 2^n x^n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{n(n-1)(1-x^2)}{\left(n-\frac{1}{2}\right) 2^2 x^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(1-x^2)^2}{1 \cdot 2 \left(n-\frac{1}{2}\right) \left(n-\frac{3}{2}\right) 2^4 x^4} + \frac{n(n-1) \dots (n-5)(1-x^2)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \left(n-\frac{1}{2}\right) \left(n-\frac{3}{2}\right) \left(n-\frac{5}{2}\right) 2^6 x^6} \right]$$

oder

$$3) \frac{d^{n+1} \operatorname{Arc Sin} x}{(dx)^{n+1}} = \frac{1^{n/2} x^n}{(\sqrt{1-x^2})^{2n+1}} \left[1 + \frac{n(n-1)(1-x^2)}{2n-1 \cdot 2 x^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(1-x^2)^2}{1 \cdot 2 \cdot (2n-1)(2n-3) 2^2 x^4} + \frac{n(n-1) \dots (n-5)(1-x^2)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 (2n-1)(2n-3)(2n-5) 2^3 x^6} + \dots + \frac{n^{2r-1} (1-x^2)^r}{1^{r-1} (2n-1)^{r-2} 2^r x^{2r}} \right]$$

Wählt man die Darstellung 7 §. 9 Pg. 37 und setzt in ihr die oben angeführten Werthe statt a_1 , a_2 , a_3 und q , so erhält man folgende Darstellung

$$4) \frac{d^{n+1} \text{Arc Sin } x}{(dx)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n x^n}{(\sqrt{1-x^2})^{2n+1}} \left[1 + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1 \cdot 2 x^2} \right. \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 x^4} \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot n(n-1) \dots (n-5)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6 x^6} \\ \vdots \\ + \frac{1^{r/2} n^{2r-1}}{2^{r/2} 1^{2r-1} x^{2r}} \\ \vdots \\ \left. \right]$$

Ferner zeigt die Differenzial-Rechnung, dafs

$$\frac{d \text{Arc Cos } x}{dx} = - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d \text{Arc Cot } x}{dx} = - \frac{1}{1+x^2}$$

Es ist daher

$$5) \frac{d^{n+1} \text{Arc Cos } x}{(dx)^n} = - \frac{d^n}{(dx)^n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = - \frac{d^{n+1} \text{Arc Sin } x}{dx^{n+1}}$$

$$6) \frac{d^{n+1} \text{Arc Cot } x}{(dx)^n} = - \frac{d^n}{(dx)^n} \frac{1}{1+x^2} = - \frac{d^{n+1} \text{Arc Tg } x}{(dx)^{n+1}}$$

Hiernach sind die höhern Differenzial-Quotienten der Bogen von Cosx und Cotx auf die von Sinx und Tgx zurückgebracht.

Auf gleiche Weise lassen sich die höhern Differenzial-Quotienten des Bogens der Sekante darstellen.

Es ist bekanntlich

$$\frac{d \text{Arc Sec } x}{dx} = \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{-x^2+x^4}}$$

Hiernach ist

$$\frac{d^{n+1} \text{Arc Sec } x}{(dx)^{n+1}} = \frac{d^n}{(dx)^n} \frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}}$$

Wählt man nun die Darstellung 7 §. 9 Pg. 37, so ergibt sich der gesuchte Differenzial-Quotient, wenn man

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, a_2 = 0, a_3 = -1, a_4 = 0, a_5 = 1 \\ b_1 &= -x^2 + x^4 = x^2(x^2-1) \\ b_2 &= -2x + 4x^3 = 2x(2x^2-1) \\ b_3 &= -1 + 6x^2 = 6x^2-1 \\ b_4 &= 4x = 4x \\ b_5 &= 1 = 1 \end{aligned}$$

setzt. Scheidet man nun die gemeinschaftlichen Factoren b_1^{q-n}, b_2^n und die Fakultät q^{n-1} aus, und läßt die sich zerstörenden Glieder weg, so erhält man

$$\begin{aligned} 7) \frac{d^{n+1} \text{Arc Sec } x}{(dx)^{n+1}} &= \\ = (-)^n \frac{1^{n/2} (2x^2-1)^n}{x^{n+1} (x^2-1)^{n+\frac{1}{2}}} &\left[1 - \frac{n^{n-1} (x^2-1) (6x^2-1)}{1 (2n-1) 2 (2x^2-1)^2} + \frac{n^{4-1} (x^2-1)^2 (6x^2-1)^2}{1 \cdot 2 (2n-1)^{2-2} 2^2 (2x^2-1)^4} + \dots \right] \\ &+ \frac{n^{3-1} x (x^2-1)^2 4x}{1 (2n-1)^{2-2} 2 (2x^2-1)^3} - \frac{2n^{5-1} x (x^2-1)^3 (6x^2-1) 4x}{1 \cdot 2 (2n-1)^{3-2} 2^2 (2x^2-1)^5} + \dots \\ &- \frac{n^{4-1} x^2 (x^2-1)^3}{1 (2n-1)^{3-1} 2 (2x^2-1)^4} + \frac{2n^{6-1} x^2 (x^2-1)^4 (6x^2-1)}{1 \cdot 2 (2n-1)^{4-2} 2^2 (2x^2-1)^6} \\ &+ \frac{n^{6-1} x^2 (x^2-1)^4 4^2 x^2}{1 \cdot 2 \cdot (2n-1)^{4-2} 2^2 (2x^2-1)^6} \\ &- \frac{2n^{7-1} x^3 (x^2-1)^5 4x}{1 \cdot 2 (2n-1)^{5-2} 2^2 (2x^2-1)^7} \\ &+ \dots + \frac{n^{8-1} x^4 (x^2-1)^6}{1 \cdot 2 \cdot (2n-1)^{6-1} 2^2 (2x^2-1)^8} \end{aligned}$$

Benutzt man dagegen die Gleichung 12, so hat man die nachstehenden Werthe einzuführen

$$\begin{aligned} b_1 &= x^2 (x^2-1) \\ g &= \frac{b_2}{2b_1} = \frac{2x^2-1}{x(x^2-1)} \\ h_2 &= \frac{4b_1 \cdot b_3 - b_2^2}{4 \cdot b_1^2} = \frac{2x^2-3}{x^2-1} \\ h_3 &= \frac{4}{x(x^2-1)} \\ h_4 &= \frac{1}{x^2(x^2-1)} \\ q &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Hiernach erhält man

$$\begin{aligned}
 8) \quad \frac{d^{n+1} \text{Arc Sec } x}{(dx)^{n+1}} &= \\
 &= (-)^n \frac{1^{n+1} (2x^2-1)^n}{x^{n+1} (x^2-1)^{n+\frac{1}{2}}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{n^{2|-1} x^2 (2x-3)(x^2-1)}{1^{2|1} (2x^2-1)^2} + \frac{1.3}{2.4} \frac{n^{4|-1} (2x^2-3)^2 x^4 (x^2-1)^2}{1^{4|1} (2x^2-1)^4} + \dots \right] \\
 &\quad - \frac{n^{3|-1} 4x^2 (x^2-1)}{1^{2|1} (n-1) (2x^2-1)^3} - \frac{2.n^{5|-1} (2x^2-3) 4x^4 (x^2-1)^3}{1^{4|1} (n-1) (2x^2-1)^5} \\
 &\quad + \frac{n^{4|-1} x^2 (x^2-1)^3}{1^{2|1} (n-1)^{2|-1} (2x^2-1)^4} + \frac{2n^{6|-1} (2x^2-3) x^4 (x^2-1)^4}{1^{4|1} (n-1)^{2|-1} (2x^2-1)^5} \\
 &\quad + \frac{2.1}{1.2} \frac{n^{6|-1} 4x^2 x^4 (x^2-1)^4}{1^{4|-1} (n-1)^{2|-1} (2x^2-1)^6} + \frac{2.n^{7|-1} 4x^4 (x^2-1)^5}{1^{4|1} (n-1)^{3|-1} (2x^2-1)^7} \\
 &\quad + \frac{n^{8|-1} x^4 (x^2-1)^6}{1^{4|1} (n-1)^{4|-1} (2x^2-1)^8}
 \end{aligned}$$

Da nun

$$\frac{d \text{Arc Cosec. } x}{dx} = - \frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}}$$

ist, so hat man

$$9) \quad \frac{d^{n+1} \text{Arc Cosec } x}{(dx)^{n+1}} = - \frac{d^{n+1} \text{Arc Sec } x}{(dx)^{n+1}}$$

und somit sind die höhern Differenzial-Quotienten des Bogens der Cosekante auf die der Sekante zurückgebracht.

Von den hier aufgefundenen Gleichungen findet sich Nro 4 von Euler, Differenzialrechnung 2^{te} Bd. §. 200, Lacroix Calc. différ. et intégr. T. I Pg. 183 und Lagrange Mém. d. l'Acad. die Gleichung 3 von Pfaff. Sammlung combinatorisch analytischer Abhandlungen von Hindenburg. 2^{te} Sammlung: Lokalformeln für höhere Differenziale §. 15 Pg. 175 entwickelt.

Berichtigung.

Seite 38 Zeile 2 von unten ist $(1 + \frac{b_2}{b_1} k + \frac{b_3}{b_1} k^2)^3$ zu lesen statt $(1 + \frac{b_2}{b_1} k + \frac{b_3}{b_1} k^2)$

Seite 39 Zeile 2 von oben ist $[(1 + \frac{b_2}{2b_1} k)_2 + \frac{4b_1 b_3 - b_2^2}{4b_1^2}]^3$ zu lesen statt

$$[(1 + \frac{b_2}{2b_1} b)_2 + \frac{4b_1 b_3 - b_2^2}{4b_1^2} k^2]$$

PROGRAMMI E RIASSUNTI DI CORSI UNIVERSITARI

R. UNIVERSITÀ DI PAVIA

CORSO DI ANALISI SUPERIORE

Anno 1901-1902.

Le ricerche sulle equazioni ai differenziali totali di primo ordine cominciate da PFAFF sul principio del secolo passato (e da ciò le equazioni furono chiamate *pfaffiane*) e lo scopo principale era quello di ricavarne luce per il problema delle equazioni a derivate ali di primo ordine. Fra i primi che se ne occuparono, e con lo intento, è da annoverarsi anche il grande JACOBI.

Il prosieguo di tempo quella teoria si è andata sviluppando in direzioni, e notevoli progressi si son potuti conseguire quando essa si sono applicati i concetti e i risultati relativi alle teorie trasformazioni e della invariantività.

Le ricerche analoghe per le equazioni di ordine superiore al primo, eccettuano alcuni casi molto particolari trattati da GULDBERG, erano state mai intraprese, per quanto, come credo d'avere io stamente mostrato, il loro studio presenta un interesse non trascurabile, e di esse io mi sono perciò a varie riprese occupato in alcuni lavori pubblicati negli ultimi due anni (*Compt. Rend. de l'Acad. de Paris*, t. 130, 1900; *Math. Ann.*, t. 54; *Rend. Ist. Lomb.* (2) t. 33, 1900, p. 287; *ibid.*, p. 675; *ibid.*, t. 34, 1901, p. 563; *ibid.*, p. 1180; *Annali di Matematica* (3) t. 7; *Rend. Ist. Lomb.* (2) t. 34, 1902, p. 244).

Per il corso di Analisi Superiore da me dettato a Pavia in questo anno mi sono proposto di sviluppare appunto i particolari di tutto il complesso di teorie, su cui mi è sembrato interessante richiamare l'attenzione dei giovani, e il mio compito è stato, per le varie parti del corso, agevolato dalla pubblicazione recentemente uscita di un libro di EDUARD V. WEBER (*Vorl. über das Pfaff'sche Problem*, ecc. Leipzig, 1900) in cui è esposta la teoria completa, almeno solo per il caso del primo ordine. È del programma di questo mio Corso di lezioni che mi permetto di dare ora notizia ai lettori di questo periodico.

Milano, Giugno 1902.

ERNESTO PASCAL.

Parab

**Sulla teoria generale delle equazioni ai differenziali totali
di primo e second' ordine**

PARTE I.

*Sulle equazioni a derivate parziali lineari di primo ordine
e sui simboli delle trasformazioni infinitesime*

1. Generazione di una equazione a derivate parziali. — Trasformazione per cui la funzione incognita venga a comparire nell'equazione per mezzo delle sue derivate.
2. Equazione a derivate parziali lineare omogenea di primo ordine $Xf=0$, e sua generazione mediante gli $n-1$ suoi integrali indipendenti. — Sua soluzione generale. — Osservazioni sulle particolari soluzioni singolari ed esempio relativo. — Caratteristiche di tale equazione. — Considerandone il primo membro come simbolo di una trasformazione infinitesima, ogni punto dello spazio si muove lungo la tangente alla caratteristica passante per esso. — Suo integrale come luogo di caratteristiche. — Esempi relativi a superficie cilindriche, coniche, conoidi, di rivoluzione.
3. Trasformazione del simbolo X . — Se alcune delle nuove variabili sono integrali dell'equazione $Xf=0$, il numero dei termini nell'equazione trasformata resta ridotto.
4. Moltiplicatore di JACOBI. — Soddisfa ad una equazione a derivate parziali. — Il quoziente di due moltiplicatori è costante o integrale della equazione. — Se ρ è moltiplicatore, e ω una soluzione particolare, $\rho\omega$ un moltiplicatore, e ogni moltiplicatore si può porre sotto questa forma. — Espressione del moltiplicatore dell'equazione trasformata. — Conosciuti $n-2$ integrali e un moltiplicatore si può con quadrature conoscere l'ultimo integrale. — Caso particolare di $\rho=1$ ed applicazione alle equazioni della dinamica.
5. Studio del simbolo operativo X . — La parentesi $(X_1 X_2)$, sua proprietà. — Identità di JACOBI. — Identità contenute in una Nota nei *Rend. Ist. Lomb.* del 1901, nelle quali si presentano i numeri Bernoulliani. — Studio di questi numeri; dimostrazione delle loro principali proprietà e delle relazioni ricorrenti fra di essi esistenti. — Metodo per ricercare delle nuove relazioni di grado fra i numeri Bernoulliani, seguendo gli sviluppi di una mia Nota nei *Rend. Ist. Lomb.* 1902.
6. Sistemi di equazioni $X_h f=0$, sistemi completi e teoremi relativi. — Sistemi completi sotto la forma Jacobiana *specie*. — Un sistema completo di m equazioni in n variabili ammette s

$n - m$ integrali indipendenti. — Metodo per trovarli. — Semplificazione notevole di MAYER colla quale l'integrazione si riduce a quella di un solo sistema di equazioni differenziali ordinarie. — Esempio relativo.

Sistemi Jacobiani in senso più ampio. — Con una trasformazione di variabili il sistema resta Jacobiano. — Proprietà di questi sistemi in quanto ai loro integrali. — Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema sia Jacobiano. — Trasformazione di un sistema completo in Jacobiano. — Metodo di integrazione di un sistema Jacobiano ed esempio relativo.

Rappresentazione geometrica degli integrali. — Caratteristiche delle equazioni date e superficie integrale. — Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema sia completo espressa mediante una costruzione geometrica relativa alle caratteristiche.

PARTE II.

Equazioni ed espressioni ai differenziali totali di primo ordine o pfaffiane

Significato geometrico di un sistema di $n - m$ equazioni pfaffiane in n variabili. — Sistema di equazioni $Xf = 0$ aggiunto del dato. — Forme simmetriche sotto cui possono mettersi il sistema dato e il suo aggiunto. — Sistema aggiunto di uno risoluto rispetto ai differenziali di $n - m$ variabili.

Sistemi completamente integrabili. — Il sistema aggiunto di uno completamente integrabile è completo e reciprocamente. — Forma di FROBENIUS per le condizioni della completa integrabilità. — Altra forma delle medesime condizioni: una certa matrice gobba deve avere per caratteristica $2n - 2m$. — Applicazione al caso di una sola equazione. — Altra applicazione al caso in cui una espressione pfaffiana si possa ridurre alla forma ρdf , ovvero semplicemente df . — Dimostrazione del teorema che le indipendenti fra le equazioni pfaffiane di cui i coefficienti sono le note espressioni (ij) formate mediante i coefficienti di una equazione pfaffiana data, formano un sistema completamente integrabile.

Moltiplicatore di LIE e sue varie proprietà.

Sistemi completamente integrabili contenuti in altri più ampî. — Sistemi che diventano o restano completamente integrabili coll'aggiunta di relazioni fra le x . — Sistemi parzialmente integrabili. — Sviluppo delle considerazioni contenute in una mia Nota su questo soggetto nei *Rend. Ist. Lomb.* 1902. — Esempi relativi.

PARTE III.

Teoria invariantiva di una equazione pfaffiana

1. Riassunto della teoria dei pfaffiani, cioè delle radici quadrate dei determinanti emisimmetrici di ordine pari. — Notazione di JACOB. Teorema sullo sviluppo di un pfaffiano.
2. Invariante simultaneo di una espressione a derivate parziali di una espressione pfaffiana. — Il sistema aggiunto è connesso invariantivamente al dato.
3. Le tre matrici A, B, C. — Relazioni fra le loro caratteristiche. Queste sono invarianti.

Classe di una espressione pfaffiana Δ . — Espressioni pfaffiane equivalenti. — Cambiamento della classe colla moltiplicazione per un fattore. — Cambiamento della classe coll'aggiunta di un differenziale esatto.

Rango di una equazione pfaffiana. — Equazioni pfaffiane equivalenti.

4. Teoremi varii relativi alle espressioni pfaffiane omogenee.
5. Applicazione di una trasformazione infinitesima ad una espressione pfaffiana. — Espressioni o equazioni pfaffiane che ammettono una o più trasformazioni infinitesime. — Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema di equazioni pfaffiane sia completamente integrabile è che esse ammettano tutte le trasformazioni infinitesime rappresentate dal proprio sistema aggiunto. — Ricerca di tutte le trasformazioni infinitesime che appartengono al sistema aggiunto di una equazione pfaffiana e che la lasciano invariata. — Sistemi V e W. — Trasformazioni infinitesime che lasciano invariata una equazione pfaffiana senza appartenere al sistema aggiunto. — Trasformazioni infinitesime che lasciano invariata, almeno di un differenziale esatto, una equazione pfaffiana. — Proprietà dei sistemi V e W. — Essi sono completi e invariantivamente connessi alla equazione data.

PARTE IV.

Il problema di Pfaff

1. Trasformazione di una espressione pfaffiana nel prodotto di un'altra con una variabile di meno, per un fattore finito contenente tutte le variabili. — Metodo di Pfaff. — Ulteriore riduzione e dimostrazione del teorema che condizione necessaria e sufficiente perchè due equazioni pfaffiane sieno equivalenti è che abbiano il medesimo rango.

Trasformazione di una espressione pfaffiana nella somma di un differenziale esatto e di un'altra contenente una variabile di meno. — Ulteriore riduzione e dimostrazione del teorema che condizione necessaria e sufficiente perchè due espressioni pfaffiane sieno equivalenti è che abbiano la medesima classe.

Costruzione, mediante i pfaffiani, del sistema di equazioni differenziali da cui dipende la riduzione di PFAFF. — Notevole semplificazione di JACOBI colla quale, nella ulteriore riduzione, in luogo di tanti sistemi di equazioni differenziali ordinarie, ne basta uno solo. — Caso in cui nella equazione mancano dei termini. — Esempi di risoluzione del problema di PFAFF.

Applicazione del problema di PFAFF all'integrazione di una equazione generale a derivate parziali di primo ordine. — Semplificazione di JACOBI. — Esempi. — Considerazioni varie sugli integrali completi di una equazione a derivate parziali di primo ordine e metodo per passare dall'uno all'altro. — Esempi varii.

Il problema di PFAFF dal punto di vista della teoria delle trasformazioni. — Per effettuare la prima riduzione bisogna trovare gli $n-1$ integrali indipendenti di una delle equazioni del sistema V o W secondo i casi.

PARTE V.

Le equazioni ai differenziali totali di second'ordine

Sistemi di tali equazioni nel caso in cui si immaginano alcune delle variabili come dipendenti. — Esposizione di quanto è contenuto nella mia Memoria nel vol. 54 dei *Math. Annalen*. — Sistemi completamente integrabili, parzialmente e singolarmente integrabili. — Il simbolo in parentesi quadra il cui annullarsi rappresenta le condizioni necessarie e sufficienti per la completa integrabilità. — Teoria del moltiplicatore. — Equazioni cui questo soddisfa. — Esempi.

Sopra certi sistemi di equazioni a derivate parziali lineari omogenee di second'ordine. — Esposizione della mia Nota su questo soggetto nei *Rend. Ist. Lomb.* 1901. — Definizione di sistema completo per il caso del second'ordine. — Un caso particolare comprendente a sua volta quello dei coefficienti costanti. — Teorema relativo a questo caso. — Il caso di una sola equazione. — Esempio.

I sistemi di tipo generale ai differenziali totali di second'ordine. — Esposizione della mia Memoria negli *Annali di Matematica* (3) t. 7. — Completa integrabilità di una sola equazione. — Introduzione di varii simboli e relazioni fra essi. — Equazione di primo

ordine aggregata alla data. — Completa integrabilità di sistema. — Trasformazione di una forma ai differenziali totali di second'ordine. — Invariante simultaneo di una siffatta forma e un'altra a derivate parziali lineare omogenea di second'ordine. — Sistema aggiunto. — Espressioni simmetriche per il sistema e il suo aggiunto. — Caso in cui le equazioni sieno risolte rispetto ad alcuni dei differenziali secondi. — Sistema completo di equazioni a derivate parziali di second'ordine. — Applicazione delle operazioni di primo e second'ordine su di un'espressione ai differenziali totali di second'ordine. — Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema sia completamente integrabile è che sia invariabile per tutte le operazioni della schiera generale presentata dal proprio sistema aggiunto.

4. Esposizione dei risultati dell'altra mia Nota nei *Rend. Ist. Lomb.* 1901 sulla invariantività delle caratteristiche di certe matrici formate in un conveniente modo mediante i coefficienti di una data espressione ai differenziali totali di second'ordine.
5. Cenno sulle equazioni ai differenziali totali di ordine superiore al secondo, e dei risultati contenuti nelle mie due apposite Note nei *Rend. Ist. Lomb.* 1900. — Invariante simultaneo di due espressioni, l'una a derivate parziali e l'altra ai differenziali totali di ordine qualunque, ed esposizione dell'altra mia Nota, su questo soggetto, pubblicata nei *Rend. Ist. Lomb.*, giugno 1902.

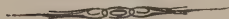
Estratto dal Fascicolo di Luglio, Agosto e Settembre 1902
del **Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche**
(Torino, C. CLAUSEN, editore).

In capitolo di Calcolo differenziale

(sulla serie di Taylor-Maclaurin)

Nota di

ERNESTO PASCAL



Un capitolo di Calcolo differenziale

(sulla serie di Taylor-Maclaurin)

Nota di ERNESTO PASCAL, a Pavia.

Dopo la grande estensione data al concetto di funzione di una o variabili, i principali teoremi e procedimenti del calcolo differenziale hanno perduto la loro validità, e quindi da parecchi anni e per opera di varii autori, è cominciato un lavoro per stabilire, per ciascuno di essi, le condizioni necessarie e sufficienti di validità. Ora per alcuni pochi di tali teoremi il problema è risoluto in modo soddisfacente; per altri o non è stato risoluto, o lo è stato da alcuni in maniera che il risultato diventa quasi illusorio; inquantochè è chiaro che si potrà dire d'aver risoluto veramente il problema, quando le condizioni di cui si parla sono espresse sotto una forma facilissima, tale da potersi applicare con poca difficoltà ai singoli casi speciali. Quando invece l'applicazione di quelle condizioni al caso singolo presenta difficoltà maggiori che non l'esaminare direttamente su quella la validità o meno del teorema, allora a buon diritto si può dire che il vantaggio e l'importanza del risultato ottenuto sono illusorii, e non si è fatto un vero progresso nella scienza. Ma ciò è accaduto per alcuni dei teoremi fondamentali del calcolo, e accaduto anche per la serie di Taylor, come dirò più sotto. Perché una funzione di variabile complessa sia sviluppabile in serie di Taylor nell'intorno di un punto, si sa da moltissimo tempo (sin da Cauchy) sotto qual forma semplice sono espresse le condizioni necessarie e sufficienti; ma non è più lo stesso per le funzioni di variabili reali, caso che non può ricavarci dal primo, come caso particolare. Dopo un lavoro di König, che a mio giudizio non risolveva affatto il problema, è comparso, in questi ultimi mesi, un lavoro di Pringsheim⁽¹⁾, il cui risultato è senza dubbio semplice ed elegante, e perciò

⁽¹⁾ PRINGSHEIM. *Ueber die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen des Taylor'schen Lehrsatzes für Functionen einer reellen Variablen*. Math. Ann., vol. 44, p. 57.

suscettibile di entrare subito a far parte delle ordinarie lezioni di calcolo infinitesimale.

Ora io mi propongo con questa Nota di far conoscere e divulgare fra noi questo risultato del Pringsheim che rappresenta un vero progresso nella scienza, e di esporlo in un modo che mi sembra semplice, e dal punto di vista didattico, assai conveniente; aggiungendo poi ancora qualche considerazione che mi è riuscito di fare sull'argomento stesso.

Sarà poi pregio del lavoro premettere alcune considerazioni generali sul problema che ci occupa, sui suoi affini e sulla sua storia.

§ 1.

Funzioni indefinitivamente derivabili.

S'intende facilmente come al problema dello sviluppo di una funzione in serie infinita di Taylor, sia affine l'altro della derivabilità indefinita della funzione stessa.

Anzi Lagrange credette che i due problemi fossero la stessa cosa, e cioè per la sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor bastasse che esistessero e fossero finite le derivate di qualunque ordine della funzione.

Anche l'Hankel nel suo celebre e relativamente recente lavoro sulle funzioni oscillanti ⁽²⁾ pare che abbia ammessa per vera l'asserzione di Lagrange.

Il Cauchy ⁽³⁾ però sin da moltissimo tempo riconobbe pel primo falsa l'asserzione di Lagrange e addusse l'esempio della funzione che per x diverso da zero è $e^{-\frac{1}{x^2}}$ e per $x=0$ è zero, come un esempio di funzione contraddicente a quella asserzione.

La legittimità, e, dirò così, la purezza di un tale esempio, è stata poi oppugnata da Du Bois Reymond ⁽⁴⁾ e da Pringsheim ⁽⁵⁾, i quali del resto hanno trovato migliori esempi di funzioni della specie indicata. La difficoltà cui dà luogo l'esempio di Cauchy consiste in ciò che il valore della funzione nel punto $x=0$ non è dato dal

⁽¹⁾ Opere, vol. 9, p. 65; v. 10, p. 72.

⁽²⁾ Math. Ann., v. 20 (1870).

⁽³⁾ Leçons, etc., p. 152 (1823).

⁽⁴⁾ *Gültigkeitsbereich des Taylor'schen Entwick.* Math. Ann., v. 2 v. p. 114.

⁽⁵⁾ *Zur Theorie der Taylor'schen Reihe, etc.* Math. Ann., vol. 4 p. 153. — *Functionen mit endlichen differentialquot.* etc., Math. Ann., v. 4

a formola analitica che fornisce gli altri valori della funzione; il del resto dal punto di vista del moderno e largo concetto di funzione non è una vera difficoltà. È sempre però desiderabile trovare tipi esenti da una siffatta obiezione. Gli autori citati ne hanno trovati moltissimi, e ad essi può aggiungersi anche un'altra funzione predata da Mittag Leffler ⁽¹⁾ e che ha il vantaggio d'essere assai semplice.

Data una funzione indefinitivamente derivabile si può formare la serie di Taylor corrispondente riferita ad un certo punto x_0 . Ora se la funzione è sviluppabile nell'intorno (a destra o a sinistra) di x_0 , solo deve accadere che tale serie così formata sia convergente, anche che il suo valore per ogni x dell'intorno di x_0 sia eguale al valore della funzione. Se non si verifica la seconda condizione, la serie non sarà sviluppabile, ma la serie che abbiamo formata potrebbe ancora essere convergente.

A prescindere dall'esempio di Cauchy, è stato il Pringsheim, che ha trovato il primo esempio di una funzione non sviluppabile in serie di Taylor, che poi la serie di Taylor è convergente (v. Math. Ann., vol. 42). Per completare queste indicazioni storiche possiamo notare che non si può trovare una funzione che pure avendo le derivate tutte definite, in tutti i punti di un segmento, non sia sviluppabile in serie di Taylor riferita ad un certo punto del segmento stesso, ma si può trovare, come ha fatto vedere il Du Bois Reymond (Math. Ann., t. 21. pp. 115-116, §§ 7-8), una funzione che abbia la stessa singolarità rispetto a qualunque punto del segmento stesso.

§ 2.

Discussione generale sulla sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor. Condizioni di König.

Il problema della sviluppabilità in serie di Taylor consiste in questo: quali condizioni occorrono per la funzione $f(x)$ definita in tutto un intervallo da a sino ad $a + H$, perchè

1. La serie di Taylor formata nel solito modo mediante le derivate di $f(x)$ nel punto a sia convergente per ogni $h < H$.

2. Il suo valore per ogni $h < H$ sia il valore di $f(a + h)$.

Dai principii del calcolo si sa in che maniera si può esprimere la condizione necessaria e sufficiente, perchè ciò accada; è necessario ed sufficiente (oltre naturalmente la derivabilità indefinita della funzione

(1) Acta Math., vol. 15, p. 279.

in tutto l'intervallo da a ad $a + H$) che il cosiddetto resto R_n che è una funzione di h e di \mathfrak{S} (numero compreso fra 0 e 1) converge a zero per $n = \infty$. Ora il numero \mathfrak{S} dipende anche da n e da h , quindi in generale varierà con n ; non conoscendo la dipendenza da n , non ci riesce sempre possibile verificare se R_n converge a zero. Nei casi più ordinarii può accadere che R_n converga a zero per qualunque \mathfrak{S} , e che effettivamente questa sua convergenza a zero la possiamo verificare indipendentemente dalla conoscenza del valore di \mathfrak{S} , ma se ciò non accade, il problema naturalmente resta irrisolto per questa via, almeno colle nozioni che abbiamo sino al presente.

E c'è da notare ancora che in generale altro è cercare il limite di R_n supponendo \mathfrak{S} fisso, pure avente qualunque valore fra 0 e 1, altro è cercarne il limite quando si suppone \mathfrak{S} variabile con n ; il primo risulta dalla teoria generale della continuità delle funzioni di due variabili; perchè può bensì immaginarsi una funzione di due variabili n, \mathfrak{S} , tale che esista il limite di essa quando ci avviciniamo al punto rappresentativo dei valori limiti delle variabili in certe direzioni, non esista quando ci avviciniamo in altre direzioni o in altra maniera.

Quindi il convergere a zero di R_n per qualunque valore fisso di \mathfrak{S} (compreso fra 0 e 1) non lo possiamo riguardare a tutto rigore come una condizione sufficiente per il nostro problema. La difficoltà è però tolta se la convergenza a zero di R_n non è una convergenza semplice, ma una convergenza uniforme per qualunque \mathfrak{S} , perchè allora R_n tende a zero anche se \mathfrak{S} varia in qualunque maniera con n .

Il risultato ultimo della ricerca di Pringsheim è appunto questo, che cioè se per espressione di R_n si considera quella cosiddetta di Cauchy, allora se esso deve convergere a zero per quello speciale valore di \mathfrak{S} variabile con n , esso deve convergere a zero uniformemente; si può così fare assolutamente astrazione della conoscenza della dipendenza di \mathfrak{S} da n ; ciò costituisce una proprietà certamente singolare del Resto di Cauchy.

Vogliamo ora raccogliere qui ordinatamente, per chiarezza di esposizione, alcune osservazioni fondamentali facilmente deducibili dalla teoria ordinaria delle serie di potenze.

1). Supponiamo che per ogni valore di $h \leq H$, $f(a + h)$ sia sviluppabile in serie di Taylor riferita al punto a , e ordinata secondo le potenze di h . Possiamo dire che per ogni $h < H$, $f^{(r)}(a + h)$ sarà anche sviluppabile in serie di Taylor.

2). Nelle stesse ipotesi del numero precedente, non possiamo dire che $f(a - h)$ (mutando cioè il segno ad h) sia anche sviluppabile in serie di Taylor.

Dai noti principii della teoria delle serie di potenze si ricava bensì

se $h < H$ la serie che si deduce mutando $+h$ in $-h$, è anche convergente, ma non si può dedurre che il suo valore sarà $f(a-h)$.

3). Nello stesso modo, se si sa che $f(a+H)$ è sviluppabile in serie di Taylor riferita al punto a , si può bensì dedurre dalla teoria delle serie di potenze che la stessa serie per ogni $|h| < |H|$ è anche convergente; ma non si può dedurre che il suo valore è $f(a+h)$.

4). Nelle stesse ipotesi, se $f(a+h)$ è sviluppabile in serie di Taylor riferita al punto a per ogni $h < H$, sarà per i medesimi valori di h , sviluppabile in serie di Taylor riferita ad un qualunque altro punto $a+k$ fra a e $a+h$ ($|k| < |h|$; dove k, h sono del medesimo segno).

Ponendo $h-k=k'$, per le ipotesi fatte si ha che k' è del medesimo segno di h e quindi di k , e inoltre

$$f(a+h) = f(a+k+k') = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (k+k')^n$$

$$f(a+k) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) k^n$$

$$f^{(r)}(a+k) = \sum_r^{\infty} \frac{1}{n-r!} f^{(n-r)}(a) k^{n-r}$$

quindi sviluppando e ordinando il primo di questi sommatorii secondo le potenze di k' (il che non altera la serie, perchè per $k+k' < H$ la serie di potenze è assolutamente convergente ⁽¹⁾) si ha:

(¹) S'incominci col notare che k, k' sono due numeri del medesimo segno per le nostre ipotesi; il secondo membro di $f(a+h)$, sviluppandosi la potenza n^{ma} di $(k+k')$, può scriversi sotto forma di una particolare serie doppia

$$\left. \begin{array}{l} f(a) + f'(a)k + \frac{1}{2}f''(a)k^2 + \dots \\ 0 + f'(a)k' + \frac{1}{2}f''(a)kk' + \dots \\ 0 + 0 + \frac{1}{2}f''(a)k'^2 + \dots \end{array} \right\} \quad (A)$$

cui se considero i valori assoluti di tutti i termini, e sommo per verticali ho la serie convergente $\sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} |f^{(n)}(a)| (k+k')^n$; per un teorema sulle serie doppie, si ha quindi che la serie doppia (A) è convergente, posso cioè sommare i termini per orizzontali invece che per verticali, ed il risultato il medesimo. Non si potrebbero fare le stesse deduzioni se k, k' fossero di segno opposto.

$$f(a+h) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a+k) k^n$$

la quale formola dimostra il nostro assunto.

5). Perchè $f(a+h)$ sia sviluppabile in serie di Taylor riferita al punto a , è evidentemente necessario che esistano e siano finite tutte le derivate di ordine finito di $f(x)$ prese nel punto a ; per lo che è naturale che se manca questa condizione, vien meno la stessa formola della serie. Ora dalla considerazione del numero precedente risulta che per le stesse ragioni debbono esistere ed essere finite tutte le derivate $f^{(n)}(a+k)$ essendo k qualunque fra a e $a+H$; quindi ricaviamo subito che la funzione $f(x)$ deve avere in ogni punto dell'intervallo (escluso al più l'estremo $x=a+H$) derivata finita di qualunque ordine.

Notiamo però che ciò non toglie che, crescendo n all'infinito, la derivata possa crescere oltre ogni limite ⁽¹⁾.

6). Un'ultima osservazione finalmente ci dà argomento a parlare delle condizioni di sviluppabilità trovate da König e a cui abbiamo già accennato. La stessa considerazione del numero 4) ci fa vedere che la serie

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) k'^n$$

deve essere convergente per ogni x del campo, e per ogni k' tale che $x+k' < a+H$.

Ora questa è appunto una delle condizioni trovate dal König insieme all'altra condizione che la stessa serie dev'essere derivabile termine a termine rispetto ad x . Le condizioni enumerate dal König erano propriamente tre; lo Stolz poi nel suo corso di calcolo, riferendosi ai risultati di König, aggiunge anche una quarta condizione ⁽³⁾. Ora chi non vede che le condizioni di sviluppabilità espresse così non risolvono il problema, perchè lo riconducono ad altri problemi di natura anche più difficile che esso non sia?

Nè vale il notare, come fa il König in una noticina alla fine del suo lavoro, che quelle condizioni possono applicarsi facilmente all'

⁽¹⁾ Il MANSION (*Note sur quelques principes*, etc. *Annales de la Société scient. de Bruxelles*, 1879) e il KÖNIG (*Nouvelles démonstr.*, etc. *Nouvelles Annales*, 2^a serie, t. 13, p. 270), sono incorsi al proposito in errori.

⁽²⁾ KÖNIG. *Ueber die Bedingungen der Gültigkeit der Taylor'schen Reihe*. *Math. Ann.*, vol. 23, p. 450.

⁽³⁾ STOLZ. *Grundzüge*, etc., I, p. 110-111.

ie binomiale, perchè la serie binomiale può studiarsi con mezzi
che più facili che non siano quelli del König, e nel caso generale
si può sostenere essere agevole il riconoscere che una certa serie sia
o derivabile termine a termine. Ben si appone quindi il Pringsheim ⁽¹⁾
ando qualifica di illusorie, almeno dal punto di vista pratico, le
condizioni trovate dal König.

§ 3.

Teorema sulle serie

i cui termini sono funzioni di una o più variabili.

Si sa dagli elementi del calcolo, che se una serie, i cui termini
sono funzioni *continue* di una o più variabili, è *equiconvergente* per
tutti i valori delle variabili compresi in un certo campo, allora essa
una funzione continua delle variabili in tutto quel campo. La equi-
nvergenza della serie non è però una condizione *necessaria* per la
continuità, ma solo sufficiente; per modo che il teorema reciproco
non è vero; si possono dare esempi di serie che sieno funzioni con-
tinue, senza essere serie equiconvergenti. È però vero il teorema reci-
proco se la serie data è a termini positivi per qualunque valore delle
variabili.

Propriamente vogliamo dimostrare il teorema:

*Si abbia una serie assolutamente convergente in tutto un campo
compresi gli estremi)*

$$\sum_0^{\infty} u_n(x_1 x_2 \dots)$$

*cui termini sieno funzioni continue delle variabili, e la serie dei
valori assoluti*

$$\sum_0^{\infty} |u_n(x_1 x_2 \dots)|$$

*sia una funzione continua delle variabili; allora questa seconda serie,
quindi anche la prima, è una serie equiconvergente ⁽²⁾.*

Immaginiamo un punto del campo, di coordinate $x_1 x_2 \dots$. In questo
punto la serie dei valori assoluti è convergente, e quindi, dato σ può
sempre trovarsi un indice n in modo che sia

$$R_n(x_1 x_2 \dots) < \sigma$$

⁽¹⁾ Math. Ann., vol. 44, p. 58 e p. 68.

⁽²⁾ PRINGSHEIM. Math. Ann., 44, p. 82.

indicando con R il resto della serie dei valori assoluti. D'altra parte essendo

$$R_n = \sum_0^{\infty} |u_n| - \sum_0^n |u_n|$$

ed essendo per ipotesi, il primo termine del secondo membro una funzione continua delle x , e anche il secondo termine del secondo membro perchè somma d'un numero finito di funzioni continue, si ha che R_n è una funzione continua delle x , e quindi si possono sempre trovare dei valori finiti e diversi da zero $h_1 h_2 \dots$ in modo che

$$R_n(x_1 \pm \theta_1 h_1, x_2 \pm \theta_2 h_2, \dots) - R_n(x_1 x_2 \dots) < \sigma$$

per qualunque sistema di valori delle $\theta_1 \theta_2 \dots$ comprese fra 0 e 1.

Quindi combinando colla precedente disuguaglianza, otteniamo

$$R_n(x_1 \pm \theta_1 h_1, \dots) < 2\sigma$$

e osservando che R_n risulta di termini tutti positivi, possiamo anche concludere che, dato σ si può sempre trovare un indice n , e un sistema di valori $h_1 h_2 \dots$, cioè un intorno del punto, in modo che

$$R_{n+\nu}(x_1 \pm \theta_1 h_1, x_2 \pm \theta_2 h_2, \dots) < 2\sigma$$

qualunque sia il valore di ν , purchè positivo, e qualunque sieno le $\theta_1 \theta_2 \dots$ purchè comprese fra 0 e 1.

Variando σ però evidentemente non solo varia n , ma variano anche le h .

Ad ogni σ certamente corrisponderà un valore di n , e un sistema di valori delle h ; ma vi potrebbero corrispondere parecchi valori per le n , e in corrispondenza parecchi sistemi di valori per le h .

Partiamo allora da uno qualunque dei punti del supposto campo di convergenza assoluta della serie, e per esso troviamo l'indice n e le quantità h , che determineranno un certo intorno di quel punto.

Consideriamo un punto estremo di questo intorno, e ripetiamo rispetto ad esso la stessa considerazione; si troverà un nuovo indice n e un nuovo intorno che sarà una continuazione del primo; quello fra i due indici n , che sarà il maggiore, varrà evidentemente per ambedue quegli intorni; quindi possiamo concludere che si può trovare un n unico tale che per tutti i punti del campo totale costituito dalla somma dei due intorni sopra costruiti, sia sempre $R_{n+\nu} < 2\sigma$ qualunque sia ν positivo e qualunque sia il punto. Così continuando io dico che si può sempre fare in tal maniera la ricerca dei singoli campi parziali, che si giunga a riempire tutto il campo totale con un numero finito di campi parziali.

Infatti se si potesse continuare indefinitivamente l'indicato procedimento, e quindi trovare *infiniti* campi parziali, vi sarebbero anche infiniti punti che funzionano da centri di tali campi, e quindi questi infiniti punti dovrebbero ammettere almeno un punto limite

$$x' \equiv (x_1 x_2 \dots)$$

A questo punto x' anche apparterrà un intorno colla solita proprietà, e un indice n' . E inoltre per la sua stessa natura di punto limite, in questo intorno esisteranno infiniti punti, centri di campi parziali; sieno

$$x^{(k)} \equiv (x_1^{(k)} x_2^{(k)} \dots)$$

$$x^{(k+1)} \equiv (x_1^{(k+1)} x_2^{(k+1)} \dots)$$

$$\dots \dots \dots$$

Per la stessa ipotesi che dà luogo all'esistenza di tutti questi punti, naturale che il campo parziale attorno $x^{(k)}$ non comprende i punti $x^{(k+1)} x^{(k+2)} \dots x'$; ma invece tenendo presente la proprietà del costruito campo parziale relativo ad x' , si vede che alterando, al massimo, il valore dell'indice $n^{(k)}$ relativo ad $x^{(k)}$, si può trovare un intorno dentro al quale sono compresi tutti quanti quegli infiniti punti; perchè se per il valore dell'indice n relativo ad $x^{(k)}$ prendiamo quello già trovato per il punto x' , cioè prendiamo n' , allora poichè

$$R_{n'}(x^{(k+1)}) < 2\sigma$$

$$R_{n'}(x^{(k+2)}) < 2\sigma$$

$$\dots \dots \dots$$

$$R_{n'}(x') < 2\sigma$$

si ricava che tutti i punti

$$x^{(k+1)} \dots x'$$

possono racchiudersi nell'intorno relativo ad $x^{(k)}$.

Si vede dunque che alterando la costruzione che per avventura fosse stata già fatta, si potrà sempre sostituire un unico campo parziale, ad infiniti di essi; e quindi distruggere il supposto punto limite x' .

Ripetendo questo processo per tutti i punti limiti, resta dunque dimostrato l'assunto. Allora tutto il campo totale resta diviso in un numero *finito* di campi parziali ad ognuno dei quali corrisponde un indice n ; il maggiore di tutti sia N ; esso evidentemente varrà per tutti i campi parziali, e quindi per tutto il campo totale; concludiamo dunque che dato σ si può sempre trovare un indice N in modo che

$$R_N(x)$$

per un qualunque x del campo assegnato è sempre minore di 2σ ; qui si ricava la equiconvergenza della serie dei valori assoluti, e quindi con più ragione, di quella data.

Di questo teorema ci interessa un corollario.

Essendo $R_N(x)$ composto di termini tutti positivi, con più ragione ciascuno di essi sarà minore di 2σ , e ciò per qualunque punto x del campo; dunque:

Nelle stesse ipotesi del teorema precedente si può sempre trovare un indice n in modo che

$$u_n(x) < 2\sigma$$

qualunque sia il punto x , cioè il termine generale della serie converga a zero uniformemente.

Prima di terminare questo paragrafo vogliamo ricavare due importanti corollarii del teorema qui dimostrato:

1. *Se i termini di una serie convergente sono funzioni continue di un certo numero di variabili, e per qualunque sistema di valori di queste variabili, compresi in un certo campo (gli estremi inclusi), hanno sempre valori del medesimo segno allora condizione necessaria e sufficiente per la continuità della funzione rappresentata dalla serie, è che la serie stessa sia equiconvergente.*

2. *Se i termini di una serie convergente sono funzioni continue di una variabile, e sono inoltre in un certo punto o tutte funzioni crescenti o tutte funzioni decrescenti, per modo che la serie dei rapporti incrementali in quel punto risulta di termini tutti del medesimo segno, allora condizione necessaria e sufficiente perchè in quel punto sia possibile la derivazione per serie è che la serie dei rapporti incrementali sia equiconvergente in tutto un intorno del punto.*

§ 4.

Applicazione del teorema precedente alla serie di Taylor.

Supponiamo ora che per qualunque $h < H$ si abbia sempre

$$f(a+h) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) h^n.$$

Scegliamo arbitrariamente un limite superiore dei valori di h ; e sia $r < H$. Abbiamo allora che la precedente relazione sussiste per ogni $h \leq r$.

Nel § 2 abbiamo visto che come conseguenza necessaria se ne ricava che sarà ancora

$$f(a+h) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a+k) k^n$$

ove

$$h = k + k' \leq r < H$$

la serie del secondo membro è convergente *assolutamente*.

Sarà poi ancora una serie derivabile termine a termine, cioè essendo

$$f'(a+h) = \frac{d f(a+h)}{d(a+h)} = \frac{\partial f(a+k+k')}{\partial k'}$$

i ha che

$$f'(a+h) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n-1!} f^{(n)}(a+k) k'^{n-1}$$

la serie del secondo membro per i medesimi sistemi di valori di kk' sarà anche assolutamente convergente. Applicando dunque il teorema del § 3 possiamo dire che il termine

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(a+k) k'_n$$

ovvero il termine

$$\frac{1}{n-1!} f^{(n)}(a+k) k'^{n-1}$$

devono essere uniformemente convergenti a zero per qualunque sistema di valori di kk' soddisfacenti alla relazione $k+k' \leq r < H$.

Poniamo

$$\begin{aligned} k &= \Im h \\ k' &= (1 - \Im) h \end{aligned}$$

che soddisfano alla relazione

$$k + k' = h \leq r < H$$

per ogni $h \leq r$ e per ogni \Im compreso fra 0 e 1. Si ha allora che

$$\frac{(1 - \Im)^{n-1}}{n-1!} f^{(n)}(a + \Im h) h^{n-1}$$

deve convergere a zero uniformemente per ogni $h \leq r$ e per ogni \Im compreso fra 0 e 1.

Ora questa espressione moltiplicata per h non è altro che il così detto *Resto di Cauchy* della serie di Taylor corrispondente allo sviluppo di $f(a+h)$ secondo le potenze intere positive di h ; indicando quindi con $R_n(\Im, h)$ tale resto di Cauchy, possiamo concludere, che per la sviluppabilità di $f(a+h)$ in serie di Taylor per ogni valore

di $h \leq r < H$ è necessario che $R_n(\mathfrak{S}, h)$ converga uniformemente a zero per tutti i \mathfrak{S} e tutti gli h soddisfacenti alle solite condizioni.

D'altra parte se questo si verifica, è chiaro che ha luogo appunto la sviluppabilità per ogni h , perchè allora fissato un qualunque h fatto anche \mathfrak{S} variabile con n , si potrà sempre trovare un n per cui R sia minore della quantità che più ci piace, e, come si sa dagli elementi del calcolo, ciò basta per concludere la sviluppabilità.

Nel § 2 abbiamo osservato che non si potrà ritenere una condizione sufficiente il tendere a zero di R_n per qualunque valore fisso di \mathfrak{S} ; ma che se la convergenza è invece uniforme, allora essa potrà sicuramente ritenersi come condizione sufficiente; ora dalle considerazioni fatte si ricava che una tale convergenza uniforme non solo è condizione sufficiente, ma è anche condizione necessaria.

Tenendo ora presente che la quantità r è arbitrariamente scelta minore di H , possiamo dunque dire che: *condizione necessaria e sufficiente perchè $f(a+h)$ sia sviluppabile in serie di Taylor per ogni $h < H$, è che il cosiddetto Resto di Cauchy*

$$R_n = \frac{(1-\mathfrak{S})^{n-1}}{n-1!} f^n(a+\mathfrak{S}h) h^n$$

sia convergente uniformemente a zero per ogni \mathfrak{S} (fra 0 e 1) e per ogni $h \leq r < H$.

Per un $h = H$ la convergenza a zero uniforme di R_n non è più una condizione necessaria, perchè la serie che si ottiene per $h = H$ può essere non assolutamente convergente, e quindi allora cade il ragionamento fatto sopra. Quella condizione diventa necessaria anche per $h = H$ se la serie che dà il valore di $f(a+H)$ non solo deve essere convergente, ma deve essere assolutamente convergente.

Quindi possiamo dire:

Se $f(a+h)$ deve essere sviluppabile in serie di Taylor per ogni h minore od eguale ad H , e la serie corrispondente deve essere assolutamente convergente anche per $h = H$, condizione necessaria e sufficiente è che $R_n(\mathfrak{S}h)$ converga uniformemente a zero anche per $h = H$.

Si sa che una serie di potenze per il limite superiore o inferiore dei punti compresi nel suo campo di convergenza, può essere divergente, convergente semplicemente, o convergente assolutamente. Le stesse modalità quindi può subire la serie di Taylor.

Ne possiamo quindi dedurre che se il resto di Cauchy per $h = H$ non converge uniformemente a zero per tutti i valori di \mathfrak{S} , non può cioè, dato σ , trovarsi un indice n in modo che per qualunque \mathfrak{S} fra 0 e 1 (compresi gli estremi) R_n sia sempre minore di σ , allora

amente la serie di Taylor per $h = H$ non sarà convergente assolutamente.

Così p. es. nella serie logaritmica il resto di Cauchy è

$$R_n = \frac{x^n}{1 + \Im x} \left(\frac{1 - \Im}{1 + \Im x} \right)^{n-1}$$

per ogni \Im e per ogni x positivo minore di 1 è sempre minore di

$$(1 - \Im)^{n-1} x^n$$

col crescere di n può rendersi, per qualunque \Im , minore di qualunque quantità assegnabile. Dunque R_n per ogni x minore di 1, converge uniformemente a zero per ogni \Im , ma per $x = 1$ e $\Im = 0$, $R_n = 1$ quindi ne deduciamo che certamente la serie logaritmica per $x = 1$ non può essere assolutamente convergente; risultato notissimo.

Invece nella serie binomiale il resto è

$$R_n = \frac{m \cdot m - 1 \dots m - n + 1}{n - 1!} x^n (1 - \Im)^{n-1} (1 + \Im x)^{m-n}$$

ci dimostra che

$$u_n = \frac{m \cdot m - 1 \dots m - n + 1}{n - 1!} x^n$$

per ogni m positivo e $x < 1$ converge sempre a zero. Si vede allora che anche per $x = 1$ R_n converge a zero per qualunque \Im , e quindi deduciamo, come del resto è ovvio, che la serie binomiale per m positivo è assolutamente convergente anche per $x = 1$.

Queste applicazioni sono semplicissime; noi le facciamo per illustrare la teoria esposta.

Si può infine osservare che fra le condizioni preliminari che noi avremmo dovuto stabilire negli enunciati vi doveva essere questa, che la funzione $f(x)$ abbia le derivate di qualunque ordine per qualunque x nell'intervallo da a ad $a + H$, e che queste derivate abbiano sempre valore finito. Come abbiamo osservato al § 2, ciò è una conseguenza immediata della possibilità di sviluppare in serie di Taylor la funzione; mi sembra ozioso ripetere continuamente nei varii enunciati questa condizione necessaria, perchè essa può ritenersi inclusa nella condizione che R_n deve convergere uniformemente a zero per qualunque \Im ; non potendo evidentemente quest'ultima condizione verificarsi se prima non è anche verificata.

Pavia, gennaio del 1895.

Tip. V. Fodratti & E. Lecco, via Gaudenzio Ferrari, 3 - Torino.

Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences.

VOL. XXXIX. No. 17. — FEBRUARY, 1904.

CONTRIBUTIONS FROM THE JEFFERSON PHYSICAL LABORATORY,
HARVARD COLLEGE.

*ON GENERALIZED SPACE DIFFERENTIATION OF
THE SECOND ORDER.*

By B. O. PEIRCE.

ON GENERALIZED SPACE DIFFERENTIATION OF THE SECOND ORDER.

BY B. O. PEIRCE.

Presented December 9, 1903. Received December 26, 1903.

IF one has to investigate the strength of a field of force defined by a given scalar potential function, or to study the flow of electricity in a massive conductor under given conditions, or to apply Green's Theorem to given functions in the space bounded by a given closed surface, or, indeed, to treat any one of a large number of problems in Mathematical Physics or in Analysis, one often needs to find the numerical value at a point, of the derivative of a point function taken in a given direction. This has given rise to the familiar idea of simple space differentiation and of the normal derivative of one scalar function with respect to another; indeed the properties of the first and of the higher space derivatives of a function of n variables taken with respect to any *fixed* direction in n dimensional space, have been treated very clearly and exhaustively by Czuber.*

It is sometimes desirable to use also the conception of general space derivatives of the second order. This is the case, for instance, when one is determining the rate of change of the intensity of a conservative field of force at a point which is moving, either along a curved line of force or on a curved surface related to such lines in a prescribed manner. It is easy to define the general space derivative of any order of a given function.

This paper discusses very briefly a few elementary facts with regard to generalized space differentiation of the second order, and treats first, for the sake of simplicity, differentiation of functions of two variables, in the plane of those variables.

PLANE DIFFERENTIATION.

Let there be in the xy plane two independent families of curves ($u = c, v = k$) such that in the domain, R , one and only one curve of

* E. Czuber, Wienerberichte, p. 1417 (1892).

each family passes through every point and no curve of either family has anywhere a multiple point. At every point, P , in the domain, there are two curves (one of the u family and one of the v family) which pass through the point indicate two directions, s_1, s_2 , and if the sense of each of these be determined by any convenient convention, they may be defined by pairs of direction cosines $(l_1, m_1), (l_2, m_2)$, where l_1, m_1, l_2, m_2 are given scalar functions such that at every point

$$l_1^2 + m_1^2 = 1, \quad l_2^2 + m_2^2 = 1. \quad (1)$$

If Ω is any scalar function of the coördinates which within R has finite derivatives of the first and second orders with respect to these coördinates, the derivative of Ω at P in the direction s_1 is the value at the point of the quantity

$$l_1 \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x} + m_1 \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial y} \quad (2)$$

and this new scalar function of x and y may be conveniently indicated by the expression $[D_{s_1} \Omega]_P$. If P' is a point on the u curve which passes through P , taken near P and in the sense of the direction s_1 , $[D_{s_1} \Omega]_P$ is

the limit, as P' approaches P , of $\frac{\Omega_{P'} - \Omega_P}{PP'}$.

If on the curve of the second (or v) family which passes through P , a point Q be taken near P and in the sense of the direction s_2 , the limit, as Q approaches P , of the quantity

$$\frac{[D_{s_2} \Omega]_Q - [D_{s_1} \Omega]_P}{PQ} \quad (3)$$

may be indicated by the expression $[D_{s_2} D_{s_1} \Omega]_P$, and this is the second derivative of Ω at P taken with respect to the directions s_1 and s_2 in the order given.

Thus, if

$$\begin{aligned} \Omega &= 2x^2 - y^2, & l_1 &= \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}}, & m_1 &= \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}}, \\ l_2 &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & m_2 &= \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; & D_{s_1} \Omega &= \frac{2(4x^2 - y)}{\sqrt{4x^2 + 1}}, \\ D_{s_2} D_{s_1} \Omega &= \frac{x(32x^2y + 8y^2 + 16y + 8x^2 + 2)}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot (4x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

It is evident from the definition just given that

$$D_{s_2} D_{s_1} \Omega = l_1 \cdot l_2 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + (l_1 \cdot m_2 + l_2 \cdot m_1) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \cdot \partial y} + m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \\ + \left(l_2 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial x} + m_2 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \left(l_2 \cdot \frac{\partial m_1}{\partial x} + m_2 \cdot \frac{\partial m_1}{\partial y} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad (4)$$

and that $D_{s_1} D_{s_2} \Omega$ is quite different in general from $D_{s_2} D_{s_1} \Omega$: the order of the two differentiations is material.

If the u curves happen to be a family of parallel straight lines and the v curves another family of parallel straight lines,

$$D_{s_2} D_{s_1} \Omega = l_1 l_2 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + (l_1 m_2 + l_2 m_1) \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \cdot \partial y} + m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}, \quad (5)$$

and the coefficients in this expression are constants.

If the u curves and the v curves are identical and are a family of straight parallel lines, we have

$$D_{s_1}^2 \Omega = l_1^2 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + 2 l_1 m_1 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \cdot \partial y} + m_1^2 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}, \quad (6)$$

the familiar form of the second derivative of Ω along the *fixed direction* s_1 , which often appears in work involving the transformation of Cartesian coördinates. Simple special cases of this formula are obtained by putting l equal to 1, 0, and m .

Since $l_1^2 + m_1^2 = 1$,

$$\frac{\partial l_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial m_1}{\partial y} = \frac{\partial m_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial l_1}{\partial y},$$

and if at any point s_1 and s_2 are such as to make the coefficient of $\frac{\partial \Omega}{\partial x}$ in (4) vanish, the coefficient of $\frac{\partial \Omega}{\partial y}$ will vanish also. Such points as this lie, in general, on a definite curve, the equation of which is to be found by equating one of these coefficients to zero. If s_1 is a fixed direction so that l_1 and m_1 are constants, (4) takes the form (5), but the coefficients are not constants unless s_2 also is fixed.

If the two variable directions s_1, s_2 coincide, (4) becomes the second derivative of the function Ω taken with respect to the direction s_1 ; that is,

$$D_{s_1}^2 \Omega = l_1^2 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + 2 l_1 m_1 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \cdot \partial y} + m_1^2 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \\ + \left(l_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial x} + m_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial y} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \left(l_1 \cdot \frac{\partial m_1}{\partial x} + m_1 \cdot \frac{\partial m_1}{\partial y} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial y}. \quad (7)$$

If the direction cosines of a plane curve at a point on it are l and m the curvature of the curve at P has the same absolute value as have the expressions

$$\frac{1}{m} \left(l \cdot \frac{\partial l}{\partial x} + m \cdot \frac{\partial l}{\partial y} \right), \quad \frac{1}{l} \left(l \cdot \frac{\partial m}{\partial x} + m \cdot \frac{\partial m}{\partial y} \right). \quad (8)$$

If, therefore, two directions, s_1, s_3 , are defined by two curves which, at a point, P , common to both, have a common tangent and equal curvatures the second derivatives at P of a function Ω taken with respect to the two directions are equal.

If at any point the curvature of the curve of the u family which defines the direction s_1 is zero, the coefficients of $\partial \Omega / \partial x$ and $\partial \Omega / \partial y$ in the expression for $D_{s_1}^2 \Omega$ at the point vanish. If the u curves are a family of straight lines, the last two terms of (7) disappear, but the coefficients of the other terms are, in general, not constant.

If there is no point in the region R at which both the quantities $\partial \Omega / \partial x$, $\partial \Omega / \partial y$ vanish together, and if the direction s is at every point of R that in which Ω increases most rapidly, $D_s \Omega = h$, where h is the gradient of Ω , that is, the tensor of the gradient vector. Now h is itself, in general, a scalar point function, which, when equated to a parameter, yields a family of curves the directions of which are usually quite different from those of the lines of the gradient-vector. The normal at any point P to the curve of this h family which passes through the point, has the direction cosines

$$\frac{\partial h}{\partial x} / h', \quad \frac{\partial h}{\partial y} / h',$$

where h' is the gradient of h . The angle between the direction, s , of the gradient vector of Ω and the normal to the h curve has at every point the value

$$\cos (\Omega, h) = \left[\frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right] / h h', \quad (9)$$

and the second derivative of Ω with respect to the direction s is, therefore,

$$D_s^2 \Omega = \left[\frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right] / h = h' \cdot \cos (\Omega, h). \quad (10)$$

Let the *normal derivative*,* at any point P , of a point function V , taken with respect to another point function W , be the limit, as PQ approaches zero, of the ratio of $V_Q - V_P$ to $W_Q - W_P$, where Q is a point so chosen on the normal at P to the surface of constant W which passes through P , that $W_Q - W_P$ is positive: if, then, (V, W) denotes the angle between the directions in which V and W increase most rapidly, the normal derivatives of V with respect to W , and of W with respect to V , may be written

$$[D_W V] = h_V \cdot \cos(V, W) / h_W, \quad [D_V W] = h_W \cdot \cos(V, W) / h_V: \quad (11)$$

if $h_V = h_W$, these derivatives are equal.

With this notation (10) may be rewritten in the form

$$D_s^2 \Omega = h \cdot [D_\Omega h.] \quad (12)$$

If at any point $D_s^2 \Omega$ vanishes, it is easy to see from (10) that either the gradient (h') of h vanishes at the point, or else the h and Ω surfaces cut each other there orthogonally. This latter case is exemplified in the familiar instance of the electrostatic field due to two long parallel straight wires of the same diameter, charged to equal and opposite potentials: if the wires cut the xy plane normally at P_1, P_2 , and if the line joining these intersections be taken for x axis with the point midway between them for origin, the potential function is of the form $V = A \log r_1 / r_2$, where $r_1^2 = (x - a)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x + a)^2 + y^2$. The intensity of the field, in absolute value, is $h = 2aA / r_1 r_2$, and the second derivative of V taken along the line of force (that is, the rate at which the intensity of the field changes) is numerically equal to $\frac{-4aA x}{r_1^2 \cdot r_2^2}$.

$D_s^2 V$ taken along a line of force vanishes, therefore, at all points on the y axis, and at all such points the curve of constant V ($r_1 / r_2 = b$) cuts the curves of constant h ($r_1 r_2 = k$) orthogonally. At points on the y axis the direction of the lines of force is parallel to the x axis, and the second derivative of V with respect to the fixed direction x happens to vanish here also where $l = 1$, $\frac{\partial l}{\partial x} = 0$, $m = 0$, $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$. The quantity h' does not vanish at any finite point.

* Peirce, The Newtonian Potential Function, p. 116. A Short Table of Integrals, p. 106.

The example just discussed is in contrast with the case where the family are a set of parallel curves of any kind, and h in consequence (not constant) is a function of Ω alone, so that the h curves and the curves coincide, and if $D_s^2 \Omega$ vanishes anywhere, it must be where vanishes. A simple example of this is furnished by the field of attraction within a very long cylinder of revolution, the density of which is function of the distance from the axis alone.

If the directions s_1 and s_2 are everywhere perpendicular to each other we may without loss of generality write $l_2 = -m_1$, $m_2 = l_1$; in which case the coefficients of $\partial\Omega/\partial x$, $\partial\Omega/\partial y$ in (4) become

$$\left(l_2 \cdot \frac{\partial m_2}{\partial x} + m_2 \cdot \frac{\partial m_2}{\partial y} \right) \text{ and } - \left(l_2 \cdot \frac{\partial l_2}{\partial x} + m_2 \cdot \frac{\partial l_2}{\partial y} \right): \quad (13)$$

these vanish if the v curves form a family of straight lines, or the u curves a family of straight or curved parallels. The order of differentiation with respect to the orthogonal directions s_1 , s_2 is immaterial if both the u and the v curves are straight lines, that is, if the directions are fixed.

If s_1 is the direction in which Ω increases most rapidly, and s_2 the direction of constant Ω ,

$$\begin{aligned} D_{s_2} D_{s_1} \Omega &= D_{s_2} h = \left[\frac{\partial \Omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right] / h \\ &= \left\{ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \cdot \partial y} \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \right] \right\} / h. \end{aligned} \quad (14)$$

Now the direction cosines and the slope of the line of the gradient vector at any point are

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \text{and} \quad \frac{\partial \Omega / \partial y}{\partial \Omega / \partial x}.$$

So that the curvature of the line is

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{\frac{d}{dx} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y} / \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right]}{\left[1 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} / \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \left\{ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \cdot \partial y} \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \right] \right\} / h^3 \end{aligned} \quad (15)$$

and we may write in this case

$$D_{s_2} D_{s_1} \Omega = h / \rho.$$

This expression gives the rate at which the maximum slope of the surface at the coördinates of which are (x, y, Ω) , changes as one goes along a line of level.*

When s_1 and s_2 are perpendicular to each other, we have in general

$$D_{s_2}^2 \Omega = m_1^2 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - 2l_1 m_1 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \cdot \partial y} + l_1^2 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \left(m_1 \cdot \frac{\partial m_1}{\partial x} - l_1 \cdot \frac{\partial m_1}{\partial y} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \left(l_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial y} - m_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial x} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad (16)$$

and since $l_1^2 + m_1^2 = 1$,

$$l_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial x} + m_1 \cdot \frac{\partial m_1}{\partial x} = 0, \quad l_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial y} + m_1 \cdot \frac{\partial m_1}{\partial y} = 0.$$

So that if we add together (7) and (16) we shall get

$$\begin{aligned} D_{s_1}^2 \Omega + D_{s_2}^2 \Omega &= \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \frac{1}{m_1} \cdot \frac{\partial l_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{1}{l_1} \cdot \frac{\partial m_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ &= \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} - \frac{1}{l_1} \cdot \frac{\partial m_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{1}{m_1} \cdot \frac{\partial l_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial y}. \end{aligned} \quad (16')$$

It is evident that the values of the space derivatives defined above are wholly independent of the particular system of rectangular coördinates which may be used.

SPACE DIFFERENTIATION.

At every point of the space domain, R , let two independent directions (s_1, s_2) be defined by the direction cosines $(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2)$, where $l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2$ are any six single-valued point functions which satisfy the identities

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \quad l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1, \quad (17)$$

and have finite derivatives of the first order with respect to the coördinates x, y, z . If, then, Ω is any single-valued function of the coördinates which within R has finite derivatives of the first and second orders with

* Boussinesq, Cours d'Analyse Infinitésimale, T. 1, f. 2, p. 236.

respect to these coördinates, the derivative of Ω at the point P , in the direction s_1 , is the value at P of the quantity

$$D_{s_1} \Omega \equiv l_1 \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x} + m_1 \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial y} + n_1 \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial z}. \quad (1)$$

Through the point P passes a curve of the family defined by the equations

$$\frac{dx}{l_2} = \frac{dy}{m_2} = \frac{dz}{n_2}, \quad (1')$$

and this curve indicates the direction s_2 . If on this curve a point Q is taken near P and in the sense of the direction s_2 , the limit, as Q approaches P , of the quantity

$$\frac{[D_{s_1} \Omega]_Q - [D_{s_1} \Omega]_P}{PQ} \quad (2)$$

may be represented by $[D_{s_2} D_{s_1} \Omega]_P$ and this is the second directional derivative at P of Ω taken with respect to the directions s_1 and s_2 in the order given. It is evident that

$$\begin{aligned} D_{s_2} D_{s_1} \Omega &= l_1 l_2 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + m_1 m_2 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + n_1 n_2 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \\ &+ (l_1 m_2 + l_2 m_1) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \cdot \partial y} + (m_1 n_2 + m_2 n_1) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \cdot \partial z} + (n_1 l_2 + n_2 l_1) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z \cdot \partial x} \\ &+ \left(l_2 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial x} + m_2 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial y} + n_2 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial z} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ &+ \left(l_2 \cdot \frac{\partial m_1}{\partial x} + m_2 \cdot \frac{\partial m_1}{\partial y} + n_2 \cdot \frac{\partial m_1}{\partial z} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ &+ \left(l_2 \cdot \frac{\partial n_1}{\partial x} + m_2 \cdot \frac{\partial n_1}{\partial y} + n_2 \cdot \frac{\partial n_1}{\partial z} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \end{aligned} \quad (21)$$

and that this is not equal to $D_{s_1} D_{s_2} \Omega$.

If the directions s_1, s_2 are fixed, the six direction cosines are constants, the last three terms of (21) disappear, and the coefficients of the other six terms are constant. If the fixed directions s_1, s_2 coincide, (21) reduces to the familiar form

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 \Omega &= l_1^2 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + m_1^2 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + n_1^2 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \\ &+ 2 l_1 m_1 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \cdot \partial y} + 2 m_1 n_1 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \cdot \partial z} + 2 l_1 n_1 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \cdot \partial z}, \quad (22) \end{aligned}$$

whereas, if s_1 is not fixed,

$$\begin{aligned} D_{s_1}^2 \Omega &= l_1^2 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + m_1^2 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + n_1^2 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + 2 l_1 m_1 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \cdot \partial y} + 2 m_1 n_1 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \cdot \partial z} \\ &+ 2 l_1 n_1 \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \cdot \partial z} + \left(l_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial x} + m_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial y} + n_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial z} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ &+ \left(l_1 \cdot \frac{\partial m_1}{\partial x} + m_1 \cdot \frac{\partial m_1}{\partial y} + n_1 \cdot \frac{\partial m_1}{\partial z} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ &+ \left(l_1 \cdot \frac{\partial n_1}{\partial x} + m_1 \cdot \frac{\partial n_1}{\partial y} + n_1 \cdot \frac{\partial n_1}{\partial z} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial z}. \quad (23) \end{aligned}$$

All the coefficients in (22) are constants; all those of (23) are in general variable. If s_1 is defined by any infinite system of straight lines of which just one passes through every point of space, and if the direction s_1 at all points of any one of the lines is that of the line itself, the coefficients of $\partial \Omega / \partial x$, $\partial \Omega / \partial y$, $\partial \Omega / \partial z$ in (23) vanish. In particular, if the direction s_1 is that of the radius vector from a fixed point (a, b, c), (23) takes the form of (22) though the remaining coefficients are not constants. In any case if the coefficients of two of the three quantities $\partial \Omega / \partial x$, $\partial \Omega / \partial y$, $\partial \Omega / \partial z$ vanish, the third must vanish also.

If the gradient, h , of Ω does not vanish at any point of R and if s is the direction in which Ω increases most rapidly,

$$D_s \Omega = h, \quad (24)$$

$$D_s^2 \Omega = \left[\frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right] / h.$$

If h' is the gradient of the scalar point function which gives the value of h , and if (Ω, h) represents the angle between the directions in which the point functions Ω and h increase most rapidly,

$$\cos(\Omega, h) = \left[\frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right] / h \cdot h' \quad (25)$$

$$\text{and} \quad D_s^2 \Omega = h' \cdot \cos(\Omega, h), \text{ or } h [D_\Omega h] \quad (26)$$

where $[D_\Omega h]$ represents the normal derivative of h with respect to Ω .

If the equation $\Omega = h$ happens to represent a set of parallel surfaces h , if not constant, is a function of Ω alone, so that the h and Ω surfaces are coincident: in this case $\cos(\Omega, h) = 1$ and $D_s^2 \Omega$ can vanish only where h' vanishes. In general, $D_s^2 \Omega$ vanishes when the h and Ω surfaces cut each other at right angles.

If s_1, s_2, s_3 are any three mutually perpendicular directions,
 $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$,
 $l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3 = 0$

and

$$D_{s_1}^2 \Omega + D_{s_2}^2 \Omega + D_{s_3}^2 \Omega = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}$$

$$+ \frac{\partial \Omega}{\partial x} \left[m_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial y} + m_2 \cdot \frac{\partial l_2}{\partial y} + m_3 \cdot \frac{\partial l_3}{\partial y} + n_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial z} + n_2 \cdot \frac{\partial l_2}{\partial z} + n_3 \cdot \frac{\partial l_3}{\partial z} \right]$$

$$+ \frac{\partial \Omega}{\partial y} \left[n_1 \cdot \frac{\partial m_1}{\partial z} + n_2 \cdot \frac{\partial m_2}{\partial z} + n_3 \cdot \frac{\partial m_3}{\partial z} + l_1 \cdot \frac{\partial m_1}{\partial x} + l_2 \cdot \frac{\partial m_2}{\partial x} + l_3 \cdot \frac{\partial m_3}{\partial x} \right]$$

$$+ \frac{\partial \Omega}{\partial z} \left[l_1 \cdot \frac{\partial n_1}{\partial x} + l_2 \cdot \frac{\partial n_2}{\partial x} + l_3 \cdot \frac{\partial n_3}{\partial x} + m_1 \cdot \frac{\partial n_1}{\partial y} + m_2 \cdot \frac{\partial n_2}{\partial y} + m_3 \cdot \frac{\partial n_3}{\partial y} \right] \quad (2)$$

THE JEFFERSON PHYSICAL LABORATORY.

1170 6485
Ueberreicht vom Verfasser.

Ueber ein vielfaches, auf *Eulersche* Integrale
reducirbares Integral.

Von

L. Pochhammer.

(Sonderabdruck aus Heft 3 Bd. 107 des Journals für die reine und angewandte Mathematik.)

Ueber ein vielfaches, auf *Eulersche* Integrale
reducirbares Integral.

Von

L. Pochhammer.

(Sonderabdruck aus Heft 3 Bd. 107 des Journals für die reine und angewandte Mathematik.)

Im Folgenden wird ein vielfaches bestimmtes Integral betrachtet welches sich als identisch mit einem Producte aus *Eulerschen* Integral erweist. Die angestellte Rechnung schliesst sich an diejenige an, durch die der Verfasser in einer früher veröffentlichten Arbeit*) ein ähnlich gebildetes vielfaches Integral auf *Eulersche* Integrale erster Art zurückgeführt hat. In der hier abgeleiteten Formel kommt jedoch neben *Eulerschen* Integralen erster Art auch eine Gammafunction als Factor vor. In § 1 zunächst ein Doppelintegral, sodann in § 2 das $(m+1)$ -fache Integral behandelt. In § 3 wird das in den §§ 1 und 2 erhaltene Resultat dadurch erweitert, dass man für eine der Integrationen statt des geradlinigen Weges eine geschlossene Integrationscurve anwendet. Die so modificirte Formel enthält statt der Gammafunction das correspondirende bestimmte Integral mit geschlossenem Integrationsweg, welches *H. Hankel* in seiner Abhandlung „Die *Eulerschen* Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Arguments“**) definirt hat. Der in § 3 bewiesene Satz wird in einer nachfolgenden Abhandlung***) für die Integration einer linearen Differentialgleichung benutzt, woselbst er dazu dient, die Verbindung zwischen den Lösungen der Gleichung in Reihenform und gewissen Lösungen in Form bestimmter Integrale herzustellen.

*) Cfr. §§ 3 und 6 der Abhandlung „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten“ in Bd. 102 dieses Journals.

**) *Schlömilchs* Zeitschrift für Math. u. Physik, Jahrgang 9, 1864.

***) „Ueber eine lineare Differentialgleichung n ter Ordnung mit einem endlichen singulären Punkte“.

§ 1.

Durch \mathcal{A}_1 werde das Doppelintegral

$$(1.) \quad \int_0^\infty s^{-a} ds \int_0^1 e^{-st} t^b (1-t)^{c-1} dt$$

bezeichnet. Man substituiere

$$t = 1-z$$

und entwickle die Grösse e^{sz} in die Reihe $1 + \frac{sz}{1} + \dots$. Dann entsteht für die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \int_0^\infty e^{-s} s^{-a} ds \int_0^1 e^{sz} (1-z)^b z^{c-1} dz \\ &= \int_0^\infty e^{-s} s^{-a} ds \int_0^1 \left[1 + \frac{sz}{1} + \dots + \frac{s^\nu z^\nu}{\nu!} + \dots \right] (1-z)^b z^{c-1} dz. \end{aligned}$$

nennt man also $E(p, q)$ und $\Gamma(q)$ die Eulerschen Integrale erster und zweiter Art

$$(2.) \quad E(p, q) = \int_0^1 z^{p-1} (1-z)^{q-1} dz,$$

$$(3.) \quad \Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-s} s^{q-1} ds$$

und berücksichtigt die bekannten Formeln

$$(4.) \quad E(p+\nu, q) = \frac{p(p+1)\dots(p+\nu-1)}{(p+q)(p+q+1)\dots(p+q+\nu-1)} E(p, q),$$

$$(5.) \quad \Gamma(q+\nu) = q(q+1)\dots(q+\nu-1) \Gamma(q),$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \Gamma(1-a) E(b+1, c) + \frac{1}{1} \Gamma(2-a) E(b+1, c+1) \\ &+ \frac{1}{1.2} \Gamma(3-a) E(b+1, c+2) + \dots + \frac{1}{\nu!} \Gamma(\nu+1-a) E(b+1, c+\nu) + \dots \\ &= \Gamma(1-a) E(b+1, c) \left\{ 1 + \frac{(1-a)c}{1.(b+c+1)} + \frac{(1-a)(2-a)c(c+1)}{1.2.(b+c+1)(b+c+2)} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Vorausgesetzt ist hierbei, dass in (1.) diejenigen Zweige der Potenzen s^{-a} , t^b , $(1-t)^{c-1}$ angewendet werden, welche den in den Eulerschen Integralen vorkommenden Potenzen entsprechen.

Die Klammer auf der rechten Seite der letzten Gleichung enthält eine Gauss'sche hypergeometrische Reihe, deren viertes Argument den Werth 1 hat. Da nun für diese Reihen die Identität:

$$(6.) \quad 1 + \frac{\alpha\beta}{1.\varrho} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)} + \dots = \frac{\Gamma(\varrho)\Gamma(\varrho-\alpha-\beta)}{\Gamma(\varrho-\alpha)\Gamma(\varrho-\beta)}$$

gilt, so ist

$$\mathcal{A}_1 = \Gamma(1-a)E(b+1, c) \frac{\Gamma(b+c+1)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+c)\Gamma(b+1)},$$

woraus, wegen der Formel

$$(7.) \quad E(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

die Gleichung

$$\mathcal{A}_1 = \Gamma(1-a)\Gamma(c) \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+c)}$$

folgt. Indem man die Formel (7.) zum zweiten Mal benutzt, erhält man für \mathcal{A}_1 den Ausdruck

$$(8.) \quad \mathcal{A}_1 = \int_0^\infty s^{-a} ds \int_0^1 e^{-st} t^b (1-t)^{c-1} dt = \Gamma(1-a)E(a+b, c).$$

§ 2.

Es sei ferner \mathcal{A}_m das $(m+1)$ -fache Integral

$$(9.) \quad \mathcal{A}_m = \int_0^\infty s^{-a} ds \int_0^1 S_1 ds_1 \int_0^1 S_2 ds_2 \dots \int_0^1 S_{m-1} ds_{m-1} \int_0^1 e^{-ss_1 s_2 \dots s_m} S_m ds_m,$$

in welchem S_μ für $\mu = 1, 2, \dots, m$ das Product

$$(10.) \quad S_\mu = s_\mu^{b_\mu} (1-s_\mu)^{c_\mu-1}$$

bedeutet, während $a, b_1, c_1, \dots, b_m, c_m$ Constanten sind. Man nimmt an, dass letztere Constanten diejenigen Ungleichheiten erfüllen, die für die Convergenz des Integrals \mathcal{A}_m erforderlich sind. Es soll gezeigt werden, dass \mathcal{A}_m gleich dem Producte

$$(11.) \quad \mathcal{A}_m = \Gamma(1-a)E(a+b_1, c_1)E(a+b_2, c_2)\dots E(a+b_m, c_m)$$

ist. Der Beweis wird durch Induction geführt.

Diejenige Gleichung, die aus (11.) entsteht, wenn man $m-1$ statt m schreibt, wird als bewiesen angenommen. Man ändert hierbei die Bezeichnung, indem man \mathfrak{S}_μ für $\mu = 1, 2, \dots, m-1$ als das Product

$$(12.) \quad \mathfrak{S}_\mu = s_\mu^{\beta_\mu} (1-s_\mu)^{c_\mu-1}$$

definiert und der als gültig vorausgesetzten Gleichung die Form

$$(13.) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\infty s^{-k} ds \int_0^1 \mathfrak{S}_1 ds_1 \dots \int_0^1 \mathfrak{S}_{m-2} ds_{m-2} \int_0^1 e^{-ss_1 s_2 \dots s_{m-1}} \mathfrak{S}_{m-1} ds_{m-1} \\ & = \Gamma(1-k)E(k+\beta_1, c_1)E(k+\beta_2, c_2)\dots E(k+\beta_{m-1}, c_{m-1}) \end{aligned} \right.$$

bt. Das Integral (9.) geht durch die Substitution $s_m = 1 - z$ in den Ausdruck

$$\int_0^{\infty} s^{-a} ds \int_0^1 S_1 ds_1 \dots \int_0^1 e^{-ss_1 \dots s_{m-1}} S_{m-1} ds_{m-1} \int_0^1 e^{ss_1 \dots s_{m-1} z} (1-z)^{b_m} z^{c_m-1} dz$$

er. Durch Entwicklung der von z abhängigen Exponentialfunction

$$e^{ss_1 \dots s_{m-1} z} = 1 + \frac{ss_1 \dots s_{m-1} z}{1} + \dots + \frac{s^\nu s_1^\nu \dots s_{m-1}^\nu z^\nu}{1.2 \dots \nu} + \dots$$

hält man hieraus eine Reihe, deren allgemeiner Term gleich dem Producte aus einem m -fachen Integral, einem Eulerschen Integral erster Art und einer numerischen Constante ist. Man nenne zur Abkürzung

$$\Theta_\nu = \int_0^{\infty} s^{\nu-a} ds \int_0^1 S_1 s_1^\nu ds_1 \dots \int_0^1 S_{m-2} s_{m-2}^\nu ds_{m-2} \int_0^1 e^{-ss_1 \dots s_{m-1}} S_{m-1} s_{m-1}^\nu ds_{m-1}.$$

unn ergibt sich, da

$$\int_0^1 (1-z)^{b_m} z^{c_m+\nu-1} dz = E(b_m+1, c_m+\nu)$$

, für \mathcal{A}_m die Entwicklung:

$$\mathcal{A}_m = E(b_m+1, c_m) \Theta_0 + E(b_m+1, c_m+1) \Theta_1 + \dots + \frac{E(b_m+1, c_m+\nu)}{1.2 \dots \nu} \Theta_\nu + \dots$$

per die Grösse Θ_ν ist mit dem in (13.) angeführten m -fachen Integral entseich, wenn man in letzterem für die Constanten $k, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}$ die Werthe

$$k = a - \nu, \quad \beta_1 = b_1 + \nu, \quad \beta_2 = b_2 + \nu, \quad \dots, \quad \beta_{m-1} = b_{m-1} + \nu$$

ansetzt, so dass aus (13.) für Θ_ν die Gleichung

$$\Theta_\nu = \Gamma(\nu+1-a) E(a+b_1, c_1) E(a+b_2, c_2) \dots E(a+b_{m-1}, c_{m-1})$$

lgt. Auf diese Weise findet man für den Quotienten

$$\frac{\mathcal{A}_m}{E(a+b_1, c_1) E(a+b_2, c_2) \dots E(a+b_{m-1}, c_{m-1})}$$

e Reihe

$$(1-a) E(b_m+1, c_m) + \Gamma(2-a) E(b_m+1, c_m+1) + \dots + \frac{\Gamma(\nu+1-a) E(b_m+1, c_m+\nu)}{1.2 \dots \nu} + \dots$$

$$= \Gamma(1-a) E(b_m+1, c_m) \left\{ 1 + \frac{(1-a)c_m}{1.(b_m+c_m+1)} + \frac{(1-a)(2-a)c_m(c_m+1)}{1.2(b_m+c_m+1)(b_m+c_m+2)} + \dots \right\},$$

elche nach (6.) und (7.) mit dem Ausdrücke

$$\begin{aligned} & \Gamma(1-a) \frac{\Gamma(b_m+1) \Gamma(c_m)}{\Gamma(b_m+c_m+1)} \frac{\Gamma(b_m+c_m+1) \Gamma(b_m+a)}{\Gamma(a+b_m+c_m) \Gamma(b_m+1)} \\ &= \Gamma(1-a) \frac{\Gamma(a+b_m) \Gamma(c_m)}{\Gamma(a+b_m+c_m)} = \Gamma(1-a) E(a+b_m, c_m) \end{aligned}$$

identisch ist. Unter Annahme der Gültigkeit der Gleichung (13.) ist für das $(m+1)$ -fache Integral \mathcal{A}_m der Werth

$$\mathcal{A}_m = \Gamma(1-a)E(a+b_1, c_1)E(a+b_2, c_2)\dots E(a+b_m, c_m)$$

ermittelt worden. Für $m=1$ ergibt sich nun aus (9.) und (11.) die directem Wege abgeleitete Formel (8.). Somit ist auch die Gleichung (11.), unter der Voraussetzung, dass den Bedingungen der Convergenz nügt ist, allgemein bewiesen.

Wählt man $m=2$, so liefert die erhaltene Formel einen Ausdruck für ein dreifaches Integral, da dieselbe dann die Gestalt

$$(14.) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\infty s^{-a} ds \int_0^1 s_1^{b_1} (1-s_1)^{c_1-1} ds_1 \int_0^1 e^{-ss_1s_2} s_2^{b_2} (1-s_2)^{c_2-1} ds_2 \\ & = \Gamma(1-a)E(a+b_1, c_1)E(a+b_2, c_2) \end{aligned} \right.$$

annimmt.

§ 3.

In den Integralen (1.) und (9.) kommen die Ausdrücke

$$e^{-st}, \quad e^{-ss_1s_2\dots s_m}$$

als Factoren der zu integrirenden Function vor, und die Variable s durchläuft, wie daselbst angenommen wird, die positive reelle Axe von 0 bis ∞ . Es sollen nunmehr einerseits die obigen Exponentialgrößen durch

$$e^{st}, \quad e^{ss_1s_2\dots s_m}$$

ersetzt, andererseits für die Variable s ein geschlossener Integrationsweg der bei $-\infty$ beginnt und endigt, gewählt werden.

Für die Integrale mit geschlossener Integrationscurve wird im Folgenden die abgekürzte Bezeichnungsweise benutzt, welche der Verfasser § 1 der Abhandlung „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf“*) angegeben hat. Man setzt hiernach einen horizontalen Strich über das Integralzeichen (was andeuten soll, dass der Weg ein geschlossener ist), schreiben den Werth, welcher Ausgangspunkt und Endpunkt der Integrationscurve als untere Integralgrenze hin und führt an der sonst von der oberen Integralgrenze eingenommenen Stelle in Klammern diejenigen singulären Punkte der zu integrirenden Function (durch Kommata von einander getrennt) an.

*) Mathem. Annalen, Bd. 35, pag. 472.

...che vom Integrationswege umschlossen werden. Hierbei nennt man die
rschiedenen singulären Punkte in der Reihenfolge, wie sie umkreist
rden, und fügt im Fall einer negativen Umkreisung ein Minuszeichen
ter den betreffenden singulären Punkt hinzu.

Sind die Variablen s und t von einander unabhängig, so hat das
product

$$s^{-a} e^{st} t^b (1-t)^{c-1}$$

, Function von s keinen anderen endlichen singulären Punkt als den
unkt $s = 0$. Wird also das obige Product in der Art nach s und nach t
egirt, dass die Variable t die reellen Werthe zwischen 0 und 1 durch-
ift, und die Variable s von dem unendlich entfernten Punkte der nega-
en reellen Axe aus einen positiven Umlauf um den Nullpunkt ausführt,
hat man für das hierdurch definirte Doppelintegral, welches K_1 heissen
ige, die abgekürzte Bezeichnung

$$(15.) \quad K_1 = \int_{-\infty}^{(0)} s^{-a} ds \int_0^1 e^{st} t^b (1-t)^{c-1} dt.$$

analoger Weise nennt man K_m das $(m+1)$ -fache Integral

$$(16.) \quad K_m = \int_{-\infty}^{(0)} s^{-a} ds \int_0^1 S_1 ds_1 \int_0^1 S_2 ds_2 \dots \int_0^1 S_{m-1} ds_{m-1} \int_0^1 e^{ss_1 s_2 \dots s_m} S_m ds_m,$$

welchem der Integrationsweg von s derselbe wie in K_1 ist. $S_1, S_2, \dots S_m$
deuten die in (10.) angegebenen Ausdrücke.

Das Verfahren, nach welchem in den §§ 1 und 2 die Integrale \mathcal{A}_1
nd \mathcal{A}_m umgeformt wurden, ist auch auf die Integrale K_1 und K_m anwend-
r. Durch die Substitution $t = 1-z$ erhält man aus (15.) die Gleichung

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_{-\infty}^{(0)} e^s s^{-a} ds \int_0^1 e^{-sz} (1-z)^b z^{c-1} dz \\ &= \int_{-\infty}^{(0)} e^s s^{-a} ds \int_0^1 \left[1 - \frac{sz}{1} + \frac{s^2 z^2}{1 \cdot 2} - \dots \right] (1-z)^b z^{c-1} dz \end{aligned}$$

er, bei Berücksichtigung von (2.),

$$\begin{aligned} K_1 &= E(b+1, c) \int_{-\infty}^{(0)} e^s s^{-a} ds - \frac{1}{1} E(b+1, c+1) \int_{-\infty}^{(0)} e^s s^{1-a} ds \\ &\quad + \dots + (-1)^\nu \frac{1}{\nu!} E(b+1, c+\nu) \int_{-\infty}^{(0)} e^s s^{\nu-a} ds + \dots \end{aligned}$$

Es soll nun durch $\bar{\Gamma}(q)$ das Integral

$$(17.) \quad \bar{\Gamma}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} e^s s^{q-1} ds,$$

dessen Integrationsweg die oben genannte geschlossene Curve ist, bezeichnet werden*). Dasselbe convergirt für jeden endlichen Werth von q , der reelle Theil von q positiv, so besteht zwischen dem Eulerschen Integral $\Gamma(q)$ (welches dann convergent ist) und dem Integral $\bar{\Gamma}(q)$ die Beziehung

$$(18.) \quad \bar{\Gamma}(q) = (e^{\pi i q} - e^{-\pi i q}) \Gamma(q) = 2i \sin(\pi q) \Gamma(q).$$

In (3.) hat man, nach der Definition von $\Gamma(q)$, für die Potenz s^{q-1} Werth $e^{(q-1) \log s}$, in welchem $\log s$ den reellen Logarithmus bedeutet, einsetzen; bei $\bar{\Gamma}(q)$ gilt die entsprechende Bestimmung für den Schnittpunkt des Integrationsweges mit der positiven reellen Axe. Es ist ferner

$$(19.) \quad \bar{\Gamma}(q+1) = -q \bar{\Gamma}(q),$$

woraus für ein positives ganzzahliges ν die Formel

$$(20.) \quad \bar{\Gamma}(q+\nu) = (-1)^\nu q(q+1) \dots (q+\nu-1) \bar{\Gamma}(q)$$

folgt. Die für K_1 abgeleitete Reihe lautet hiernach

$$K_1 = \left\{ \begin{aligned} &\bar{\Gamma}(1-a)E(b+1, c) - \frac{1}{1} \bar{\Gamma}(2-a)E(b+1, c+1) + \dots \\ &\dots + (-1)^\nu \frac{1}{\nu!} \bar{\Gamma}(\nu+1-a)E(b+1, c+\nu) + \dots \end{aligned} \right.$$

oder, wegen (4.) und (20.),

$$K_1 = \bar{\Gamma}(1-a)E(b+1, c) \left\{ 1 + \frac{(1-a)c}{1 \cdot (b+c+1)} + \frac{(1-a)(2-a)c(c+1)}{1 \cdot 2 \cdot (b+c+1)(b+c+2)} + \dots \right\}.$$

Die rechte Seite der letzteren Gleichung unterscheidet sich aber von d in § 1 für \mathcal{A}_1 erhaltenen Ausdruck nur dadurch, dass $\bar{\Gamma}(1-a)$ an Stelle von $\Gamma(1-a)$ getreten ist. Somit ergibt sich (nach § 1) für K_1 die Gleichung

$$(21.) \quad K_1 = \int_{-\infty}^{\infty} s^{-a} ds \int_0^1 e^{st} t^b (1-t)^{c-1} dt = \bar{\Gamma}(1-a)E(a+b, c).$$

In ähnlicher Weise lässt sich die in § 2 für \mathcal{A}_m angestellte Rechnung auf K_m übertragen. Aus dem Integrale (16.) entsteht, wenn man $s_m = 1-z$ setzt und die Exponentialgrösse $e^{-ss_1 \dots s_{m-1} z}$ entwickelt, eine Reihe

*) Man vergleiche die erwähnte Abhandlung von *H. Hankel*, sowie § 3 der Arbeit des Verfassers „Zur Theorie der Eulerschen Integrale“, Mathem. Annalen Bd. 35, pag. 41.

in derselben Art, wie im Vorhergehenden für \mathcal{A}_m erhalten wurde; und nachdem der Factor $\bar{\Gamma}(1-a)$ und die in § 2 vorkommenden *Eulerschen* Integrale erster Art vor die Klammer genommen sind, bleibt wiederum die hypergeometrische Reihe

$$1 + \frac{(1-a)c_m}{1.(b_m+c_m+1)} + \frac{(1-a)(2-a)c_m(c_m+1)}{1.2.(b_m+c_m+1)(b_m+c_m+2)} + \dots$$

orig, auf welche die Formel (6.) angewendet wird. Auf diese Weise findet man, nach Berücksichtigung der Gleichung (21.), für K_m den Ausdruck

$$(22.) \quad K_m = \bar{\Gamma}(1-a)E(a+b_1, c_1)E(a+b_2, c_2)\dots E(a+b_m, c_m).$$

Im Fall $m=2$ ergibt sich aus (22.) die zu (14.) analoge Formel

$$(23.) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} s^{-a} ds \int_0^1 s_1^{b_1} (1-s_1)^{c_1-1} ds_1 \int_0^1 e^{ss_1s_2} s_2^{b_2} (1-s_2)^{c_2-1} ds_2 \\ & = \bar{\Gamma}(1-a)E(a+b_1, c_1)E(a+b_2, c_2). \end{aligned} \right.$$

In den Gleichungen (8.), (11.), (14.) muss die Constante a der Bedingung genügen, dass der reelle Bestandtheil von $1-a$ positiv sei, da die Integrale \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 , \mathcal{A}_m sonst divergent werden. Die in (21.), (22.), (23.) genannten Integrale behalten dagegen auch im Falle $a > 1$ einen bestimmten Sinn. Für die Anwendungen, welche von den vorstehenden Rechnungen gemacht werden sollen (s. d. Einl.), erweist sich gerade dieser Umstand als ein wesentlicher, indem daselbst für die Grösse a (weil sie den Stellen-eiger einer Reihe enthält) auch unbegrenzt grosse positive Werthe zu setzen sind.

ALFRED PRINGSHEIM

IRRATIONALZAHLEN UND KONVERGENZ
UNENDLICHER PROZESSE.

SONDERABDRUCK (I A 3) AUS:

ENCYKLOPÄDIE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN,
HERAUSGEGEBEN VON H. BURKHARDT UND W. FR. MEYER.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1898.

IA 3. IRRATIONALZAHLEN UND KONVERGENZ UNENDLICHER PROZESSE

VON

ALFRED PRINGSHEIM

IN MÜNCHEN.

Inhaltsübersicht.

Erster Teil. Irrationalzahlen und Grenzbegriff.

I. Irrationalzahlen.

1. *Euklid's* Verhältnisse und inkommensurable Grössen.
2. *Michael Stifel's* Arithmetica integra.
3. Der Irrationalzahlbegriff der analytischen Geometrie.
4. Das *Cantor-Dedekind'sche* Axiom und die arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen.
5. Die Theorien von *Weierstrass* und *Cantor*.
6. Die Theorie von *Dedekind*.
7. *Du Bois-Reymond's* Kampf gegen die arithmetischen Theorien.
8. Die vollkommene Arithmetisierung im Sinne *Kronecker's*.
9. 10. Verschiedene Darstellungsformen der Irrationalzahlen und Irrationalität gewisser Darstellungsformen.

II. Grenzbegriff.

11. Der geometrische Ursprung des Grenzbegriffs.
12. Die Arithmetisierung des Grenzbegriffs.
13. Das Kriterium für die Grenzwert-Existenz.
14. Das Unendlichgrosse und Unendlichkleine.
15. Oberer und unterer Limes.
16. Obere und untere Grenze.
17. Das Rechnen mit Grenzwerten. Die Zahl $e = \lim \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$.
18. Sogenannte unbestimmte Ausdrücke.
19. Graduierung des Unendlich- und Nullwerdens.
20. Grenzwerte zweifach-unendlicher Zahlenfolgen.

Zweiter Teil. Unendliche Reihen, Produkte, Kettenbrüche und Determinanten.

III. Unendliche Reihen.

21. Konvergenz und Divergenz.
22. 23. Die Konvergenzkriterien von *Gauss* und *Cauchy*.
24. *Kummer's* allgemeine Kriterien.
25. Die Theorien von *Dini*, *Du Bois-Reymond* und *Pringsheim*.
26. 27. Die Kriterien erster und zweiter Art.
28. Andere Kriterienformen

29. Tragweite der Kriterien erster und zweiter Art.
30. Die Grenzgebiete der Divergenz und Konvergenz.
31. Bedingte und unbedingte Konvergenz.
32. Wertveränderungen bedingt konvergenter Reihen.
33. Kriterien für eventuell nur bedingte Konvergenz.
34. Addition und Multiplikation unendlicher Reihen.
35. Doppelreihen.
36. Vielfache Reihen.
37. Transformation von Reihen.
38. *Euler-Mac Laurin'sche* Summenformel. Halbkonvergente Reihen.
39. Divergente Reihen.
40. Divergente Potenzreihen.

IV. Unendliche Produkte, Kettenbrüche und Determinanten.

41. Unendliche Produkte: Historisches.
42. Konvergenz und Divergenz.
43. Umformung von unendlichen Produkten in Reihen.
44. Faktoriellen und Fakultäten.
45. Allgemeine formale Eigenschaften der Kettenbrüche.
46. Rekursive und independente Berechnung der Näherungsbrüche.
47. Näherungsbrücheigenschaften besonderer Kettenbrüche.
48. Konvergenz und Divergenz unendlicher Kettenbrüche. Allgemeines Divergenzkriterium.
49. Kettenbrüche mit positiven Gliedern.
50. Konvergente Kettenbrüche mit Gliedern beliebigen Vorzeichens.
51. Periodische Kettenbrüche.
52. Transformation unendlicher Kettenbrüche.
53. Umformung einer unendlichen Reihe in einen äquivalenten Kettenbruch.
54. Anderweitige Kettenbruchentwicklungen unendlicher Reihen.
55. Kettenbrüche für Potenzreihen und Potenzreihenquotienten.
56. Beziehungen zwischen unendlichen Kettenbrüchen und Produkten.
57. Aufsteigende Kettenbrüche.
58. Unendliche Determinanten: Historisches.
59. Haupteigenschaften unendlicher Determinanten.

Litteratur.

Lehrbücher.

- Leonhard Euler*, Introductio in analysin infinitorum. I. Lausannae 1748. Deutsch von *Michelsen* (Berlin 1788) und von *H. Maser* (Berlin 1885).
- Augustin Cauchy*, Cours d'analyse de l'école polytechnique. — I. Analyse algébrique. Paris 1821. Deutsch von *C. Itzigsohn*, Berlin 1885.
- M. A. Stern*, Lehrbuch der algebraischen Analysis. Leipzig 1860.
- Eugène Catalan*, Traité élémentaire des séries. Paris 1860.
- Oskar Schlömilch*, Handbuch der algebraischen Analysis. Jena 1868 (4. Aufl.).
- Charles Méray*, Nouveau Précis d'analyse infinitésimale. Paris 1872. — Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale. I. Paris 1894.
- Karl Hattendorff*, Algebraische Analysis. Hannover 1877.

- Rudolf Lipschitz*, Lehrbuch der Analysis. I: Grundlagen der Analysis. Bonn 1877.
Moritz Pasch, Einleitung in die Differential- und Integral-Rechnung. Leipzig 1882.
Max Simon, Elemente der Arithmetik als Vorbereitung auf die Functionentheorie. Strassburg 1884.
Otto Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. 2 Bde. Leipzig 1885. 86.
Jules Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. Paris 1886.
Camille Jordan, Cours d'analyse de l'école polytechnique. 2^{de} éd. I. Paris 1893.
Ernesto Cesaro, Corso di analisi algebrica. Torino 1894.
Otto Biermann, Elemente der höheren Mathematik. Leipzig 1895.
Alfred Pringsheim, Vorlesungen über die element. Theorie der unendl. Reihen und der analyt. Functionen. I. Zahlenlehre. (Demnächst bei B. G. Teubner, Leipzig, erscheinend.)

Bezüglich der Irrationalzahlen vergleiche man noch: *P. Bachmann*, Vorl. über die Natur der Irrationalzahlen, Leipzig 1892; bez. der unendlichen Reihen: *J. Bertrand*, Traité de calc. différentiel, Paris 1864¹⁾.

Monographien.

- Siegm. Günther*, Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche. Schul-Programm, Weissenburg 1872.
Paul du Bois-Reymond, Die allgemeine Functionentheorie. I (einz.). Tübingen 1882.
R. Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen 1889.
Giulio Vivanti, Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica. Mantova 1894.

Erster Teil. Irrationalzahlen und Grenzbegriff.

I. Irrationalzahlen.

1. Euklid's Verhältnisse und incommensurable Grössen. Die *Irrationalzahlen*, deren principielle Einführung eine der wesentlichsten Grundlagen der *allgemeinen Arithmetik* bildet, sind nichtsdestoweniger zunächst aus *geometrischen* Bedürfnissen erwachsen: sie erscheinen ursprünglich als Ausdruck für das *Verhältnis incommensurabler* (d. h. durch kein gemeinschaftliches Mass messbarer) *Streckenpaare* (z. B. der Diagonale und Seite eines Quadrats²⁾). In diesem Sinne kann das 5. Buch des *Euklid*, welches die *allgemeine* Theorie der „*Verhältnisse*“ entwickelt, sowie das von den *incommensurablen* Grössen handelnde 10. Buch als litterarischer Ausgangspunkt für die Lehre von den *Irrationalzahlen* angesehen werden. Immerhin behandelt *Euklid* naturgemäss nur ganz bestimmte mit *Zirkel und Lineal konstruierbare* (also, arithmetisch gesprochen, durch Quadratwurzeln dar-

1) Die sehr umfangreichen Abschnitte über *Reihen* in *S. F. Lacroix'* grossem Traité de calc. diff. et intégr. (3 Vols., 2^{de} éd., Paris 1810—1819) enthalten über die *elementare* Reihenlehre wenig brauchbares.

2) Dass die Diagonale und Seite eines Quadrats incommensurabel seien, soll schon *Pythagoras* erkannt haben; s. *M. Cantor*, Gesch. der Math. 1 (Lpz. 1880), p. 130. 154.

stellbare) *Irrationalitäten* in ihrer Eigenschaft als *incommensurable Strecken*³⁾; die Anschauung, dass das Verhältnis zweier solcher spezieller oder gar zweier ganz beliebig zu denkender incommensurable Strecken eine *bestimmte* (irrationale) *Zahl definiere*, ist ihm, wie überhaupt den Mathematikern des Altertums, fremd geblieben⁴⁾.

2. **Michael Stifel's Arithmetica integra.** Aber auch für die Arithmetiker und Algebraisten des Mittelalters und der Renaissance sind die aus der Geometrie übernommenen *Irrationalitäten* noch keine „wirklichen“, sondern allenfalls *uneigentliche* oder *fingierte Zahlen*⁵⁾, die lediglich wie ein notwendiges Übel geduldet werden. Den ersten entscheidenden Schritt für eine richtigere Schätzung der Irrationalzahlen verdankt man wohl *Michael Stifel*, der im 2. Buche seiner *Arithmetica integra*⁶⁾ im Anschlusse an das 10. Buch des *Euklid* ausführlich von den „*Numeris irrationalibus*“⁷⁾ handelt. Wenn er sich auch zunächst noch der aus dem *Euklid* abstrahierten Ansicht anschliesst, dass die *irrationalen Zahlen keine „wirklichen“ Zahlen* seien⁸⁾

3) Näheres darüber (ausser a. a. O. bei *Euklid*): *Klügel*, Math. W.-B. 3, p. 949. *M. Cantor* a. a. O. p. 230. *Schlömilch*, Ztschr. f. M. 34 (1889), Hist. lit. Abth. p. 201.

4) *Euklid* sagt (Elem. X, 7) ganz ausdrücklich: Inkommensurable Grössen verhalten sich *nicht* wie Zahlen zu einander. — *Jean Marie Constant Duhamel* (Des méthodes dans les sciences de raisonnement, Paris 1865—70) hat versucht (a. a. O. 2, p. 72—75), die Euklidische Verhältnislehre für die Fundierung des allgemeinen Irrationalzahlbegriffs nutzbar zu machen. Doch verdirbt er schliesslich seine anfänglich richtige Methode durch unnötige Heranziehung eines unklaren geometrischen Grenzbegriffs. — Dagegen giebt *O. Stolz* (Allg. Arithm. 1, p. 35 ff.) neben einer der heutigen Darstellungsweise angepassten Reproduktion der Euklidischen Verhältnislehre, die nötigen Andeutungen, wie die letztere zu einer einwandfreien Theorie der reellen Zahlen (insbesondere also auch der irrationalen) ausgestaltet werden könne. — Vgl. auch: *O. Stolz*, Grössen und Zahlen (Rektoratsrede vom 2. März 1891, Lpz. 1891), p. 16; ferner: Nr. 13, Fussn. 84.

5) „*Numeri ficti*“, gewöhnlich als „*Numeri surdi*“ bezeichnet: diese dem *Leonardo von Pisa* (Liber abaci, 1202) zugeschriebene Benennung hat sich bis ins 18. Jahrhundert, in England („*Surds*“) bis auf die Gegenwart erhalten.

6) Nürnberg 1544. Fol. 103—223.

7) Die Bezeichnung „*radices surdae*“ gebraucht *Stifel* in einem engeren Sinne a. a. O. Fol. 134.

8) Die entgegengesetzte Angabe bei *C. J. Gerhardt* (Gesch. der Math. in Deutschl., München 1877, p. 69) scheint mir inkorrekt. Die betreffende Stelle bei *Stifel* (a. a. O. Fol. 103^a) lautet ganz unzweideutig: „Non autem potest dici numerus verus, qui talis est, ut praecisione careat et ad numeros veros nullam cognitam habet proportionem. Sicut igitur infinitus numerus non est numerus: sic irrationalis numerus non est verus numerus atque lateat sub quadam infinitatis nebula.“

so liegt hierin, wie der betreffende Zusammenhang lehrt, doch schliesslich nur eine von der heutigen verschiedene *Ausdrucksweise*, welche im Grunde nichts anderes besagt, als dass die *irrationalen* Zahlen eben *keine rationalen* sind. Dagegen dokumentiert *Stifel* seine mit den modernen Anschauungen *sachlich* im wesentlichen übereinstimmende Auffassung durch den Ausspruch, dass *jeder irrationalen* Zahl gerade so gut, wie *jeder rationalen* ein *eindeutig bestimmter* Platz in der geordneten Zahlenreihe zukomme⁹⁾. Damit erscheint in der That das wesentlichste Moment, welches die Irrationalitäten als *Zahlen* charakterisiert, zum ersten Male scharf hervorgehoben. Freilich sind hierbei unter Irrationalzahlen immer nur gewisse einfache *Wurzelgrössen* zu verstehen — eine Einschränkung, die sich theils aus der damals noch bestehenden Alleinherrschaft der *Euklidischen* Methoden in der *Geometrie* erklärt, theils aber auch aus dem Umstande, dass die Aufsuchung der n^{ten} Wurzel aus einer zwischen g^n und $(g+1)^n$ (g = ganze Zahl) gelegenen ganzen Zahl die *einzig* Aufgabe war, deren *Nichtlösbarkeit* durch eine *rationale* Zahl man damals wirklich *nachweisen* konnte¹⁰⁾.

3. Der Irrationalzahlbegriff der analytischen Geometrie. Erst der allmählich sich vollziehende Bruch mit der Geometrie der Alten, insbesondere die mit dem Erscheinen von *Descartes' Géométrie* (1637) beginnende Entwicklung der analytisch-geometrischen Methode, sodann die Erfindung der Infinitesimalrechnung durch *Leibniz* und *Newton* (1684; 1687) schuf das Bedürfnis, die Äquivalenz zwischen *Strecken* und *Zahlen* weiter auszubilden und den Irrationalzahlbegriff dementsprechend zu vervollständigen. Hatte schon *Descartes* beliebige *Streckenverhältnisse* mit *einfachen Buchstaben* bezeichnet und damit *wie mit Zahlen* gerechnet, so erscheint die Aussage, dass *jedem Verhältnis* zweier Quantitäten eine *Zahl* entspreche, an der Spitze von *Newton's Arithmetica universalis* (1707) geradezu als *Definition* der Zahl¹¹⁾. Und noch specieller an den geometrischen Begriff der

9) A. a. O. Fol. 103^b, Zeile 3 von unten: „Item licet infiniti numeri fracti cadeant inter quoslibet duos numeros immediatos, quemadmodum etiam infiniti numeri *irrationales* cadunt inter duos numeros integros immediatos. *Ex ordinibus tamen utrorumque facile est videre, ut nullus eorum ex suo ordine in alterum possit transmigrare.*“

10) *Stifel* a. a. O. Fol. 103^b.

11) „*Numerum non tam multitudinem unitatum quam abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quae pro unitate habetur rationem intelligimus.*“ — Freilich erscheint, wie *Stolz* treffend bemerkt (Allg. Arithm. 1, p. 94), diese Definition bei *N.* nur als eine Art Paradestück: für eine wirkliche

messbaren Grösse anknüpfend definiert *Chr. Wolf*, dessen in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts überaus verbreiteten Lehrbücher trotz ihres Mangels an Originalität und schärferer Kritik immerhin als Ausdruck der damals von der grossen Majorität acceptierten Ansichten gelten können: „*Zahl* ist dasjenige, was sich zur Einheit verhält, wie eine gerade Linie zu einer gewissen anderen Geraden“¹²⁾. Die *Zahl* erscheint also als Ausdruck für das Resultat der *Messung* einer *Strecke* durch eine andere, welche die Rolle der *Einheitsstrecke* spielt — eine Anschauung, die bis in die neueste Zeit hinein zur einzig herrschenden wurde und auch noch heutzutage von einzelnen Mathematikern streng festgehalten wird. Jeder *Strecke* (oder auch — vermöge einer einfachen und bekannten Modifikation — jedem *Punkte* einer Geraden) entspricht nunmehr eine bestimmte *Zahl*, nämlich entweder eine *rationale* oder eine *irrationale*, d. h. zunächst ein nach geeigneten Regeln (Euklidisches Verfahren zur Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Masses¹³⁾ oder unbegrenzte Unterteilung der messenden Einheitsstrecke) zu gewinnender *unbegrenzt fortsetzbarer Algorithmus in rationalen Zahlen* (unendlicher Kettenbruch, unendlicher Dezimalbruch); die *Berechtigung*, ein solches *unbegrenztes System von Rationalzahlen* als eine *einzig bestimmte Zahl* zu betrachten, wird dann ausschliesslich darin erblickt, dass dasselbe als *arithmetisches Äquivalent* einer *gegebenen Strecke* mit Hülfe derselben *Messungsmethoden* gefunden wird, welche für *andere Strecken* eine *bestimmte rationale Zahl* liefern. Daraus folgt nun aber *keineswegs*, dass man umgekehrt auch berechtigt ist, ein *beliebig vorgelegtes arithmetisches Gebilde* der bezeichneten Art in dem eben definierten Sinne als *Irrationalzahl* zu betrachten, d. h. die Existenz einer jenes Gebilde bei geeigneter Messung erzeugenden *Strecke* als *evident* anzusehen¹⁴⁾. Dieser für die konsequente Aus-

Ausbildung der Irrationalzahltheorie auf Grund der Euklidischen Verhältnislehre wird sie keineswegs ausgenützt. (Vgl. auch: *Stolz*, Zur Geometrie der Alten, Math. Ann. 22 [1888], p. 516.)

12) *Elementa Matheseos universae*. 1, Halae 1710: *Elementa Arithmeticae*, Art. 10. (Ich zitiere nach der mir vorliegenden zweiten Auflage von 1730.)

13) *Eucl. Elem.* X, 2, 3. *A. M. Legendre*, *Géométrie*, Livre III, Probl. 19.

14) Der oben citierte *Chr. Wolf* weiss hierüber nur folgendes zu sagen (a. O. Art. 296): „In geometria et analysi demonstrabitur, tales radices, quae actu dari non possunt, esse ad unitatem ut rectam lineam ad rectam aliam, consequenter numeros eosque irracionales, cum ex hypothesis rationales non sint.“ Das läuft doch schliesslich wieder darauf hinaus, dass von den *arithmetisch definierten Irrationalitäten* lediglich die *geometrisch konstruierbaren* als *Zahlen* zu betrachten sind. Dabei springt nun freilich *W.* mit dem Begriffe der *geometrischen Konstruierbarkeit* in der Weise leichtfertig um, dass er z. B. Parabeln be-

ildung des Irrationalzahlbegriffs fundamentale Punkt wurde bis in die eueste Zeit teils mit Stillschweigen übergangen, teils mit Hülfe angeblicher geometrischer Evidenzen abgethan oder durch metaphysische Redensarten über Stetigkeit, Grenzbegriff und Unendlichkleines mehr verdunkelt, als aufgeklärt.

4. Das Cantor-Dedekind'sche Axiom und die arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen. *G. Cantor* hat wohl zuerst scharf hervorgehoben, dass die Annahme, *jedem* nach Art einer Irrationalzahl definierten *arithmetischen Gebilde* müsse eine bestimmte *Strecke* entsprechen, weder *selbstverständlich*, noch *beweisbar* erscheine, vielmehr ein wesentliches, rein *geometrisches Axiom* involviere¹⁵). Und fast gleichzeitig hat *R. Dedekind* gezeigt, dass das fragliche *Axiom* (oder, genauer gesagt, ein ihm *gleichwertiges*) derjenigen Eigenschaft, welche man bisher *ohne jede zulängliche Definition* als *Stetigkeit* der geraden Linie bezeichnet hatte, erst einen *greifbaren Inhalt* giebt¹⁶). Um die Grundlagen der allgemeinen *Arithmetik* von einem derartigen *geometrischen* Axiome völlig unabhängig zu machen, hat jeder der beiden genannten Autoren seine besondere *rein arithmetische* Theorie der Irrationalzahl entwickelt¹⁷). Einer anderen, gleichfalls *rein arithmetischen* Einführungsart hatte sich schon seit längerer Zeit *K. Weierstrass* in seinen Vorlesungen über analytische Funktionen bedient¹⁸). *Cantor*

liebig hoher Ordnung ohne weiteres als *konstruierbar* ansieht und diese sodann zur angeblichen Konstruktion von $\sqrt[m]{x}$ benützt! (a. a. O. Elementa Analyseos, Art. 630).

15) Math. Ann. 5 (1872), p. 128.

16) *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Braunschweig 1872. — Das betreffende Axiom erscheint daselbst in folgender Fassung: „Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Klassen von der Art, dass *jeder* Punkt der *ersten* Klasse *links* von *jedem* Punkte der *zweiten* Klasse liegt, so existiert *ein* und *nur ein* Punkt, welcher diese Einteilung . . . hervorbringt.“

17) A. a. O. — Die *Cantor'sche* Theorie wurde ungefähr um dieselbe Zeit, wie von ihrem Verfasser selbst, auch von *E. Heine* (mit ausdrücklichem Hinweis auf mündliche Mitteilungen *Cantor's*) in etwas ausführlicherer Weise publiziert: J. f. Math. 74, p. 174 ff. — Dagegen hat *Ch. Méray* die Grundlagen dieser Theorie *unabhängig* von *Cantor* gleichfalls aufgefunden und ungefähr gleichzeitig mit *Cantor* und *Heine* veröffentlicht in seinem: Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale, Paris 1872.

18) Die Grundprinzipien der *W.'schen* Theorie hat zuerst *H. Kossak* kurz mitgeteilt in einer Programmabhandlung des Werder'schen Gymnasiums, Berlin 1872 (p. 18 ff.). — Ausführlicheres findet man bei *S. Pincherle*, Giorn. di mat. 18 (1880), p. 185 ff. — *O. Biermann*, Theorie der analytischen Functionen, Leipzig 1887, p. 19 ff.

selbst hat im 21. Bande (1883) der Math. Ann. (p. 565 ff.) alle *der* Definitionsformen einer kritischen Vergleichung unterzogen und b dieser Gelegenheit seine erste Darstellung (wohl im Anschluss an d von *Heine* gegebene) einigermassen modifiziert, derart, dass die Trennung der zu definierenden *Irrationalzahl* von jeglicher *Grenzvorstellung* noch schärfer zum Ausdruck kommt.

5. Die Theorien von Weierstrass und Cantor. Die *Weierstrass'sche* Theorie und die etwas bequemer zu handhabende *Cantor'sche* welche man mit *Heine*¹⁹⁾ passend als eine glückliche Fortbildung der ersteren bezeichnen kann, knüpfen beide an eine bestimmte *formale Darstellung* der Irrationalzahlen an, als deren einfachster und jeder mann geläufiger Typus diejenige durch *unendliche Dezimalbrüche* erscheint²⁰⁾. Während aber *W.* hiervon das Prinzip der *Summenbildung* als ausschliessliches *Erzeugungsmoment* beibehält, so entnimmt *C.* jenen Vorbilde den allgemeineren Begriff der sog. *Fundamentalreihe*, d. h. einer Reihe von rationalen Zahlen a_v von der Beschaffenheit, dass $|a_{v+q} - a_v|$ für einen *hinlänglich gross* gewählten Wert von v und *jeden* Wert von q *beliebig klein* wird. *Wesentlich* ist sodann, dass die zu definierende *allgemeine reelle Zahl* (welche je nach Umständen eine *rationale* oder *irrationale* sein kann) *nicht* etwa als *Summe* einer „*unendlichen*“ Anzahl von Elementen oder als „*unendlich entferntes*“ Glied einer Reihe durch irgend welchen nebelhaften *Grenzprozess* gewonnen wird. Dieselbe erscheint vielmehr als ein fertiges, *neu geschaffenes Objekt*, oder, noch konkreter nach *Heine*²¹⁾, als ein *neues Zahlzeichen*, dessen *Eigenschaften* aus denjenigen der definierenden rationalen Elemente eindeutig festgestellt werden, dem ein *eindeutig bestimmter Platz* innerhalb des Gebietes der rationalen Zahlen angewiesen wird, und mit welchem nach bestimmten Regeln *gerechnet*²²⁾ werden kann. Die

19) A. a. O. p. 173.

20) Eine ausführliche Darstellung der *Cantor'schen* Theorie, welche zweckmässig die Lehre von den *systematischen Brüchen* (Verallgemeinerung der Dez.-Br.) zum Ausgangspunkte nimmt, findet man bei *Stolz*, Allg. Arithm. 1, p. 97 ff.; eine andere, für den Anfänger gleichfalls nicht unzweckmässige Darstellung, bei welcher zur Definition der Irrationalzahlen und ihrer Rechnungsoperationen *zwei monotone* Zahlenfolgen (s. Nr. 13 dieses Artikels) dienen, giebt *P. Bachmann*, Vorl. über die Natur der Irrationalzahlen (Lpz. 1892), p. 6 ff.

21) A. a. O. p. 173: „Ich stelle mich bei der Definition (der Zahlen) auf den rein formalen Standpunkt, *indem ich gewisse greifbare Zeichen Zahlen nenne*, so dass die Existenz dieser Zahlen also nicht in Frage steht.“ — Anders *Cantor*: Math. Ann. 21 (1883), p. 553.

22) Vgl. *Pincherle* a. a. O. Art. 18, 28. *Biermann* a. a. O. p. 24. *Heine* a. a. O. p. 177. *Cantor*, Math. Ann. 5, p. 125; 21, p. 568.

auf diese Weise definierten *allgemeinen reellen Zahlen* sind natürlich zunächst *nicht* als Zeichen für bestimmte Quantitäten (zähl- oder messbare Grössen) anzusehen, und die für sie definierten Begriffe „grösser“ und „kleiner“ bezeichnen demgemäss keine *Quantitätsunterschiede*, sondern lediglich *Successionen*. Insbesondere erleidet hierbei also auch der Begriff der *rationalen Zahlen* eine *Erweiterung* in dem Sinne, dass sie als *Zeichen* erscheinen, denen in erster Linie lediglich eine *bestimmte Succession* zukommt²³⁾, und die wohl bestimmte *Quantitäten* vorstellen können, aber nicht müssen. Wird dieser entscheidende Punkt übersehen²⁴⁾, so erscheinen Einwendungen begreiflich, wie sie von *E. Illigens* gegen die Theorien von *Weierstrass* und *Cantor* mit Unrecht erhoben worden sind²⁵⁾. Dass im übrigen die *Weierstrass-Cantor'schen Zahlen* (einschliesslich der *irrationalen*) zur Darstellung bestimmter *Quantitäten* z. B. *Strecken* benützt werden können, ist von den Verfassern der betreffenden Theorien ausdrücklich gezeigt worden²⁶⁾: *jeder Strecke* entspricht (nach Fixierung einer beliebigen Einheitsstrecke) *eine und nur eine bestimmte Zahl*. Das *Umgekehrte* gilt natürlich wiederum nur für *rationale* und *spezielle irrationale Zahlen*; für *beliebige Irrationalzahlen* nur *dann*, wenn man das in Art. 4 erwähnte geometrische *Axiom* gelten lässt²⁷⁾.

6. Die Theorie von Dedekind. *Dedekind* definiert die *Irrationalzahl*, ohne direkte Benützung irgend eines arithmetischen Formalismus, mit Hülfe des von ihm eingeführten Begriffs des „*Schnittes*“²⁸⁾; darunter versteht er eine Scheidung aller Rationalzahlen in zwei Klassen von

23) Man kann, von diesem Begriffe der *eindeutigen Succession* ausgehend, zu einem *vollkommen einheitlichen* Aufbau der Zahlenlehre gelangen, wenn man von vornherein die *natürlichen Zahlen nicht*, wie üblich, auf Grund des Anzahlbegriffs als *Kardinalzahlen*, vielmehr (nach dem Vorgange von *H. Helmholtz* und *L. Kronecker*) als *Ordinalzahlen* einführt. Vgl. meinen Aufsatz *Münch. Ber.* 27 (1897), p. 325.

24) S. z. B. *R. Lipschitz*, *Grundl. d. Anal.*, Abschnitt I, und vgl. meinen Vortrag: Über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht. *Jahresb. d. D. M.-V.* 6 (1848), p. 78.

25) *Math. Ann.* 33 (1889), p. 155; desgl. 35, p. 451. Replik von *Cantor*: ebend. 33, p. 476. — Vgl. auch *Pringsheim*, *Münch. Sitzber.* 27, p. 322, Fussnote.

26) *Pincherle* a. a. O. Art. 19. *Cantor*, *Math. Ann.* 5, p. 127.

27) Bei *Pincherle*, dessen Darstellung der *W'schen* Theorie freilich keineswegs als eine authentische angesehen werden kann, wird merkwürdiger Weise jenes *Axiom* (in der *Dedekind'schen* Form) wiederum als eine selbstverständliche Thatsache betrachtet (a. a. O. Art. 20).

28) A. a. O. § 4.

Individuen (a_1) und (a_2), so dass durchweg $a_1 < a_2$. Ist dann unter den Zahlen a_1 eine *grösste* oder unter den Zahlen a_2 eine *kleinste*, so ist die betreffende (*rationale*) Zahl gerade diejenige, welche den fraglichen *Schnitt* hervorbringt. Im andern Falle wird demselben ein *neues* *geschaffenes* Individuum α , eine *Irrationalzahl*, zugeordnet und als diesen *Schnitt* hervorbringend angesehen. Auf Grund dieser Definitionen lassen sich sodann die Beziehungen dieser neuen Zahlen α untereinander und zu den rationalen Zahlen a , sowie die elementaren Rechenoperationen eindeutig feststellen, wie *D.* selbst im wesentlichen durchgeführt hat. Eine ausführlichere Darstellung in mehr *geometrischem* Gewande hat *M. Pasch* in seiner „Einleitung in die Differential- und Integral-Rechnung“ gegeben²⁹⁾ und dieser später einige Modifikationen hinzugefügt³⁰⁾, welche die in Wahrheit doch wesentliche *arithmetische* Grundlage jener Theorie deutlicher hervortreten lassen.

Gerade dadurch, dass die *Dedekind'sche* Einführungsart der Irrationalzahlen an keinerlei arithmetischen Algorithmus anknüpft, gewinnt sie den Vorzug einer ganz besonderen Kürze und Prägnanz. Aus dem nämlichen Grunde erscheint sie aber auch merklich abstrakter und schliesst sich dem Kalkül weniger bequem an, als die *Cantor'sche*. Nicht unzweckmässig hat daher *J. Tannery* in seiner „Introduction à la Théorie des Fonctions“³¹⁾ eine Darstellung gewählt, welche von der *Dedekind'schen* Definition ausgehend weiterhin durch Heranziehung der *Cantor'schen Fundamentalreihen* an dessen Theorie Anschluss gewinnt.

7. Du Bois-Reymond's Kampf gegen die arithmetischen Theorien. Der Trennung des *Zahl-Begriffs* von demjenigen der *messbaren* Grösse, wie sie durch die arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen statuiert wird, ist insbesondere *P. Du Bois-Reymond* mit Entschiedenheit

29) Leipzig 1882, §§ 1—3.

30) Math. Ann. 40 (1892), p. 149.

31) Paris 1886, Chap. 1. — Übrigens begeht *Tannery* einen Irrtum, wenn er (p. IX) den eigentlichen Grundgedanken der *Dedekind'schen* Theorie *J. Bertrand* (Traité d'Arithmétique) zuschreibt, wie *Dedekind* mit Recht in der Vorrede seiner Schrift: „Was sind und was sollen die Zahlen?“ hervorgehoben hat (p. XIV). *Bertrand* benützt die beiden im Texte mit (a_1), (a_2) bezeichneten Klassen thatsächlich nur, ganz wie die älteren Mathematiker, zur *angenäherten Darstellung* der *Irrationalzahl*; ihre *Definition* knüpft er keineswegs an den ihm fremden Begriff des *Schnittes*, sondern durchaus an denjenigen der *messbaren Grösse* (s. a. a. O. 11. Aufl., 1895, Art. 270. 313), und er usurpiert stillschweigend für die Begründung der Addition und Multiplikation der Irrationalzahlen (Art. 314. 315) das *Axiom* des Art. 4.

zeit entgegengetreten³²). In seiner „Allgemeinen Funktionentheorie“ (Tübingen 1882) verwirft er dieselbe als formalistisch, die Analysis zu einem blossen Zeichenspiele herabwürdigend³³), und betont aus historischen und philosophischen Gründen den untrennbaren Zusammenhang der Zahl mit der messbaren oder, wie er sie nennt, „lineären“ Grösse. Dabei reduziert er die in dem Axiome des Art. 4 enthaltene Forderung auf diejenige der Decimalbruchgrenze, d. h. der Existenz einer bestimmten Strecke, welche (in dem oben — Nr. 3 — näher erörterten Sinne) einem beliebig vorgelegten unendlichen Decimalbruche entspricht³⁴). Er sieht nun diese Aussage nicht ohne weiteres als ein Axiom an, sondern untersucht, in wieweit sich dieselbe durch Betrachtungen wesentlich psychologischer Natur begründen lasse. Über den erkenntnistheoretischen Wert dieser Auseinandersetzung³⁵) wird an späterer Stelle zu berichten sein³⁶). Für den Mathematiker kommt dabei schliesslich kaum etwas anderes heraus, als dass er die fragliche Forderung als Axiom gelten lassen muss, wenn er die Lehre von den Irrationalzahlen auf diejenige von den messbaren Grössen begründen will. Es ist dies der Standpunkt, den in neuester Zeit G. Ascoli gegenüber den arithmetischen Irrationalzahltheorien als den ihm einzig natürlich erscheinenden hervorgehoben hat³⁷). Immerhin dürfte sich heutzutage die bei weitem grosse Mehrzahl der wissenschaftlichen Mathe-

32) Herm. Hankel (Theorie der complexen Zahlensysteme) schrieb schon 1867, also zu einer Zeit, wo ihm höchstens die Weierstrass'sche Theorie durch mündliche Mitteilung bekannt sein konnte, folgendes (a. a. O. p. 46): „Jeder Versuch, die irrationalen Zahlen formal und ohne den Begriff der Grösse zu behandeln, muss auf höchst abstruse und beschwerliche Künsteleien führen, die, selbst wenn sie sich in vollkommener Strenge durchführen liessen, wie wir gerechten Grund haben zu bezweifeln, einen höheren wissenschaftlichen Wert nicht haben.“ Es erscheint äusserst merkwürdig, dass gerade der Schöpfer einer rein formalen Theorie der Rationalzahlen für die entsprechende Weiterbildung des Zahlbegriffs so wenig Verständnis gezeigt hat.

33) A. a. O. Art. 18.

34) Diese Forderung reicht in der That hin, da sich jede beliebige, arithmetisch definierte Irrationalzahl als systematischer Bruch mit beliebiger Basis darstellen lässt, s. Nr. 9, Fussnote 48.

35) A. a. O. p. 1—168.

36) VI A 2 a, 3 a.

37) Rend. Ist. Lomb. (2) 28 (1895), p. 1060. — A. formuliert dabei jenes Axiom folgendermassen: „Liegt von den Segmenten $\overline{a_1 b_1}$, $\overline{a_2 b_2}$, $\overline{a_3 b_3}$, ... jedes ganz im Innern des vorhergehenden und ist $\lim_{n=\infty} \overline{a_n b_n} = 0$, so giebt es stets einen und nur einen Punkt, der im Innern aller dieser Segmente liegt.“

matiker einer der rein *arithmetischen* Definitionsformen der Irrationalzahlen angeschlossen haben und somit einer *Trennung* der reinen *Zahlenlehre* von der *eigentlichen Grössenlehre* zustimmen³⁸⁾. Die Einführung jenes *Axioms* wird bei dieser Auffassung erst erforderlich, wenn es sich darum handelt, die innerhalb der *reinen Arithmetik* ohne seine Mitwirkung zu Recht bestehenden Ergebnisse in die *Raumanschauung* zu übertragen³⁹⁾.

8. Die vollkommene Arithmetisierung im Sinne Kronecker

Während die Anhänger der eben bezeichneten „arithmetisierenden“ Richtung sich damit begnügen, die *Definition* der *Irrationalzahlen* und der damit auszuführenden Rechnungsoperationen auf die Lehre von den *rationalen*, also schliesslich von den *ganzen Zahlen* zu begründen, hat *Kronecker* einen wesentlich höheren Grad von „*Arithmetisierung*“ der gesamten *Zahlenlehre* (*Arithmetik*, *Analysis*, *Algebra*) als erstrebenswertes und nach seiner Meinung auch erreichbares Ziel hingestellt⁴⁰⁾. Darnach sollen die arithmetischen Disciplinen alle „*Modifikationen und Erweiterungen des Zahlbegriffs*“ (ausser demjenigen der natürlichen Zahl) *wieder abstreifen*“, insbesondere sollen also die *Irrationalzahlen* endgültig daraus verbannt werden. Dass es je dahin kommen werde, scheint mir nicht gerade wahrscheinlich⁴¹⁾. Den beachtet man, was *Kronecker* a. a. O. zur Beseitigung der *negative* und *gebrochenen*⁴²⁾, sowie der *algebraischen Zahlen* vorschlägt, so gewinnt man den Eindruck, dass die fragliche *vollkommene Arithmetisierung* jener Disciplinen darauf hinauslaufen würde, deren wohlerprobte Ausdrucksweise und Zeichensprache, welche äusserst *verwickelte Relationen* zwischen *natürlichen Zahlen* in kürzester und vollkommener präciser Weise *zusammenfasst*, in einen höchst weitläufigen und schwer fälligen Formalismus aufzulösen.

38) Vgl. auch *Helmholtz*, Ges. Abh. 3, p. 359.

39) Vgl. *F. Klein*, Math. Ann. 37 (1850), p. 572.

40) J. f. Math. 101, p. 338. — Das inzwischen zum Terminus technicus gewordene Schlagwort „*Arithmetisierung*“ ist wohl von *K.* zuerst gebraucht worden.

41) Vgl. meinen oben citierten Aufsatz: Münch. Sitzber. 27, p. 323, Fussnote. Ferner: *E. B. Christoffel*, Ann. di Mat. (2) 15 (1887), p. 253. (Der Inhalt dieses Aufsatzes ist im übrigen wesentlich zahlentheoretischer Natur.)

42) Die von *Kronecker* benützte, auf dem arithmetischen Begriffe der *Kongruenz* beruhende Methode ist übrigens genau dieselbe, welche schon von *Cauchy* zur Beseitigung der *imaginären Zahlen* entwickelt wurde: Exerc. d'anal. et de phys. math. 4 (1847), p. 87. Vgl. I A 2, Nr. 3.

9. Verschiedene Darstellungsformen der Irrationalzahlen und Irrationalität gewisser Darstellungsformen. Den einfachsten Typus von *Zahlreihen* zur *Darstellung der Irrationalzahlen* bilden die unendlichen, d. h. unbegrenzt fortsetzbaren *systematischen Brüche*⁴³⁾. Schon bei *Theon von Alexandria*⁴⁴⁾ findet sich eine Methode zur angenäherten Berechnung der Quadratwurzeln mit Hülfe von *Sexagesimal-Brüchen*. Die letzteren blieben auch noch im Mittelalter ausschliesslich in Gebrauch und wurden erst seit dem 16. Jahrhundert allmählich durch die *Dezimal-Brüche* verdrängt⁴⁵⁾. Statt der in der Praxis jetzt allgemein üblichen *Dezimal-Brüche* erweisen sich die *dyadischen*⁴⁶⁾, wegen ihrer ausserordentlichen formalen Einfachheit und besonderen geometrischen Anschaulichkeit, für die Zwecke analytischer Beweisführung als vorzugsweise geeignet.

Die *nicht-periodischen* unendlichen Dezimalbrüche dürfen als die ersten arithmetischen Darstellungsformen gelten, deren *Irrationalität* man (auf Grund der eindeutigen Darstellbarkeit jedes *rationalen* Bruches durch einen allemal *periodischen* unendlichen Dezimalbruch⁴⁷⁾) ausdrücklich erkannt hat. Dass umgekehrt *jede* Irrationalzahl durch einen unendlichen Decimalbruch (bezw. systematischen Bruch mit beliebiger Basis) eindeutig darstellbar ist, wurde von *Stolz* allgemein bewiesen⁴⁸⁾.

Eine zweite fundamentale Darstellungsform der Irrationalzahlen, nämlich durch unendliche *Kettenbrüche*⁴⁹⁾ knüpft gleichfalls an das Problem der Quadratwurzelausziehung an. Die Berechnung einer Quadratwurzel mit Hülfe eines unbegrenzt fortsetzbaren *regelmässigen Kettenbruches*⁵⁰⁾ lehrte zuerst (freilich nur an *Zahlen-Beispielen*) *Pietro*

43) Eine ausführliche Theorie derselben bei *Stolz*, Allg. Arithm. 1, p. 97 ff.

44) Um 360 n. Chr. *M. Cantor*, 1, p. 420.

45) Vgl. *M. Cantor*, 2, p. 252. 565—569. — *Siegm. Günther*, Verm. Unters. zur Gesch. der math. Wissensch. (Leipzig 1876), p. 97 ff.

46) Auf die Vorzüge des dyadischen Systems hat u. a. *Leibniz* besonders aufmerksam gemacht: Mém. Par. 1703. (Opera omnia, Ed. Dutens, 3, p. 390.)

47) *Joh. Wallisi* de Algebra Tractatus (1693), Cap. 80.

48) A. a. O. p. 119.

49) In Wahrheit wäre diese Darstellungsform durch den geometrischen Ursprung der Irrationalzahl als Verhältnis *incommensurabler* Strecken und durch die Euklidische Methode zur Feststellung der Commensurabilität bezw. Incommensurabilität (Elem. X 2, 3) unmittelbar angezeigt gewesen. Die historische Entwicklung hat indessen einen anderen Gang genommen.

50) D. h. eines solchen, dessen Teilzähler durchweg $= 1$, dessen Teilnenner natürliche Zahlen sind.

*Cataldi*⁵¹⁾, welcher darnach überhaupt als *Erfinder der Kettenbrüche* anzusehen ist⁵²⁾. Das von *Cataldi* aufgefundene *rein numerische Verfahren* erscheint unter der Form einer *allgemeinen analytischen Methode* bei *Leonhard Euler*, dem man die erste zusammenhängende Theorie der Kettenbrüche verdankt. Schon in seiner ersten Abhandlung⁵³⁾ über diesen Gegenstand zeigt er u. a. folgendes: Jeder *rationale Bruch* lässt sich durch einen *endlichen*, jeder *irrationale* durch einen *unendlichen regelmässigen Kettenbruch* darstellen. Insbesondere liefert die Entwicklung einer *Quadratwurzel* stets einen *periodischen* regelmässigen Kettenbruch; umgekehrt genügt jeder convergente Kettenbruch dieser Gattung einer *quadratischen Gleichung* mit ganzzahligen Coefficienten⁵⁴⁾. Sodann werden die Zahlen e , $\frac{e^2 - 1}{2}$ u. a. durch Kettenbrüche dargestellt⁵⁵⁾ — zunächst freilich *rein numerisch* (d. h. in den näherungsweise gesetzt wird: $e = 2,71828182845904$). Das auf diesen Wege durch blosse *Induktion* gefundene Gesetz für die Bildungsweise der *unendlichen Kettenbrüche* wird aber hierauf auch *analytisch* wirklich bewiesen: damit hat in der That *Euler* die *Irrationalität* von e und e^2 zum ersten Male festgestellt⁵⁶⁾.

Mit Hülfe allgemeinerer Kettenbruch-Entwickelungen gelang es sodann *Joh. Heinr. Lambert*⁵⁷⁾, die *Irrationalität* von e^x , $\tan x$ und somit auch von $\lg x$, $\arctan x$ für *jedes rationale x* , insbesondere⁵⁸⁾ also diejenige von π ($= 4 \arctan 1$) nachzuweisen⁵⁶⁾. Eine Abkürzung dieser Beweise und zugleich ein allgemein nützliches Hilfsmittel zur Erkenntnis

51) Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri. Bologna 1613.

52) Auch die heutige *Bezeichnung* der Kettenbrüche (sowohl die gewöhnliche, als auch die gedrängtere, vgl. Fussn. 338) findet sich schon bei *C.*, mit dem einzigen Unterschiede, dass er & statt + (bezw. & statt +) schreibt (so z. B. a. a. O. p. 70). Die Annahme, dass schon die Griechen, insbesondere *Archimedes* und *Theon von Smyrna* (um 130 n. Chr.), die Berechnung von Quadratwurzeln mit Hülfe von Kettenbrüchen im Prinzip gekannt hätten, beruht lediglich auf Konjekturen. Vgl. *M. Cantor*, 1, p. 272. 369.

53) De fractionibus continuis. Comment. Petrop. 9 (1737), p. 98.

54) Dieser Satz bildet bekanntlich die Grundlage wichtiger Untersuchungen in der Theorie der quadratischen Formen (*Euler*, *Lagrange*, *Legendre*, *Dirichlet*, s. I C 2) und der numerischen Auflösung algebraischer Gleichungen (*Lagrange*, s. I B 3 a).

55) Die Bezeichnungen e und π stammen von *Euler*, vgl. *F. Rudio*, *Archimedes*, *Huygens*, *Lambert*, *Legendre*. Leipzig 1892, p. 53.

56) Vgl. meine Note in den Münch. Sitzber. 1898, p. 325.

57) Hist. de l'Acad. de Berlin, Année 1761 (gedruckt 1768), p. 265.

58) A. a. O. p. 297.

es Irrationalen lieferte *Legendre's* Satz von der *Irrationalität* eines jeden unendlichen Kettenbruches:

$$\frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_2} \pm \dots \pm \frac{a_r}{b_r} \pm \dots,$$

für den Fall, dass die $\frac{a_v}{b_v}$ gewöhnliche ächte Brüche sind⁵⁹). Mit Be-
nützung dieses Satzes dehnte zunächst *Legendre* den Irrationalitäts-
beweis noch auf π^2 aus. Auch beruht darauf z. B. der von *G. Eisenstein*⁶⁰)
gegebene Beweis für die Irrationalität gewisser in der Theorie der
elliptischen Funktionen vorkommender Reihen und Produkte, wie:

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{p^{v^2}}, \quad \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{v-1}}{p^{v^2}}, \quad \sum_1^{\infty} \frac{r^v}{p^{v^2}}, \quad \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^v}\right),$$

wo p eine ganze, r eine rationale positive Zahl⁶¹).

10. Fortsetzung. Die Ausdehnung des *binomischen* Satzes auf
gebrochene Exponenten⁶²) lehrte die Wurzeln eines beliebigen Grades
durch unendliche Reihen darstellen und lieferte damit zugleich den
ersten allgemeinen Reihentypus von *unmittelbar* erkennbarer Irratio-
nalität. Er scheint lange Zeit der einzige dieser Gattung geblieben
zu sein. Der in die meisten Lehrbücher übergegangene *direkte* Beweis
für die Irrationalität der bekannten *e-Reihe* rührt erst von *J. Fourier*
her⁶³). Durch Anwendung eines ganz analogen Beweisverfahrens zeigte
*Stern*⁶⁴) die Irrationalität der Reihe: $\sum_v p^{-v} q^{-m_v}$, (wo p, q natürliche
Zahlen, (m_v) eine unbegrenzte Folge natürlicher Zahlen, für welche
 $m_{v+1} - m_v$ mit v ins Unendliche wächst) und: $\sum \pm (p_1 p_2 \dots p_v)^{-1}$
(wo p_1, p_2, p_3, \dots eine unbegr. Folge wachsender natürlicher Zahlen),
sowie einiger ähnlicher, etwas allgemeinerer Reihen und damit äqui-
valenter unendlicher Produkte.

59) *Éléments de géométrie* (1794), Note IV. (Auch abgedruckt in der oben
citirten Schrift von Rudio p. 161.) Vgl. Nr. 49.

60) *J. f. Math.* 27 (1843), p. 193; 28 (1844), p. 39.

61) Die weiteren Untersuchungen in dieser Richtung beschäftigen sich we-
sentlich mit der Scheidung der Irrationalitäten in *algebraische* und *transcendente*.
Hierüber (speziell auch über die *Transcendenz* von e und π) s. IC 2.

62) Um 1666 durch *Newton* (Brief an Oldenburg vom 24. Okt. 1676 —
s. *Opuscula*, Ed. Castillioneus, 1 (1644), p. 328). *N.* fand den fraglichen Satz
lediglich durch Induktion. Den ersten strengen, rein elementaren Beweis (d. h.
ohne Anw. der Diff.-R.) gab *Euler*: *Nov. Comment. Petrop.* 19 (1774), p. 103.

63) Nach *Stainville*, *Mélanges d'analyse* (1815), p. 339.

64) *J. f. Math.* 37 (1848), p. 95; 95 (1883), p. 197.

W. L. Glaisher⁶⁵⁾ machte darauf aufmerksam, dass man die Irrationalität der von Eisenstein betrachteten Reihen $\sum p^{-v^2}$, $\sum (-1)^{v-1} p^{-v}$ und der allgemeineren: $\sum n_v \cdot p^{-m_v}$ (wo m_v, n_v gewissen Bedingungen genügende nat. Zahlen) ganz unmittelbar erkennt, wenn man dieselben als *systematische* (offenbar *nicht-periodische*) *Brüche* mit der Basis auffasst. Auch weist er mit Hülfe von Kettenbruch-Entwickelungen die Irrationalität verschiedener anderer Reihen nach, die im wesentlichen mit den von Stern behandelten zusammenfallen.

Eine der Exponentialreihe nachgebildete, eindeutige Darstellung jeder ächt-gebrochenen Irrationalzahl durch die Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{m_v}{v!}$ (wo m_v eine natürliche Zahl $< v$) hat Cyp. Stéphanos angegeben⁶⁶⁾; die Summe der Reihe liefert dabei eine rationale Zahl dann und nur dann, wenn von irgend einem bestimmten v ab durchweg $m_v = v - 1$. Übrigen erscheint diese Darstellung nur als ein spezieller Fall einer schon früher von G. Cantor gegebenen⁶⁷⁾. Eine andere ebenfalls eindeutig Darstellung aller zwischen 0 und 1 gelegenen Zahlen durch Reihen von der Form:

$$\frac{1}{m_1 + 1} + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{m_1(m_1 + 1) \cdots m_v(m_v + 1)}$$

rührt von J. Lüroth her⁶⁸⁾. Die rationalen Zahlen liefern stets *periodische*, die irrationalen dagegen *nichtperiodische* Reihen dieser Art — *vice versa*.

Hierher gehört schliesslich noch eine von G. Cantor⁶⁹⁾ mitgeteilte eindeutige Darstellung aller über 1 liegenden Zahlen durch unendliche Produkte von der Form: $\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{m_v}\right)$, wo die m_v nat. Zahlen und $m_{v+1} \geq m_v^2$. Dabei sind die *irrationalen* Zahlen dadurch charakterisiert, dass für unendlich viele Werte von v : $m_{v+1} > m_v^2$, während bei jeder *rationalen* Zahl von einem gewissen Werte v an durchweg die Beziehung $m_{v+1} = m_v^2$ besteht⁷⁰⁾.

65) Philosophical Magazine 45 (London 1873), p. 191.

66) Bull. de la S. M. d. F. 7 (1879), p. 81. — Eine funktionentheoretische Anwendung dieser Darstellungsweise bei G. Darboux, Ann. de l'École norm. (2), 7 (1879), p. 200.

67) Z. f. Math. 14 (1869), p. 124.

68) Math. Ann. 21 (1883), p. 411. — Dasselbst giebt L. auch je eine Anwendung auf Funktionentheorie und Mengenlehre.

69) Z. f. Math. 14 (1869), p. 152.

70) Eine Darstellung spezieller Irrationalitäten durch unendliche Produkte,

II. Grenzbegriff.

11. Der geometrische Ursprung des Grenzbegriffs. Der zum Rationalzahlbegriffe in engster Beziehung stehende allgemeinere Begriff der *Grenze* oder des *Grenzwertes* einer irgendwie definierten, der Anzahl nach unbegrenzten *Zahlenmenge* ist aus dem schon von *Euklid* und *Archimedes* benützten Prinzip der *Exhaustion*⁷¹⁾ in Verbindung mit der erst der neueren Zeit angehörigen Anwendung des *Unendlichen* hervorgegangen. Das *Exhaustions*-Prinzip erscheint bei den Alten unter der Form eines zur Vergleichung von Flächen und Körpern dienlichen rein *apagogischen* Beweisverfahrens, dessen Kern folgendermassen formuliert werden kann⁷²⁾: „Zwei geometrische Grössen A , B sind einander gleich, falls sich zeigen lässt, dass bei Annahme $A > B$ der Unterschied $A - B$, und bei der Annahme $A < B$ der Unterschied $B - A$ kleiner wäre als jede mit A , B gleichartige Grösse.“ Die Auffassung eines von einer stetig gekrümmten Linie oder Fläche begrenzten Raumgebildes als eines Polygons bzw. Polyeders mit „unendlich vielen“ und „unendlich kleinen“ Seiten findet sich schwerlich vor dem 16. Jahrhundert. Auch hier darf wohl der oben bereits citierte *M. Stifel* als der erste gelten, welcher den *Kreis* als ein *Unendlich-Vieleck* und, noch genauer, gewissermassen als *letztes* also nach unserer Ausdrucksweise als „*Grenze*“ aller möglichen Polygone mit endlicher Seitenzahl definierte⁷³⁾. Während er aber gerade hieraus auf die *Unmöglichkeit* schloss, das Verhältnis von Peripherie und Durchmesser durch eine *rationale* oder *irrationale* Zahl darzustellen^{73a)}, so gelangte *Joh. Kepler*, von analogen Anschauungen

als deren erstes Beispiel die bekannte *Wallis'sche* Formel für $\frac{\pi}{2}$ erscheint (s. Nr. 41 Gl. [52]), gab *Ch. A. Vandermonde*, *Mém. de l'Acad.*, Paris 1772. (In der deutschen Ausgabe von *V.'s Abhandl.* aus der reinen Math. [Berlin 1888], p. 67.)

71) Vgl. Art. „*Exhaustion*“ in *Klügel's* W. B., 2, p. 152. — Eine kritischere Darstellung giebt *Hermann Hankel* in *Ersch und Gruber's* Encyclopädie, Sect. I, Bd. 90, Art. „*Grenze*“.

72) *Stolz*, Zur Geometrie der Alten. *Math. Ann.* 22 (1883), p. 514. *Allg. Arithm.* I, p. 24.

73) A. a. O. Fol. 224^a. Def. 7. 8: „Recte igitur describitur circulus mathematicus esse polygonia infinitorum laterum. Ante circulum mathematicum sunt omnes polygoniae numerabilium laterum, quemadmodum ante numerum infinitum sunt omnes numeri dabiles.“

73a) A. a. O. Fol. 224^b. Def. 12. Beachtet man, dass *Stifel* den *allgemeinen* Irrationalzahlbegriff noch nicht hatte (cf. Nr. 2), so darf der obige anscheinend falsche Schluss nicht nur als vollkommen logisch, sondern geradezu als ein charakteristisches Zeichen der (*moderner* Auffassung sich nähernden) *arithmetisch-*

ausgehend, zu brauchbaren Formeln für die *Kubatur* von Rotation körpern⁷⁴⁾. Kurze Zeit darauf erschien *Bonav. Cavalieri's Geometrie de Indivisibilibus*⁷⁵⁾, welche, erheblich über *Kepler's* Spezialuntersuchungen hinausgehend, unbeschadet der einigermaßen mystischen Natur jener „Indivisibilibus“ als die erste grundlegende Darstellung einer allgemeinen wissenschaftlichen *Exhaustionsmethode* angesehen zu werden pflegt⁷⁶⁾.

12. Die Arithmetisierung des Grenzbegriffs. Zu einer arithmetischen Formulierung des Grenzbegriffs, wie sie im wesentlichen heute noch üblich ist, gelangte *John Wallis*⁷⁷⁾, indem er, das unständliche *apagogische* Verfahren der Alten verlassend, *Cavalieri's* direkte geometrische Methode ins *Arithmetische* übersetzte — dem Sinn nach und in heutiger Ausdrucksweise etwa folgendermassen:

Eine Zahl a gilt als *Grenze* einer unbegrenzt fortsetzbaren Zahlenreihe a_ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots$ in inf.), wenn die Differenz $a - a_\nu$ mit hinlänglich wachsenden Werten von ν beliebig klein⁷⁸⁾ wird.

Diese *Definition*, welche die arithmetische Beziehung jener Grenze a zu den Zahlen a_ν vollkommen fixiert, sobald die Zahl a bekannt ist oder zum mindesten ihre *Existenz* von vornherein feststeht, liefert aber noch kein Kriterium, um eventuell aus der Beschaffenheit der Zahlen a_ν auf die *Existenz* einer Grenze schliessen zu können. In dieser Hinsicht nahm man immer wieder seine Zuflucht zu geometrischen Vorstellungen und Analogien, aus denen man dann ohne weiteres die *Existenz* der fraglichen Grenze folgern zu können glaubte⁷⁹⁾. So z. B. sah man bei der *Quadratur* krummlinig begrenzter Ebenen-

scharfen Denkweise *Stifel's* gelten. Jener Schluss stimmt nämlich vollkommen mit unserer heutigen Ansicht überein, dass die *Rektifikation* einer krummen Linie ohne den allgemeinen Irrationalzahlbegriff überhaupt nicht definiert werden kann. Vgl. Nr. 11. 12.

74) *Nova stereometria doliorum*. Linz 1615. (Vgl. *M. Chasles*, *Histoire de la Géométrie* (2^{de} éd. 1875), p. 56. *M. Cantor*, *Gesch. der Math.* 2, p. 750.)

75) *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*. Bologna 1635. (Ausführliches darüber bei *Klügel*, 1, Art. „*Cavalieri's Methode des Untheilbaren*“. *M. Cantor* a. a. O. p. 759.)

76) *H. Hankel* a. a. O. p. 189. *Chasles* a. a. O. p. 57.

77) *Arithmetica Infinitorum* (1655), Prop. 43, Lemma. (In der Gesamtausgabe der *W.'schen Werke* — *Opera omnia*, Oxoniae, 1695. 1, p. 383.) Vgl. *M. Cantor*, 2, p. 823.

78) „Quolibet assignabili minor.“ *L. c.* Prop. 40.

79) Ich übergehe hier wiederum absichtlich alle Versuche, den Grenzbegriff erkenntnistheoretisch und psychologisch zu begründen, als in die *Philosophie der Mathematik* (also nach VI A 2 a, 3 a) gehörig.

stücke, bei der *Rektifikation* von Kurvenbögen (mit Hülfe der Quadratur bez. Rektifikation einer Reihe unbegrenzt angenäherter Polygone) die *Existenz* einer bestimmten *Flächen-* bzw. *Längenzahl* als etwas *selbstverständliches*, auf Grund der *geometrischen* Anschauung *a priori* vorhandenes an⁸⁰⁾. Die *entscheidende Wendung* zur Beseitigung dieser unzulänglichen Auffassung bezeichnet *Cauchy's* Definition und Existenzbeweis⁸¹⁾ für das *bestimmte Integral* einer stetigen Funktion; hiermit wird in der That nicht nur zum ersten Male die *Notwendigkeit* deutlich gemacht, die *Existenz* einer *Flächenzahl* ausdrücklich *arithmetisch* zu beweisen, sondern dieser Nachweis *wenigstens in der Hauptsache* wirklich geliefert — d. h. es wird gezeigt, dass zur Definition jener Flächenzahl *Zahlenreihen* vorhanden sind, welche das zur *Existenz* einer bestimmten *Grenze* erforderliche (sogleich noch näher zu erörternde) *Kriterium* erfüllen⁸²⁾. Fehlt auch bei *Cauchy* (und zwar nicht nur an der betreffenden Stelle, sondern überhaupt in seinen Arbeiten) der *Beweis* dafür, dass jenes *Kriterium* für die Existenz einer bestimmten *Grenze* thatsächlich *hinreicht*, so kann man doch sagen, dass durch *Cauchy's* genannte Leistung die wahre *arithmetische* Natur des allgemeinen Grenzproblems zum ersten Male scharf gekennzeichnet und für dessen endgültige Erledigung der Weg gewiesen worden ist.

13. Das Kriterium für die Grenzwertexistenz. Das erwähnte *Kriterium* für die Existenz einer bestimmten *Grenze* lautet in seiner *Grundform*, d. h. für eine einfache, unbegrenzt fortsetzbare Reihe reeller Zahlen (einfach-unendliche *Zahlenfolge*, einfach-abzählbare⁸³⁾)

80) In der Stereometrie tritt die analoge Schwierigkeit schon bei der Kubatur der *Pyramide* auf; vgl. *R. Baltzer*, Die Elemente der Mathematik 2 (1883), p. 229. *Stolz*, Math. Ann. 22 (1883), p. 517.

81) Beides findet sich schon in dem „Résumé des leçons données à l'école polytechnique sur le calcul infinitésimal“ (Paris 1823), p. 81 (nicht erst, wie häufig angenommen wird, in den von *M. Moigno* 1840—44 herausgegebenen „Leçons sur le calcul différentiel et intégral“ 2, p. 2).

82) Zur vollen Strenge des Beweises wäre noch die Erkenntnis von der *gleichmässigen* Stetigkeit einer schlechthin stetigen Funktion erforderlich — was aber in dem hier vorliegenden Zusammenhange nicht wesentlich ins Gewicht fällt. Vgl. II A 1.

83) Vgl. I A 5, Nr. 2. — In dem vorliegenden Artikel wird im wesentlichen immer nur von den *Grenzwerten abzählbarer Zahlenmengen* gehandelt, da die Grenzwerte *nichtabzählbarer*, insbesondere *stetiger* Zahlenmengen (vgl. I A 5, Nr. 2. 13. 16) der *Analysis* (II A, B) angehören. Natürlich lässt sich diese Trennung mit Rücksicht auf die historische Entwicklung der verschiedenen Grenzwert-

Zahlenmenge) und im Anschluss an die oben gegebene *Definition* der *Grenze* folgendermassen:

Damit die unbegrenzte Zahlenfolge (a_ν) eine bestimmte *Grenze* (einen bestimmten *Grenzwert* oder *Limes*) a besitze, in Zeichen⁸⁴⁾:

$$a = \lim a_\nu \quad (\nu = \infty) \quad \text{oder:} \quad \lim_{\nu = \infty} a_\nu = a,$$

ist *notwendig* und *hinreichend*, dass $a_{n+\varrho} - a_n$ für einen *hinlänglich grossen* Wert von n und *jeden* Wert von ϱ *beliebig klein* wird⁸⁵⁾.

Die Zahlenfolge (a_ν) heisst alsdann *konvergent*.

Dass die obige Bedingung eine *notwendige* ist, folgt unmittelbar aus der *Definition* der *Grenze* und mag wohl bekannt gewesen sein, seit man sich überhaupt mit solchen Grenzwerten beschäftigt hat. Dass sie auch *hinreicht*, wurde bis in die neueste Zeit als *selbstverständlich* angesehen, aber *niemals ausdrücklich bewiesen*. Das Verdienst, diese Notwendigkeit zuerst hervorgehoben zu haben, gebührt *Bolzano*⁸⁶⁾, der den entsprechenden Beweis für den besonderen Fall der *Reihenkonvergenz*⁸⁷⁾ wenigstens zu führen *versuchte*. Derselbe ist allerdings unzulänglich, wie auch ein von *Herm. Hankel* gegebener (auf den allgemeineren Fall *beliebiger* Zahlenmengen bezüglicher) Beweis⁸⁸⁾.

betrachtungen nicht immer streng einhalten (wie z. B. oben bezüglich des Citates über das bestimmte Integral oder bei den folgenden Bemerkungen über den Beweis des Grenzwertkriteriums).

84) Das uns heute völlig unentbehrlich gewordene *Zeichen* *lim* scheint mir zuerst von *Simon L'Huilier* (Exposition élément. des calculs supérieurs, Berlin 1786 — auch unter dem Titel: Principiorum calc. diff. et integr. expositio, Tübingen 1795) angewendet worden zu sein. Allgemein gebräuchlich ist es wohl erst seit *Cauchy* (Anal. algèbr. p. 13) geworden (d. h. also seit 1821; in dem grossen *Traité de calc. diff. et integr.* von *Lacroix*, 1810—1819, wird noch jeder einzelne Grenzübergang umständlich mit Worten bezeichnet). Die oben genannte, in den mir bekannten histor. Darstellungen bei weitem nicht nach Gebühr geschätzte Schrift *L'Huilier's* (von der Berl. Akademie als Lösung einer 1784 gestellten Preisfrage preisgekrönt) enthält die erste strenge Darstellung des Grenzbegriffs auf Grund der Euklidischen Verhältnislehre und der Exhaustionsmethode.

85) Dieser Satz mit seiner Übertragung auf *beliebige* (z. B. stetige) Zahlenmengen — von *Du Bois-Reymond* als das „allgemeine *Konvergenzprinzip*“ bezeichnet (Allg. Funct.-Theorie, pp. 6. 260) — ist der eigentliche *Fundamentalsatz der gesamten Analysis* und sollte mit genügender Betonung seines fundamentalen Charakters an der Spitze jedes rationellen Lehrbuches der Analysis stehen.

86) „Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, etc.“ Prag 1817. Vgl. *Stolz*, Math. Ann. 18 (1881), p. 259.

87) Vgl. auch Nr. 21 dieses Artikels.

88) *Ersch* u. *Gruber* a. a. O. p. 193; Math. Ann. 20 (1882), p. 106. Vgl. *Stolz* a. a. O. p. 260, Fussnote.

Da die Richtigkeit des fraglichen Satzes wesentlich und ausschliesslich auf der wohldefinierten Existenz der Irrationalzahlen beruht, so fallen die ersten strengen Beweise desselben naturgemäss mit dem Auftreten der arithmetischen Irrationalzahltheorien und der damit zusammenhängenden Revision und Verschärfung auch der älteren geometrisierenden Erklärungsweise (vgl. Nr. 7) zusammen. Bei Cantor erscheint der Satz als eine ganz unmittelbar aus der Definition der Irrationalzahlen resultierende Folgerung, wie von ihm selbst scharf hervorgehoben wird⁸⁹). Auch Dedekind hat im Anschluss an seine Irrationalzahltheorie einen vollkommenen Beweis desselben (für den allgemeineren Fall beliebiger Zahlenmengen) geliefert⁹⁰). Der letztere ist von U. Dini etwas einfacher gefasst⁹¹) und sodann von Du Bois-Reymond der von ihm vertretenen Anschauungsweise angepasst worden⁹²). Andere Modifikationen jenes Beweises haben Stolz, J. Tannery, C. Jordan⁹³) und P. Mansion⁹⁴) gegeben.

Ist die Zahlenfolge (a_v) monoton⁹⁵), d. h. niemals ab- oder niemals zunehmend, so genügt für deren Konvergenz die Bedingung, dass die a_v numerisch unter einer festen Zahl bleiben (Beispiel: die system. Brüche). Man kann diese einfachste Form von konvergenten Zahlenfolgen auch zum Ausgangspunkte für die Lehre von den Irrationalzahlen und Grenzwerten nehmen⁹⁶). Doch bedarf man dann, um die Subtraktion und Division definieren zu können, stets zweier solcher Folgen (einer niemals ab- und einer niemals zunehmenden)⁹⁷).

14. Das Unendlichgrosse und Unendlichkleine. Haben die Terme einer unbegrenzten Folge wohldefinierter Zahlen (a_v) die Eigenschaft, dass, wie gross auch eine positive Zahl G vorgeschrieben werde, von einem bestimmten Index v ab durchweg: $a_v > G$ (bezw. $a_v < -G$),

89) Math. Ann. 21 (1883), p. 124.

90) A. a. O. p. 30.

91) Fondamenti per la teorica etc. p. 27.

92) Allg. Funct.-Theorie p. 260.

93) Vgl. meine Bemerkungen in den Münch. Sitzber. 27 (1897), pp. 357, 358. — Stolz hat auch die Existenz des Grenzwertes durch dessen Darstellung in system. Form erwiesen: Allg. Arithm. 1, p. 115 ff. (vgl. Nr. 9 dieses Artikels).

94) Mathesis 5 (1885), p. 270.

95) Dieser Ausdruck stammt von C. Neumann: „Über die nach Kreis-, Kugel- und Cylinder-Funct. fortschr. Entw.“, Leipzig 1881, p. 26.

96) Vgl. Mansion, Mathesis 5, p. 193.

97) Bachmann a. a. O. pp. 12. 13. Vgl. Nr. 4, Note 20. — Wählt man zur Definition der Irrat.-Zahlen noch speciellere Zahlenfolgen, etwa die system. Brüche, so tritt schon bei der Definition der Addition und Multiplikation eine Schwierigkeit ein

so sagt man, der Grenzwert der a_v sei positiv (negativ) *unendlich*, in Zeichen:

$$\lim_{v=\infty} a_v = +\infty \quad (\text{bezw.} \quad \lim_{v=\infty} a_v = -\infty).$$

Die Zahlenfolge (a_v) heisst alsdann *eigentlich divergent*.

Dieser Satz hat nach heutiger Auffassung als *Definition des Unendlichen* zu gelten⁹⁸⁾, während ihn ältere Analysten als einen beweisbaren *Lehrsatz* anzusehen pflegten⁹⁹⁾; in Wahrheit musste aber jeder solche Beweis auf einen blossen *circulus vitiosus* hinauslaufen, solange keine anderweitige *mathematisch-greifbare Definition* des *Unendlichen* existierte¹⁰⁰⁾ (was erst seit neuester Zeit der Fall ist — s. etwas weiter unten).

Auf Grund der oben gegebenen Definition *ist* unter den Zahlen a_v , wie gross auch v angenommen werden mag, *keine unendlich grosse*, dagegen bedient man sich der *Ausdrucksweise*, die Zahlen a_v werden mit *unbegrenzt* wachsenden Werten von v *unendlich gross*. Das *Unendliche*, welches bei dieser Definitionsform lediglich als ein *Veränderlich-Endliches*, also als ein *Werdendes*, kein *Gewordenes* erscheint, wird als *potentiales*¹⁰¹⁾ oder *uneigentliches*¹⁰²⁾ *Unendlich* bezeichnet.

Aber auch *unabhängig* von jedem derartigen *Werdeprozess* lässt sich das *Unendliche* als ein *aktuales* oder *eigentliches Unendlich* streng arithmetisch definieren. B. Bolzano¹⁰³⁾ hat als eigentümliches Merkmal einer *unendlichen* Menge von Elementen hervorgehoben, dass die Elemente, welche lediglich einen gewissen *Teil* jener Menge bilden, den Elementen der *Gesamt-Menge* *eindeutig-umkehrbar* zugeordnet werden können (z. B. der *Gesamt-Menge* der Zahlen $0 \leq y \leq 12$ die *Teil-Menge* der Zahlen $0 \leq x \leq 5$ auf Grund der Festsetzung: $5y = 12x$). Die nämliche Eigenschaft hat G. Cantor dahin formuliert, dass bei einer *unendlichen* Menge und *nur* bei einer solchen ein *Teil* der Menge mit ihr selbst *gleiche Mächtigkeit* besitzen könne¹⁰⁴⁾. Unabhängig von den

98) Etwa seit Cauchy: Analyse algèbr. pp. 4. 27.

99) S. z. B. Jac. Bernoulli, Positiones arithmeticae de seriebus infinitis (1689), Prop. II (Opera, Genevae 1744, 1, p. 379).

100) Auch was z. B. Du Bois-Reymond in seiner Allg. Functionen-Theorie p. 69 ff. über die Unterscheidung des „Unendlichen“ vom „Unbegrenzten“ sagt, erscheint unhaltbar. Vgl. meine Bemerk. Münch. Sitzber. 1897, p. 322, Fussn. 1.

101) Das *Infinitum potentia* oder *synkategorematische Unendlich* der Philosophen, im Gegensatz zu dem sogleich zu erwähnenden *Infinitum actu* oder *kategorematischen* (aktualen) *Unendlich*.

102) Nach G. Cantor, Math. Ann. 21 (1883), p. 546.

103) Paradoxien des Unendlichen. Leipzig 1851. § 20.

104) Journ. f. Math. 84 (1878), p. 242.

beiden genannten¹⁰⁵⁾ hat *Dedekind* diese Eigenschaft geradezu zur *Definition* des *Unendlichen* erhoben, d. h. (mit Beibehaltung der eben benützten *Cantor'schen* Ausdrucksweise): Eine Menge heisst *unendlich*, wenn sie eine *Teil-Menge* von *gleicher Mächtigkeit* enthält; im entgegengesetzten Falle heisst sie *endlich*¹⁰⁶⁾. *Dedekind* beweist sodann die *Existenz unendlicher Mengen*¹⁰⁷⁾, leitet daraus den Begriff der *natürlichen Zahlenreihe* und schliesslich denjenigen der *Anzahl einer endlichen Menge* ab.

Umgekehrt hat *G. Cantor*, den *Anzahl-Begriff* für *endliche Mengen* in der üblichen Weise als etwas *a priori* gegebenes ansehend, diesen Begriff auf *unendliche Mengen* übertragen und ist hierdurch zur Aufstellung eines konsequent ausgebildeten *Systems von eigentlich-unendlichen* („überendlichen“ oder „transfiniten“) Zahlen geführt worden¹⁰⁸⁾.

In der *Arithmetik* erscheint das *Unendliche* immer nur als *Uneigentlich-Unendliches*, also als *Veränderlich-Endliches*, dessen absoluter Betrag an keine obere Schranke gebunden ist. In der *Funktionenlehre*, zumal für complexe Veränderliche, hat es sich indessen als zweckmässig erwiesen, neben diesem *Uneigentlich-Unendlichen* auch ein *Eigentlich-Unendliches* in der Weise einzuführen, dass man allen möglichen *endlichen Werten*, deren eine Veränderliche fähig ist, den Wert ∞ wie einen einzigen, bestimmten (geometrisch durch einen bestimmten Punkt repräsentierten) hinzufügt¹⁰⁹⁾.

105) Vgl. das Vorwort zur 2. Auflage der Schrift: Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1895. (Erste Auflage 1887.)

106) A. a. O. Nr. 64. *D.* bezeichnet dabei zwei Mengen von „gleicher Mächtigkeit“ (also solche, deren Elemente sich eindeutig-umkehrbar einander zuordnen lassen) als „ähnlich“ (oder auch ausführlicher als solche, die ineinander ähnlich abgebildet werden können). — Eine andere, in gewisser Beziehung noch einfachere Definition des Unendlichen giebt *D.* in dem oben citierten Vorwort, p. XVII. — Vgl. auch *Franz Meyer*, Zur Lehre vom Unendlichen. Antr.-Rede, Tübingen 1889; *C. Cranz*, Wundt's Philos. Studien 21 (1895), p. 1; *E. Schroeder*, Nova acta Leop. 71 (1898), p. 303.

107) Ähnlich, wie schon *Bolzano* a. a. O. § 13.

108) Math. Ann. 21 (1883), p. 545 ff. Die betr. Abhandlung enthält auch eine mit zahlreichen Citaten versehene historisch-kritische Erörterung des Unendlichkeitsbegriffs. — Weiteres über *transfinite Zahlen* s. I A 5, Nr. 3 ff.

109) Dieses eigentliche *Unendlich* der Funktionentheorie lässt sich keineswegs allemal ohne weiteres durch das *uneigentliche Unendlich* ersetzen; mit anderen Worten: das Verhalten einer Funktion $f(x)$ für alle möglichen noch so grossen Werte von x braucht noch keineswegs dasjenige für den Wert $x = \infty$ zu bestimmen. Setzt man z. B.

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x), \quad \text{wo: } f_n(x) = \frac{n}{n+x},$$

Etwas anders verhält es sich mit dem sogenannten *Unendlichkleinen*. Ist $\lim a_v = 0$, so bedient man sich häufig der *Ausdrucksweise*, die Zahlen a_v werden mit *unbegrenzt* wachsenden Werten von v *unendlichklein* ¹¹⁰⁾. Wo immer in der *Arithmetik*, *Funktionenlehre*, *Geometrie* das sog. *Unendlichkleine* auftritt, ist es immer nur ein *unendlichklein werdendes*, also nach der oben gebrauchten Terminologie *Uneigentlich-Unendlichkleines* ¹¹¹⁾. Wenn es auch neuerdings gelungen ist, in sich konsequente Systeme *eigentlich-unendlichkleiner „Grössen“* aufzustellen ¹¹²⁾, so handelt es sich hierbei doch lediglich um blosse *Zeichensysteme* mit *rein formal* definierten Gesetzen, welche von den für reelle Zahlen geltenden zum Teil verschieden sind. Solche fingierte *eigentlich-unendlichkleine Grössen* stehen zu den *reellen Zahlen* in keinerlei direkter Beziehung; sie finden in der eigentlichen *Arithmetik* und *Analysis* keinen Platz und können auch nicht, wie die reellen Zahlen, dazu dienen, *geometrische Grössenbeziehungen* widerspruchsfrei zu *beschreiben*. Insbesondere lässt sich aus der Möglichkeit derartiger arithmetischer Konstruktionen *keineswegs* die *Existenz unendlichkleiner geometrischer Grössen* (z. B. Linienelemente) folgern. G. Cantor hat vielmehr ausdrücklich gezeigt, dass aus der Annahme von Zahlen, die numerisch *kleiner* sind als *jede* positive Zahl, geradezu die *Nichtexistenz unendlichkleiner Strecken* erschlossen werden kann ¹¹³⁾.

15. Oberer und unterer Limes. Aus einer *uneigentlich diver-*

so hat man für *jedes noch so grosse* endliche x ausnahmslos:

$$f(x) = 1,$$

dagegen:

$$f_n(\infty) = 0, \quad \text{also auch: } f(\infty) = 0.$$

Im übrigen ist allgemein das Verhalten einer Funktion $f(x)$ für jenen *Wert* oder *Punkt* $x = \infty$ definiert durch dasjenige von $f\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x = 0$. Vgl. II B 1. — Ein anderer Typus des Eigentlich-Unendlichen („die unendlich ferne Gerade“) hat sich in der projektiven *Geometrie* als zweckmässig erwiesen.

110) *Cauchy*, Anal. algèbr. p. 4. 26.

111) Mit dem *eigentlich-unendlichen* $x = \infty$ der Funktionentheorie korrespondiert *nicht* etwa ein *eigentlich-unendlichkleiner* Wert x , sondern der Wert $x = 0$.

112) O. Stolz hat mit Benützung *Du Bois-Reymond'scher* Untersuchungen zwei verschiedene Systeme von eigentlich-unendlichkleinen Grössen konstruiert: Ber. d. naturw.-medic. Vereins, Innsbruck 1884, p. 1 ff. 37 ff. Allg. Arithm. 1, p. 205 ff. Vgl. I A 5, Nr. 17. — Über *P. Veronesè's „Infiniti und Infinitesimi attuali“* vgl. I A 5, Fussn. 103. 107. — Eine ausführlich historisch-kritische Darstellung der Lehre von den unendlich-kleinen Grössen giebt *G. Vivanti's* Schrift: Il concetto d'infinitesimo, Mantova 1894.

113) Z. f. Philos. 91, p. 112. Vgl. auch O. Stolz, Math. Ann. 31 (1888), p. 601. *G. Peano*, Rivista di Mat. 2 (1872), p. 58.

genten, d. h. weder konvergenten, noch eigentlich divergenten Zahlenfolge (a_v) lassen sich stets *zwei konvergente* oder *eigentlich divergente* Zahlenfolgen (a_{m_v}) , (a_{n_v}) von folgender Beschaffenheit herausheben: Setzt man

$$(1) \quad \lim_{v=\infty} a_{m_v} = A, \quad \lim_{v=\infty} a_{n_v} = a,$$

(wo $A > a$ und A, a entweder bestimmte Zahlen vorstellen oder auch $A = +\infty$, $a = -\infty$ sein kann), so lässt sich aus der Folge (a_v) keine Folge herausheben, welche einen grösseren Limes als A , oder einen kleineren Limes als a besitzt. A heisst hiernach der *grösste* oder *obere*, a der *kleinste* oder *untere* Limes der a_v , in Zeichen¹¹⁴⁾:

$$(2) \quad \limsup_{v=\infty} a_v = A, \quad \liminf_{v=\infty} a_v = a,$$

oder kürzer¹¹⁵⁾:

$$(3) \quad \overline{\lim}_{v=\infty} a_v = A, \quad \underline{\lim}_{v=\infty} a_v = a.$$

Vermöge dieser Verallgemeinerung des Limesbegriffs erscheinen die *konvergenten* und *eigentlich divergenten* Zahlenfolgen als derjenige Grenzfall, bei welchem *oberer und unterer Limes zusammenfallen*, sodass also:

$$(4) \quad \overline{\lim}_{v=\infty} a_v = \lim_{v=\infty} a_v = \underline{\lim}_{v=\infty} a_v.$$

Der Begriff des *oberen und unteren Limes* findet sich schon bei *Cauchy*¹¹⁶⁾, der speziell in der Reihenlehre eine äusserst wichtige Anwendung davon gemacht hat¹¹⁷⁾. *Du Bois-Reymond* hat für den *oberen und unteren Limes* die Bezeichnung *obere und untere Unbestimmtheitsgrenze* eingeführt¹¹⁸⁾ und wird deshalb vielfach fälschlich für den *Erfinder* des damit bezeichneten *Begriffs* gehalten. Immerhin kann man sagen, dass er als der erste die grosse und allgemeine Bedeutung jenes Begriffs für die Reihen- und Funktionenlehre ausdrücklich hervorgehoben und zu dessen konsequenter Anwendung¹¹⁹⁾ Veranlassung gegeben hat.

114) Nach *Pasch*, Math. Ann. 30 (1887), p. 134.

115) Nach einer neuerdings von mir eingeführten Bezeichnung: Münch. Sitzber. 28 (1898), p. 62. Die gelegentliche Anwendung der Bezeichnung $\overline{\lim}_{v=\infty} a_v$

soll bedeuten, dass in dem betreffenden Zusammenhange sowohl der *obere* als der *untere Limes* genommen werden darf.

116) Anal. algèbr. p. 132, 151 etc. — C . bezeichnet den oberen Limes als „la plus grande des limites“. — „La plus petite des limites“ bei *N. H. Abel*: Oeuvres 2, p. 198.

117) Vgl. Nr. 23.

118) Antritts-Progr. d. Univ. Freiburg (1871), p. 3. Münch. Abh. 12, I. Abth. (1876), p. 125. Allg. Funct.-Th. p. 266.

119) Vgl. insbesondere den oben citierten Aufsatz von *Pasch*.

16. Obere und untere Grenze. Mit dem Begriff des *oberen* (*unteren*) *Limes* zwar verwandt, dennoch scharf davon zu unterscheiden, ist der zuerst von *Bolzano*¹²⁰⁾ bemerkte, namentlich aber von *Weierstrass* (in seinen Vorlesungen)¹²¹⁾ betonte Begriff der *oberen* (*unteren*) *Grenze*¹²²⁾: Jede Zahlenfolge (a_v) mit endlich bleibenden (d. h. zwischen zwei bestimmten Zahlen enthaltenen) Termen besitzt eine bestimmte *obere* und *untere Grenze* G, g , d. h. man hat für jedes v : $g \leq a_v \leq G$ und für mindestens je einen Wert $v = m, v = n$: $G - \varepsilon < a_m \leq G, g \leq a_n < g + \varepsilon$ bei beliebig klein vorgeschriebenem positivem ε . Gibt es einen Term $a_m = G$ (eventuell auch mehrere oder sogar unendlich viele), so heisst die *obere Grenze* der a_v zugleich deren *Maximum*¹²³⁾. Gibt es *keinen* solchen, so müssen unendlich viele Terme a_{m_v} vorhanden sein, für welche: $G - \varepsilon < a_{m_v} < G$, d. h. in diesem Falle ist die *obere Grenze* G gleichzeitig der *obere Limes* der a_v . Dies findet offenbar ebenfalls statt, wenn für *unendlich viele* Werte von v die Beziehung $a_v = G$ besteht.

Das analoge gilt bezüglich der unteren Grenze g .

Bleiben die a_v *nicht* unterhalb einer bestimmten *positiven* bzw. oberhalb einer bestimmten *negativen* Zahl, so wird $G = +\infty$, bzw. $g = -\infty$. Auch in diesem Falle erscheint die *obere* bzw. *untere Grenze* zugleich als oberer bzw. unterer *Limes*¹²⁴⁾.

120) Beweis des Lehrs. etc. p. 41. Vgl. *Stolz*, Math. Ann. 18 (1881), p. 257.

121) *Pincherle* a. a. O. p. 242 ff.

122) *Pasch* a. a. O. bezeichnet das, was hier (nach dem Vorgange von *Weierstrass*) obere (untere) *Grenze* genannt wird, als obere (untere) *Schranke*, und verwendet den Ausdruck obere (untere) *Grenze* für den oberen (unteren) *Limes*. — Französische (und italienische) Autoren pflegen den Ausdruck *limite supérieure (limite supérieure)* etc. bald in dem einen, bald in dem andern Sinne zu gebrauchen, was leicht zu Unklarheiten Veranlassung geben kann.

123) *Darboux* (Ann. de l'école norm. (2) 4, p. 61) nennt die obere (untere) Grenze: „la limite maximum (minimum)“ — eine Bezeichnung, die nicht mit *Maximum* (*Minimum*) verwechselt werden darf. — Ich pflege im Falle $a_m = G$ die obere Grenze noch prägnanter als das *reale Maximum* der a_v zu bezeichnen, und nenne sie deren *ideales Maximum*, falls *kein* Term die obere Grenze G erreicht (eine Annahme, die auch den Fall $G = \infty$ mit umfasst). Alsdann kann man sagen: Der obere *Limes* fällt dann und nur dann mit der oberen *Grenze* zusammen, wenn dieselbe ein *ideales* oder *unendlich oft vorkommendes reales Maximum* ist. — Analog für die untere Grenze.

124) *G. Peano* hat darauf aufmerksam gemacht, dass man in gewissen Fällen (z. B. Def. des best. Integrals, der Rektifikation etc.) mit dem Begriffe der oberen (unteren) *Grenze* leichter und präziser operiert, als mit dem des *Limes*: Ann. di Mat. (2), 23 (1895), p. 153.

17. Das Rechnen mit Grenzwerten. Die Zahl $e = \lim \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$.

Sind (a_v) , (b_v) konvergente Zahlenfolgen, so liefern die unmittelbar an die Definition der Irrationalzahlen anzuknüpfenden elementaren Rechnungsregeln die Relationen:

$$(5) \quad \begin{cases} \lim a_v \pm \lim b_v = \lim (a_v \pm b_v), & \lim a_v \cdot \lim b_v = \lim (a_v b_v), \\ \frac{\lim a_v}{\lim b_v} = \lim \left(\frac{a_v}{b_v}\right)^{125} \end{cases}$$

(wobei in der letzten Gleichung der Fall $\lim b_v = 0$ auszuschliessen ist), und allgemein:

$$(6) \quad f(\lim a_v, \lim b_v, \lim c_v, \dots) = \lim f(a_v, b_v, c_v, \dots),$$

wenn f irgend eine Kombination der 4 Species (mit Ausschluss der Division durch 0) bedeutet.

Enthält das Rechnungssymbol f noch andere Forderungen, z. B. Wurzelausziehungen, so gilt Gl. (6) als *Definitions-Gleichung*, sofern die rechte Seite *konvergiert*. Mit Hülfe dieses Prinzips lässt sich insbesondere die Lehre von den gebrochenen und irrationalen Potenzen und deren Umkehrungen, den Logarithmen, konsequent und streng begründen¹²⁶).

Die ausgezeichneten arithmetischen Eigenschaften, welche die *natürlichen* Logarithmen (d. h. die mit der Basis e) von allen anderen voraus haben, beruhen auf den Beziehungen:

$$(7) \quad \lim \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v = e, \quad \lim \left(1 + \frac{a}{v}\right)^v = e^a$$

(a eine beliebige reelle Zahl). Während die letzteren bei *Euler*¹²⁷) nur in dem Zusammenhange erscheinen, dass die Gleichheit der links stehenden Grenzwerte mit den zur *Definition* von e , e^a dienenden *Reihen* (in einer nach heutigen Begriffen freilich unzulänglichen Weise) abgeleitet wird, so hat *Cauchy*¹²⁸) die *Existenz* jener Grenzwerte direkt bewiesen und darauf die *Definition* der Exponentialgrößen und natürlichen Logarithmen gegründet — eine Methode, die seitdem in die meisten Lehrbücher der Analysis übergegangen ist¹²⁹).

125) Ich schreibe von jetzt ab, soweit ein Missverständnis ausgeschlossen erscheint, immer nur \lim statt $\lim_{v=\infty}$.

126) Vgl. *Stolz*, Allg. Arithm. p. 125—148.

127) *Introductio in anal. inf.* 1 § 115—122.

128) *Résumé des leçons etc.* (1823), p. 2.

129) Dabei wird gewöhnlich die Definition der Potenz mit beliebigen (event. also irrationalen) Exponenten als bereits bekannt vorausgesetzt. Man

18. Sogenannte unbestimmte Ausdrücke. Werden die in Gl. (5) vorkommenden $\lim a_v, \lim b_v, \dots = \infty$ oder 0, so entstehen an den *linken* Seiten jener Gleichungen zum Teil sogenannte *unbestimmte Ausdrücke*¹³⁰⁾ (wie: $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0^0, \infty^0$ etc.), als deren „wahre Werte“ man die *rechts* stehenden Grenzwerte (sofern dieselben einen bestimmten Sinn besitzen) nicht gerade sehr passend zu bezeichnen pflegt. Obschon die Methoden zur Bestimmung derartiger Grenzwerte ihre volle Allgemeinheit erst durch die Einführung einer *stetigen* Veränderlichen an Stelle der veränderlichen *ganzen* Zahl gewinnen und in dieser Form der Differentialrechnung angehören¹³¹⁾, so beruhen sie doch schliesslich (wie die ganze Lehre von den Funktionen *stetiger* Veränderlicher) auf gewissen einfachen Sätzen über Grenzwerte gewöhnlicher Zahlenfolgen. Hierhin gehören die folgenden von *Cauchy* herrührenden Beziehungen¹³²⁾.

Man hat

$$(8) \quad \lim \frac{a_v}{v} = \lim (a_{v+1} - a_v) \quad (\text{Beisp. } \lim \frac{\lg v}{v} = 0, \lim \frac{e^v}{v} = \infty)$$

und für $a_v > 0$:

$$(9) \quad \lim \frac{1}{a_v^v} = \lim \frac{a_{v+1}}{a_v} \quad (\text{Beisp. } \lim \sqrt[v]{v} = 1, \lim \sqrt[v]{v!} = \infty),$$

vorausgesetzt, dass die *rechts* stehenden Grenzwerte (im weiteren Sinne) *existieren*¹³³⁾ (aber nicht umgekehrt).

Den ersten dieser Sätze hat *Stolz* folgendermassen verallgemeinert¹³⁴⁾:

Ist (m_v) *monoton* und: $\lim m_v = \pm \infty$ oder: $\lim m_v = 0$, so wird:

$$(10) \quad \lim \frac{a_v}{m_v} = \lim \frac{a_{v+1} - a_v}{m_{v+1} - m_v},$$

falls der *rechts* stehende Grenzwert (im weiteren Sinne) existiert.

kann aber auch die Existenz des Grenzwertes $\lim \left(1 + \frac{a}{v}\right)^v$ zur *Definition* der Potenz mit bel. reellen Exponenten benützen: vgl. *Th. Wulf*, Wiener Monatsh. 8, p. 43 ff. — Diese Methode lässt sich übrigens auch auf complexe Werte von a übertragen; vgl. *J. A. Serret*, Calcul diff. 1 (oder *Serret-A. Harnack* 1), Art. 366.

130) Bei *Cauchy*: Valeurs singulières (Anal. algèbr. p. 45).

131) Vgl. II A 1.

132) Anal. algèbr. p. 59. (Die betr. Sätze sind daselbst zunächst in der allgemeineren Form, wo $f(x)$ an die Stelle von a_v tritt, bewiesen und durch Spezialisierung $x = v$ abgeleitet.)

133) D. h. endlich oder mit best. Vorzeichen unendlich sind.

134) Math. Ann. 14 (1879), p. 232. Allg. Arithm. 1, p. 173.

19. Graduierung des Unendlich- und Nullwerdens. Auf der Untersuchung von Quotienten der Form $\frac{\infty}{\infty}$ (d. h. von $\lim \frac{a_v}{b_v}$, wo $\lim a_v = \infty$, $\lim b_v = \infty$) beruht die *Graduierung* des Unendlichwerdens von Zahlenfolgen (bezw. von Funktionen). Ist $\lim a_v = +\infty$, $\lim b_v = +\infty$, so sind, falls $\lim \frac{a_v}{b_v}$ überhaupt existiert¹³⁵⁾, folgende drei Fälle zu unterscheiden:

$$(11) \quad \lim \frac{a_v}{b_v} = 0, \quad \lim \frac{a_v}{b_v} = g > 0, \quad \lim \frac{a_v}{b_v} = \infty,$$

für welche *Du Bois-Reymond* die Bezeichnungen eingeführt hat¹³⁶⁾:

$$(12) \quad a_v < b_v, \quad a_v \sim b_v, \quad a_v > b_v,$$

in Worten:

a_v wird von niederer Ordnung (schwächer, langsamer) ∞ , als b_v
 „ „ „ derselben „ (ebenso) „ „ „
 „ „ „ höherer „ (stärker, schneller) „ „ „

oder kürzer:

a_v ist *infinitär* kleiner, als b_v ,
 „ „ „ gleich „
 „ „ „ grösser, als „

Ich pflege die Bezeichnung $a_v \sim b_v$ und den ihr entsprechenden Ausdruck auch anzuwenden, wenn nur feststeht, dass $\lim \frac{a_v}{b_v}$ und $\overline{\lim} \frac{a_v}{b_v}$ beide endlich und von Null verschieden sind (also:

$$0 < g \leq \underline{\lim} \frac{a_v}{b_v} \leq G < \infty),$$

und habe den obigen Bezeichnungen noch die folgende hinzugefügt¹³⁷⁾:

$$(13) \quad a_v \underline{\sim} g \cdot b_v, \quad \text{falls: } \lim \frac{a_v}{b_v} = g.$$

Ist (M_v) monoton zunehmend, $\lim M_v = \infty$ ¹³⁸⁾ so hat man:

$$(14) \quad \dots < (\lg_2 M_v)^{p''} < (\lg M_v)^{p'} < M_v^p < (e^{M_v})^{p_1} < (e^{e^{M_v}})^{p_2} < \dots,$$

135) Dies braucht nicht einmal der Fall zu sein, wenn a_v, b_v beide monoton sind, s. z. B. *Stolz*, Math. Ann. 14, p. 232 und vgl. Nr. 29. 30 dieses Artikels.

136) *Ann. di Mat. Ser. II* 4 (1870), p. 339. Die Ausbildung und Verwertung des in (11) (12) definierten Algorithmus bildet den Inhalt des *Du Bois-Reymond'schen Infinitärkalküls*.

137) *Math. Ann.* 35 (1890), p. 302.

138) Im Folgenden soll das Zeichen (M_v) ein für allemal eine Zahlenfolge dieser Art vorstellen.

wenn $p^{(x)}$, p , p_x ganz beliebige (z. B. auch *wachsende*) positive Zahlen bedeuten und $\lg_x M$, den x -fach iterierten Logarithmus¹³⁹⁾ vorstellt. Man kann also, von einem beliebig gewählten „Unendlich“ $\lim A$ ausgehend, eine nach beiden Seiten unbegrenzte Skala von immer *schwächeren*, bezw. immer *stärkeren* „Unendlich“, sog. *Ordnungstypen* des Unendlichen aufstellen. Diese Skala lässt sich auf unendlich viel Arten beliebig *verdichten*¹⁴⁰⁾. Man ist auch bei ihrer Bildung nicht auf die Logarithmen und Exponentialfunktionen angewiesen; doch sind sie die *analytisch-einfachsten* Funktionen dieser Art. Man kann aber auch Zahlenfolgen bezw. Funktionen konstruieren, die schwächer (stärker) unendlich werden nicht nur als jeder bestimmte *einzelne* sondern als *alle möglichen* iterierten Logarithmen¹⁴¹⁾ (Exponentialfunktionen). Das analoge gilt auch für *jede beliebige* Skala solcher Ordnungstypen¹⁴²⁾.

Im Anschluss an Nr. 14 sei noch bemerkt, dass es sich bei diesen „*verschiedenen Typen*“ des Unendlich keineswegs um *eigentliche* Unendlich in dem dort näher bezeichneten Sinne handelt. Die sog. infinitären Relationen von der Form (12) sind lediglich Zusammenfassungen einer unbegrenzten Anzahl von Beziehungen zwischen *endlichen* Zahlen, die an keine obere Grenze gebunden sind¹⁴³⁾.

Die analogen Betrachtungen lassen sich bezüglich des Null- oder Unendlichkleinwerdens anstellen. Nur hat naturgemäss im Falle $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$ die Beziehung $a_n < b_n$ die Bedeutung: a_n wird von *höherer* Ordnung (stärker, schneller) unendlichklein, als b_n u. s. f.¹⁴⁴⁾.

20. Grenzwerte zweifach unendlicher Zahlenfolgen. Die Grenzwerte *zweifach unendlicher* Zahlenfolgen sind meines Wissens in der Litteratur bisher nicht ausdrücklich behandelt worden; man hat nur *spezielle* Formen solcher Grenzwerte (Doppelreihen) und Grenzwerte von *Funktionen zweier Variablen* untersucht, von denen *mindestens eine*

139) Auf die Betrachtung solcher iterierten Logarithmen (und, als naturgemässe Ergänzung, auf diejenige iterierter Exponentialgrössen) ist man durch Untersuchungen über Reihenkonvergenz geführt worden; vgl. Nr. 26 dieses Artikels. — Abel war, soweit ich feststellen konnte, der erste, der von den iterierten Logarithmen in diesem Sinne Gebrauch machte: Oeuvres compl. Éd. Sylow-Lie 1, p. 400; 2, p. 200. — Skalen von ähnlicher Form wie (14) finden sich zuerst bei A. de Morgan, Diff. and integr. calculus (London 1839) p. 323.

140) Du Bois-Reymond a. a. O. p. 341.

141) Du Bois-Reymond, J. f. Math. 76 (1873), p. 88.

142) Du Bois-Reymond, Math. Ann. 8, p. 365, Fussnote. Pincherle, Mem. Acad. Bologn. (4), 5 (1884), p. 739. J. Hadamard, Acta math. 18 (1894), p. 331.

143) Vgl. meine Bem. in den Münch. Sitzber. 27 (1897), p. 307.

144) Weiteres über „Unendlichkeitstypen“ s. I A 5, Nr. 17.

(bei den unendlichen Reihen $\sum f_v(x)$) als *stetig* veränderlich erscheint. Da das charakteristische der hierbei in Frage kommenden Möglichkeiten am einfachsten an Zahlenfolgen der Form $a_{\mu\nu}$ ($\mu = 0, 1, 2, \dots$; $\nu = 0, 1, 2, \dots$) hervortritt¹⁴⁵⁾, so habe ich neuerdings die wichtigsten Sätze über solche Grenzwerte kurz zusammengestellt¹⁴⁶⁾. Als *Kriterium* für die Existenz eines endlichen bzw. positiv unendlichen $\lim_{\mu, \nu = \infty} a_{\mu\nu}$ erscheint dabei eine Bedingung von der Form: $|a_{\mu+\varrho, \nu+\sigma} - a_{\mu\nu}| \leq \varepsilon$ bzw. $a_{\mu\nu} > G$ für $\mu \geq m$, $\nu \geq n$. Hierdurch wird also die Existenz von $\lim_{\nu = \infty} a_{\mu\nu}$ für irgend ein bestimmtes μ und $\lim_{\mu = \infty} a_{\mu\nu}$ für irgend ein bestimmtes ν in keiner Weise präjudiziert. Dagegen existieren offenbar unter allen Umständen: $\lim_{\nu = \infty} a_{\mu\nu}$, $\overline{\lim}_{\nu = \infty} a_{\mu\nu}$ ($\mu = 0, 1, 2, \dots$), $\lim_{\mu = \infty} a_{\mu\nu}$, $\overline{\lim}_{\mu = \infty} a_{\mu\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$), und es gilt der Hauptsatz:

$$(15) \quad \lim_{\mu, \nu = \infty} a_{\mu\nu} = \lim_{\mu = \infty} \overline{\lim}_{\nu = \infty} a_{\mu\nu} = \lim_{\nu = \infty} \overline{\lim}_{\mu = \infty} a_{\mu\nu},$$

falls der *erste* dieser Grenzwerte (im weiteren Sinne) existiert.

Zweiter Teil. Unendliche Reihen, Produkte, Kettenbrüche und Determinanten.

III. Unendliche Reihen.

21. Konvergenz und Divergenz. Den einfachsten Typus von gesetzmässig definierten Zahlenfolgen bilden die *unendlichen Reihen* (s_ν) , bei welchen jeder Term s_ν aus dem vorangehenden durch eine einfache *Addition* erzeugt wird, so dass also:

$$s_\nu = s_{\nu-1} + a_\nu = a_0 + a_1 + \dots + a_\nu.$$

Man sagt alsdann, die *unendliche Reihe* $\sum_0^\infty a_\nu$ sei *konvergent*, eigentlich oder uneigentlich *divergent*, je nachdem die Zahlenfolge (s_ν) *konvergiert* bzw. eigentlich oder uneigentlich *divergiert*. Ist $\lim s_\nu = s$ (s eine bestimmte Zahl incl. 0), so heisst s die *Summe* der Reihe¹⁴⁸⁾.

145) Dies gilt z. B. auch bezüglich des fundamentalen Begriffs der gleichmässigen Konvergenz. Vgl. II A 1.

146) Münch. Ber. 27 (1897), p. 103 ff.

147) A. a. O. p. 105.

148) Einige Autoren bezeichnen s zunächst nur als den *Grenzwert* der Reihe und benützen den Ausdruck *Summe* nur dann, wenn $\lim s_\nu$ *kommutativ* ist, also die Reihe *unbedingt* (vgl. Nr. 31) konvergiert. — Über die Bedeutung des Zei-

chens $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu$ vgl. Nr. 59, Fussn. 448.

Man bedient sich auch vielfach des Ausdrucks, die *Summe* der Reihe sei *unendlich gross* oder *unbestimmt* (sie *oscilliere*), wenn (s_v) *eigentlich* oder *uneigentlich* divergiert. Als *notwendige und hinreichende* Bedingung für die *Konvergenz* der Reihe ergibt sich nach Nr. 13:

Es muss $|s_{n+q} - s_n| \equiv |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+q}|$ lediglich durch Wahl von n für jedes q beliebig klein werden.

Obschon die Einführung unendlicher Reihen bis ins 17. Jahrhundert zurückreicht¹⁴⁹⁾ und ihre Behandlung in der mathematischen Litteratur des 18. einen überaus breiten Raum einnimmt, so wird man darin vergeblich nach einem derartigen *Kennzeichen* der Konvergenz suchen¹⁵⁰⁾. Wenn man *überhaupt* nach der *Konvergenz* eine durch irgendwelche formale Operationen gewonnenen Reihenentwicklung fragte (was schon an und für sich zu den Ausnahmen gehörte), so hielt man die Feststellung, dass $\lim a_v = 0$ sei, schon für ausreichend, obschon doch bereits *Jac. Bernoulli* die *Divergenz* der harmonischen Reihe $\sum \frac{1}{v}$ nachgewiesen hatte¹⁵¹⁾. Selbst *J. L. Lagrange* steht in seiner Abhandlung über die Auflösung der litteralen Gleichungen durch Reihen noch vollständig auf diesem Standpunkte¹⁵²⁾.

149) Über die ältere Entwicklungsgeschichte der Lehre von den unendlichen Reihen vgl. *Reiff* a. a. O.

150) *Reiff* (p. 119) scheint mir zu irren, wenn er eine Stelle bei *Euler* (Comm. Petrop. 7, 1734, p. 150) dahin auffasst, dass letzterer die *Konvergenzbedingung* in der (*Cauchy'schen*) Form: $\lim_{n=\infty} (s_{n+q} - s_n) = 0$ eigentlich schon gekannt habe. Die betreffende Stelle bei *Euler* besagt nämlich nur, dass eine Reihe *divergiert*, wenn: $\lim_{n=\infty} |s_{kn} - s_n| > 0$.

151) Pos. arithm. de seriebus 1689. Prop. XVI (Opera omnia 1, p. 392). *B.* giebt daselbst zwei Beweise, und bezeichnet seinen Bruder *Johann* als Urheber des *ersten* (auf dem sog. *Bernoulli'schen Paradoxon* $\sum_2^{\infty} \frac{1}{v} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{v}$ beruhenden). Der *zweite* (mit Hilfe der Ungleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a} + \frac{a^2 - a}{a^2} = 1)$$

ist der im Prinzip heute noch übliche.

152) Berl. Mém. 24 (1770). Oeuvres 3, p. 61. „... pour qu'une série puisse être regardée comme représentant réellement la valeur d'une quantité cherchée, il faut qu'elle soit convergente à son extrémité, c'est à dire que ses derniers termes soient infiniment petits, de sorte que l'erreur puisse devenir moindre qu'aucune quantité donnée“. Die nun folgende Konvergenzuntersuchung beschränkt sich auf den Nachweis, dass die einzelnen Reihenglieder schliesslich gegen Null konvergieren. — Hiernach kann es kaum verwunderlich erscheinen, dass sich z. B. in dem 1803 gedruckten 1. Bande des *Klügel'schen* W. B. p. 555 noch die

Und die Einführung des *Restgliedes* der *Taylor'schen* Reihe geschieht bei *Lagrange* keineswegs in der Absicht, deren *Konvergenz* zu beweisen (diese wird überhaupt als etwas selbstverständliches mit keinem Worte berührt), sondern lediglich, um die *Fehlergrenze* bei endlichem Abbrechen der Reihe abschätzen zu können¹⁵³).

Die erste im wesentlichen strenge Formulierung der notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Konvergenz einer Reihe wird gewöhnlich *Cauchy*¹⁵⁴) zugeschrieben. *Herm. Hankel*¹⁵⁵) und *O. Stolz*¹⁵⁶) haben indessen hervorgehoben, dass sich dieselbe schon einige Jahre vor *Cauchy* bei *Bolzano*¹⁵⁷) findet. Des letzteren Fassung, die (abgesehen von der Bezeichnung) genau mit der oben gegebenen übereinstimmt, erscheint sogar präziser als die von *Cauchy* gegebene, welche die Möglichkeit eines Missverständnisses nicht ausschliesst¹⁵⁸). Da *Bolzano's* Schriften bis in die neueste Zeit wenig Beachtung fanden, so muss immerhin gesagt werden, dass *Cauchy* als der eigentliche Begründer einer exakten allgemeinen Reihenlehre anzusehen ist¹⁵⁹).

22. Die Konvergenzkriterien von Gauss und Cauchy. Das oben angegebene *wahre Kriterium* für die Konvergenz und Divergenz einer Reihe ist nur in wenigen Fällen (z. B. bei der geometrischen Progression, bei Reihen von der Form $\sum (a_r - a_{r+1})$, bei der harmonischen Reihe) für die Feststellung der Konvergenz oder Divergenz verwendbar. Dieser Umstand führte zur Aufstellung von bequemer zu

folgende Definition vorfindet: „Eine Reihe ist konvergierend, wenn ihre Glieder in ihrer Folge nacheinander immerfort kleiner werden. Die Summe der Glieder nähert sich alsdann immer mehr dem Werte der Grösse, welche die Summe der ins Unendliche fortgesetzten Reihe ist.“

153) *Théorie des fonctions* (1797). *Oeuvres* 9, p. 85.

154) *Anal. algébr.* (also 1821), p. 125.

155) *Ersch u. Gruber*, Art. Grenze, p. 209.

156) *Math. Ann.* 18 (1881), p. 259.

157) *Beweis des Lehrsatzes etc.* 1817.

158) Dies gilt in noch höherem Masse von einer späteren, in den *Anc. exerc.* 2 (1827), p. 221 auftretenden Fassung: $\lim_{n=\infty} (s_{n+q} - s_n) = 0$ — die in der

That auch missverstanden und infolgedessen angefochten worden ist. Vgl. meine Note in den *Münch. Sitzber.* 27 (1897), p. 327. — *N.H. Abel*, der sich in seiner Abh. über die binomische Reihe (*J. f. Math.* 1, 1826, p. 313) fast wörtlich ebenso ausdrückt, giebt in einer aus dem J. 1827 stammenden, aber erst in seinem Nachlasse vorgefundenen Note (*Oeuvres* 2, p. 197) eine mit der unsrigen übereinstimmende, einwandfreie Formulierung.

159) *K. F. Gauss* geht in seiner Untersuchung über die hypergeometrische Reihe (1812), welche freilich das *erste Beispiel* exakter Konvergenzuntersuchung liefert, auf *allgemeine* Konvergenzfragen nicht ein.

handhabenden *Konvergenz-* und *Divergenzkriterien*, d. h. Bedingungen welche sich für die Konvergenz bzw. Divergenz zwar *nicht* als *unwendig*, wohl aber als *hinreichend* erweisen. Die ersten Kriterien dieser Art rühren von *Gauss* her¹⁶⁰⁾ und beziehen sich auf Reihen mit lauter positiven Gliedern a_v , für welche:

$$\frac{a_{v+1}}{a_v} = \frac{v^m + A v^{m-1} + B v^{m-2} + \dots}{v^m + a v^{m-1} + b v^{m-2} + \dots}.$$

Die Reihe *divergiert*, wenn $A - a \geq -1$, sie *konvergiert*, wenn $A - a < -1$.¹⁶¹⁾ Dabei wird die *Divergenz* im Falle $A - a >$ bzw. $A - a = 0$ unmittelbar daraus erschlossen, dass die Glieder der Reihe ins Unendliche wachsen bzw. einer endlichen, von Null verschiedenen Grenze zustreben. Dagegen ergibt sich im Fall $A - a < 0$ die *Divergenz* bzw. *Konvergenz* mit Hülfe des für alle weiteren Konvergenzuntersuchungen als *fundamental* anzusehender Prinzipes der *Reihenvergleichung* (d. h. der gliedweisen Vergleichung der zu untersuchenden Reihe mit einer anderweitig, z. B. durch direkte Summation, bereits als *divergent* oder *konvergent* erkannten Reihe).

23. Fortsetzung. Nachdem *Cauchy* festgestellt hatte, dass die *Konvergenz* einer Reihe mit *positiven* und *negativen* Gliedern gesichert ist, falls die Reihe der *absoluten Beträge* konvergiert¹⁶²⁾, handelte es sich vor allem um die Ausbildung der Konvergenzkriterien für Reihen mit lauter *positiven Gliedern*. Durch Vergleichung mit der geometrischen Progression gewann er zunächst die beiden *Fundamentalkriterien erster und zweiter Art*¹⁶³⁾, nämlich:

- (I) $\sum a_v$ *divergiert*, wenn $\lim \sqrt[v]{a_v} > 1$; *konvergiert*, wenn $\lim \sqrt[v]{a_v} < 1$,
 (II) „ „ „ $\lim \frac{a_{v+1}}{a_v} > 1$; „ „ $\lim \frac{a_{v+1}}{a_v} < 1$.

Hervorzuheben ist die scharfe Unterscheidung in der Fassung dieser beiden Kriterien; bei (I) genügt schon die Beschaffenheit des *oberen Limes* von $\sqrt[v]{a_v}$, um — mit Ausschluss des *einzigen* Falles $\lim \sqrt[v]{a_v} = 1$.

160) S. die eben citierte Abhandlung: Opera 3, p. 139.

161) Eine Ausdehnung dieser Kriterien auf den Fall *complexer* a_v hat *Weierstrass* angegeben: J. f. Math. 51 (1856), p. 22 ff.

162) Anal. algèbr. p. 142. — Die Fassung des Beweises ist freilich unzulänglich. Strenger: Résumé. analyt. p. 39.

163) A. a. O. p. 133. 134. — Wir bezeichnen ein Kriterium nach dem Vorgange von *Du Bois-Reymond* (J. f. Math. 76, p. 61) als ein solches *erster* bzw. *zweiter* Art, je nachdem es ausschliesslich von a_v oder von $\frac{a_{v+1}}{a_v}$ abhängt.

— die Divergenz oder Konvergenz zu entscheiden; bei (II) wird ausdrücklich nur der Fall betrachtet, dass ein bestimmter $\lim \frac{a_{v+1}}{a_v}$ existiert, d. h. es bleiben ausser dem Falle $\lim \frac{a_{v+1}}{a_v} = 1$ auch noch alle diejenigen unerledigt, wo kein bestimmter Limes vorhanden ist¹⁶⁴). Diese Überlegenheit des Kriteriums (I) über (II) ist von *Cauchy* noch speziell hervorgehoben worden¹⁶⁵), und er hat ferner gezeigt, wie dasselbe dazu dienen kann, das Konvergenzintervall¹⁶⁶) (den Konvergenzradius¹⁶⁷) einer Potenzreihe $\sum a_v x^v$ in jedem Falle genau zu fixieren¹⁶⁸). Zur eventuellen Erledigung desjenigen Falles, welchen die Anwendung des Kriteriums (I) unentschieden lässt, beweist *Cauchy* einen Hilfssatz über die gleichzeitige Divergenz und Konvergenz der Reihen $\sum a_v$ und $\sum 2^v \cdot a_{2^v-1}$ (falls $a_{v+1} \leq a_v$), erschliesst aus ihm die Divergenz der Reihe $\sum \frac{1}{v^{1+\varrho}}$ für $\varrho \leq 0$, die Konvergenz für $\varrho > 0$ und leitet daraus ein verschärftes Kriterium erster Art ab:

164) Etwas vollständiger kann man (II) folgendermassen fassen: $\sum a_v$ divergiert, wenn $\lim \frac{a_{v+1}}{a_v} > 1$, konvergiert, wenn $\overline{\lim} \frac{a_{v+1}}{a_v} < 1$. Unentschieden bleibt die Frage, wenn gleichzeitig:

$$\lim \frac{a_{v+1}}{a_v} \leq 1, \quad \overline{\lim} \frac{a_{v+1}}{a_v} \geq 1.$$

165) A. a. O. p. 135 „le premier de ces théorèmes etc.“

166) A. a. O. p. 151. — Résumés analyt. (1833), p. 46.

167) A. a. O. p. 286. — Rés. analyt. p. 113. — Exerc. d'Anal. 3 (1844), p. 390.

168) Es ist eigentümlich, dass dieses für die Funktionentheorie äusserst wichtige Resultat (auf das auch *Cauchy* selbst sichtlich grossen Wert legte) vielfach vollständig übersehen worden oder in Vergessenheit geraten zu sein scheint. Erst vor einigen Jahren ist es von *J. Hadamard* (*J. de Math.* (4) 8 [1892], p. 107) von neuem entdeckt worden und wird seitdem öfters als „*Hadamard'scher Satz*“ zitiert. — Auf der anderen Seite hat sich, trotz der tadellos korrekten Fassung des Kriteriums (I) und der ausdrücklichen Betonung seines spezielleren Charakters, zum Teil die Meinung gebildet, dass durch die drei Annahmen $\lim \frac{a_{v+1}}{a_v} \leq 1$ alle in Betracht kommenden Möglichkeiten erschöpft seien, oder dass zum mindesten die Konvergenz von $\sum a_v$ im Falle der Nicht-Existenz eines bestimmten $\lim \frac{a_{v+1}}{a_v}$ als eine besondere Merkwürdigkeit erscheine (vgl. meine Bemerkungen *Math. Ann.* 35 [1890], p. 308). Und man findet darnach in manchen (sogar der neuesten Zeit angehörigen) Lehrbüchern die ganze Lehre von den Potenzreihen auf die viel zu spezielle Annahme begründet, dass $\lim \left| \frac{a_{v+1}}{a_v} \right|$ existiere.

$$(16) \quad \lim \frac{\lg \frac{1}{a_v}}{\lg v} \begin{cases} < 0: \text{Divergenz,} \\ > 0: \text{Konvergenz.} \end{cases}$$

An anderer Stelle¹⁶⁹⁾ zeigt *Cauchy*, dass die Div. oder Konv. der Reihe $\sum_m^\infty f(v)$ unter gewissen Bedingungen mit derjenigen des Integral $\int_m^\infty f(x) dx$ zusammenfällt, und gewinnt hieraus das *Kriterienpaar*:

$$(17) \quad \begin{cases} \lim v \cdot a_v > 0: \text{Divergenz,} \\ \lim v^{1+\varrho} \cdot a_v = 0: \text{Konvergenz, } (\varrho > 0), \end{cases}$$

welches, beiläufig bemerkt, leicht als im wesentlichen *gleichwertig* mit dem *disjunktiven Doppelkriterium* (16) erkannt wird und einfacher direkt aus dem Verhalten der Reihe $\sum \frac{1}{v^{1+\varrho}}$ ($\varrho \geq 0$) hätte abgeleitet werden können. Wichtiger dünkt mir, dass *C.* hier zum ersten Male die *Divergenz* von $\sum \frac{1}{v \lg v}$, die *Konvergenz* von $\sum \frac{1}{v (\lg v)^{1+\varrho}}$ für $\varrho > 0$ beweist, womit der Weg für die weitere Verschärfung der Kriterien (16) und (17) unmittelbar vorgezeichnet erscheint.

24. Kummer's allgemeine Kriterien. Die Kriterien von *J. L. Raabe*, *J. M. C. Duhamel*, *de Morgan*, *Bertrand*, *P. O. Bonnet*, *M. G. v. Paucker* (deren Veröffentlichung in den Zeitraum von 1832—1851 fällt und von denen später noch die Rede sein wird) liefern lediglich derartige *Verschärfungen* der *Cauchy'schen* Kriterien, an welche sie auch nach Form und Herleitungsweise sich im wesentlichen anschliessen.

Während alle die bisher genannten Kriterien einen *speziellen* Charakter tragen, insofern sie durchweg auf der Vergleichung von a_v mit einer der *speziellen* Zahlenfolgen a_v , v^p , $v \cdot (\lg v)^p$ etc. beruhen, so hat *E. E. Kummer*¹⁷⁰⁾ das folgende *Konvergenz-Kriterium* von überraschend *allgemeinem* Charakter abgeleitet: $\sum a_v$ konvergiert, wenn irgend eine positive Zahlenfolge (P_v) ¹⁷¹⁾ existiert, so dass:

$$(18) \quad \lim \lambda_v \equiv \lim \left(P_v \cdot \frac{a_v}{a_{v+1}} - P_{v+1} \right) > 0.$$

169) *Anc. Exerc.* 2 (1827), p. 221 ff. — Der Satz über den Zusammenhang des Integrals mit der Reihe findet sich in geometrischer Form schon bei *Colin Mac Laurin* (*Treatise of fluxions* 1742, p. 289). — Über die Umformung dieses Krit. durch *B. Riemann*, vgl. Nr. 36.

170) *J. f. Math.* 13 (1835), p. 171 ff.

171) *Kummer* fügt noch die Nebenbedingung hinzu: $\lim P_v \cdot a_v = 0$, welche jedoch in Wahrheit überflüssig ist, wie *Dini* in einer sogleich zu erwähnenden Arbeit zuerst gezeigt hat.

Zugleich zeigt K , dass $\sum a_v$ divergiert, wenn:

$$(19) \quad \lim P_v \cdot a_v = 0,^{172)} \quad \lim \lambda_v = 0, \quad \lim \frac{P_v \cdot a_v}{\lambda_v} > 0,$$

und weist nach, dass allemal wirklich (unendlich viele) Zahlenfolgen (P_v) existieren, welche eins der Kriterien (18) (19) befriedigen; um sie aber in jedem Falle bestimmen zu können, müsste man von vornherein über die *Konvergenz* und *Divergenz* von $\sum a_v$ orientiert sein.

25. Die Theorien von Dini, du Bois-Reymond und Pringsheim.

Erhebliche Verallgemeinerungen der ganzen Lehre von den Konvergenzkriterien bringt sodann *Dini's* umfangreiche, zunächst unmittelbar an *Kummer's* Untersuchung anknüpfende Abhandlung: *Sulle serie a termini positivi*¹⁷³⁾, welche indessen nicht die verdiente Verbreitung gefunden zu haben scheint.

Du Bois-Reymond's „Neue Theorie der Konvergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern“¹⁷⁴⁾ scheint ganz unabhängig von *Dini's* Arbeit entstanden zu sein. Sind auch seine Untersuchungsmethoden und Hauptresultate von denjenigen *Dini's* nicht wesentlich verschieden, so geht er doch *prinzipiell* über *Dini* hinaus durch die ausgesprochene Tendenz, der Lehre von der Konvergenz und Divergenz „durch strengere Begründung und durch sachgemässe Verknüpfung ihrer Theoreme den bis jetzt ihr fehlenden Charakter einer mathematischen Theorie zu verleihen“. Da mir indessen *Du Bois-Reymond* dieses Ziel keineswegs erreicht zu haben scheint¹⁷⁵⁾, so habe ich das von ihm gestellte Problem von neuem aufgenommen und in folgendem Sinne erledigt¹⁷⁶⁾: Es werden aus dem völlig einheitlich durchgeführten, nächstliegenden Prinzip der Reihenvergleichung Regeln von möglicher Allgemeinheit abgeleitet, welche nicht nur alle bisher bekannten Kriterien als spezielle Fälle umfassen¹⁷⁷⁾, sondern auch ihre Tragweite

172) Hier ist diese Bedingung *wesentlich*.

173) Pisa 1867 (Tipogr. Nistri). Auch: Ann. dell' Univ. Tosc. 9 (1867), p. 41—76.

174) J. f. Math. 76 (1873), p. 61—91.

175) Vgl. meine krit. Bemerk. Math. Ann. 35 (1890), p. 298.

176) Math. Ann. 35 (1890), p. 297—394. — Nachtrag dazu: Math. Ann. 39 (1891), p. 125. — Ein Auszug dieser Theorie findet sich: Math. Pap. Congr. Chicago [1896] 1893, p. 305—329.

177) Eine Ausnahme bildet das *Kummer'sche Divergenz-Kriterium*, weil es nicht, wie alle anderen Kriterien von *einer*, sondern von *drei* Bedingungen abhängt. Dasselbe wird aber durch die allgemeineren Div.-Kriterien 2^{ter} Art vollkommen entbehrlich. Vgl. meine Abh. a. a. O. p. 365, Fussn.

und ihren mehr oder weniger verborgenen Zusammenhang deutlich erkennen lassen. Insbesondere erscheint das in seiner Allgemeinheit bisher vollständig abseits stehende Konvergenzkriterium *zweiter Art* von *Kummer* als ein natürliches Glied dieser Theorie und findet sein vollständiges Analogon unter den Kriterien *erster Art*.

26. Die Kriterien erster und zweiter Art. Ich bezeichne mit $d_v \equiv D_v^{-1}$ bzw. $c_v \equiv C_v^{-1}$ das allgemeine Glied einer als *divergent* bzw. *konvergent* erkannten, mit a_v dasjenige einer zu beurteilenden Reihe. Dann ergibt sich als *Hauptform* der Kriterien *erster und zweiter Art*:

$$(20) \quad \begin{cases} \lim D_v \cdot a_v > 0: \text{Divergenz,} \\ \lim C_v \cdot a_v < \infty: \text{Konvergenz}^{178).} \end{cases}$$

$$(21) \quad \begin{cases} \lim (D_v \cdot \frac{a_v}{a_{v+1}} - D_{v+1}) < 0: \text{Divergenz,} \\ \lim (C_v \cdot \frac{a_v}{a_{v+1}} - C_{v+1}) > 0: \text{Konvergenz.} \end{cases}$$

Man kann diesen Kriterien mannigfaltige *andere Formen* geben, wenn man nicht a_v direkt mit d_v, c_v , sondern $F(a_v)$ mit $F(d_v), F(c_v)$ vergleicht, unter F eine *monotone* Funktion verstanden. Hierauf beruht insbesondere die Umformung der *Kriterienpaare* (20) in *disjunktive Doppelkriterien*, bei denen ein *einzig*er Ausdruck über Divergenz und Konvergenz entscheidet.

Versagt für irgend eine bestimmte Wahl von D_v, C_v eins jener Kriterien in der Weise, dass an Stelle der Zeichen \leq das Gleichheitszeichen auftritt, so ergibt sich die *Möglichkeit*, *wirksamere* Kriterien zu erhalten, wenn man statt D_v, C_v solche $\overline{D}_v, \overline{C}_v$ einführt, welche der Bedingung: $\overline{D}_v < D_v$ bzw. $\overline{C}_v > C_v$ genügen, in welchem Falle die Reihe $\sum \overline{D}_v^{-1}$ bzw. $\sum \overline{C}_v^{-1}$ *schwächer* divergent bzw. konvergent heißen soll, als $\sum D_v^{-1}$ bzw. $\sum C_v^{-1}$.¹⁷⁹⁾ Man kann aber solche D_v, C_v nicht nur in unbegrenzter Anzahl, sondern *alle überhaupt möglichen* mit Hilfe der folgenden Sätze herstellen:

Ist $0 < M_v < M_{v+1}$, $\lim M_v = \infty$, so stellt jeder der drei Ausdrücke

178) Die Bezeichnung: $< \infty$ bedeutet: *nicht* ∞ , also *unter einer endlichen Schranke*. Ferner bemerke man, dass \lim hier im Sinne von $\overline{\lim}$ steht, d. h. es braucht keineswegs ein bestimmter Limes von der fraglichen Beschaffenheit zu existieren.

179) Der Begriff der „*schwächeren*“ Divergenz und Konvergenz lässt sich allgemeiner fassen. Vgl. a. a. O. p. 319. 327.

$$(22) \quad (a) \quad M_{v+1} - M_v, \quad (b) \quad \frac{M_{v+1} - M_v}{M_v}, \quad (c) \quad \frac{M_{v+1} - M_v}{M_{v+1}}$$

ein d_v dar, und umgekehrt lässt sich jedes d_v in der Form (a), (b) und im Falle $d_v < 1$ auch in der Form (c) darstellen¹⁸⁰).

Ferner stellt der Ausdruck:

$$(23) \quad \frac{M_{v+1} - M_v}{M_{v+1} \cdot M_v}$$

ein c_v dar — *vice versa*.

Dabei divergieren bzw. konvergieren die betreffenden Reihen um so *schwächer*, je *langsamer* M_v mit v zunimmt¹⁸¹).

Durch Einführung von M_v^q ($0 < q < 1$) an Stelle von M_v erkennt man mit Hülfe der Beziehung:

$$(24) \quad \frac{M_{v+1}^q - M_v^q}{M_{v+1}^q \cdot M_v^q} \sim \frac{M_{v+1} - M_v}{M_{v+1} \cdot M_v^q} \lesssim \frac{M_{v+1} - M_v}{M_{v+1}^{1+q}}$$

jeden dieser Terme als allgemeines Glied einer *konvergenten* Reihe¹⁸²). Sodann liefert die Substitution von $\lg_x M_v$ ($x = 1, 2, 3, \dots$) und (24), wenn man setzt:

$$(25) \quad x \cdot \lg_1 x \cdot \lg_2 x \cdots \lg_x x = L_x(x),$$

mit Hülfe elementarer infinitärer Relationen die beiden unbegrenzt fortsetzbaren Folgen:

$$(26) \quad (a) \quad \frac{M_{v+1} - M_v}{L_x(M_v)}, \quad (b) \quad \frac{M_{v+1} - M_v}{L_x(M_{v+1}) \cdot (\lg_x M_{v+1})^q} \quad (q > 0, x = 1, 2, 3, \dots)$$

als allgemeine Glieder von beständig *schwächer* divergierenden bzw. konvergierenden Reihen. Diese Ausdrücke enthalten für $x = 0$ die

180) Die Vergleichung der Ausdrücke (22) (b) und (c) mit (a) zeigt unmittelbar, dass es zu *jeder* divergenten Reihe *schwächer* divergierende giebt. Setzt man $M_{v+1} - M_v = d_v$, $M_0 = 0$, also: $M_{v+1} = d_0 + d_1 + \cdots + d_v = s_v$, so

folgt: Mit der Reihe $\sum d_v$ divergiert auch $\sum \frac{d_v}{s_{v+1}}$ (Satz von Abel: J. f. Math. 3 [1828], p. 81) und $\sum \frac{d_v}{s_v}$ (Dini a. a. O. p. 8).

181) Man kann geradezu M_v als das *Mass* der Divergenz bzw. Konvergenz von $\sum (M_{v+1} - M_v)$ bzw. $\sum \frac{M_{v+1} - M_v}{M_{v+1} \cdot M_v}$ bezeichnen. Vgl. Du Bois-Reymond a. a. O. p. 64.

182) Daraus folgt mit Anwendung der unmittelbar zuvor gebrauchten Bezeichnungen, dass $\sum \frac{d_v}{s_v^{1+q}}$ konvergiert. Auch dieser Satz findet sich schon bei Abel (in der oben erwähnten nachgelassenen Note: 2, p. 198), ausserdem bei Dini (a. a. O. p. 8).

entsprechenden Anfangsterme in (22), (24), wenn noch $L_0(x) = \lg_0 x = x$ gesetzt wird. Auch kann man in dem Nenner des Ausdruckes (26b) M_{v+1} ohne weiteres durch M_v ersetzen, wenn man die für die Bildung von Kriterien sich zweckmässig erweisende Beschränkung $M_{v+1} \sim M_v$ einführt.

27. Fortsetzung. Hiernach ist die *Hauptform aller überhaupt möglichen Kriterien erster Art* in den beiden Beziehungen enthalten:

$$(27) \quad \begin{cases} \lim \frac{M_v}{M_{v+1} - M_v} \cdot a_v > 0: \text{Divergenz,} \\ \lim \frac{M_{v+1} \cdot M_v}{M_{v+1} - M_v} \cdot a_v < \infty: \text{Konvergenz,} \end{cases}$$

und es stellen die Beziehungen:

$$(28) \quad \begin{cases} \lim \frac{L_x(M_v)}{M_{v+1} - M_v} \cdot a_v > 0: \text{Divergenz,} \\ \lim \frac{L_x(M_v) \cdot \lg_x^q M_v}{M_{v+1} - M_v} \cdot a_v < \infty: \text{Konvergenz} \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} M_{v+1} \sim M_v \\ q > 0 \end{matrix} \right)$$

für $x = 0, 1, 2, \dots$ eine *Skala* von immer *wirksameren* Kriterien dar. Die spezielle Wahl $M_v = v$ liefert alsdann für $x = 0$ das *Cauchy'sche* Kriterium (17), für $x = 1, 2, \dots$ jene Serie, welche zuerst von *de Morgan*¹⁸³), später von *Bonnet*¹⁸⁴) aufgestellt wurde.

Die Kriterien (28) lassen sich auch durch die folgende Skala von *disjunktiven* Kriterien¹⁸⁵) ersetzen:

$$(29) \quad \begin{cases} \lg \frac{M_{v+1} - M_v}{a_v} \begin{cases} < 0 & \text{Divergenz,} \\ > 0 & \text{Konvergenz,} \end{cases} \\ (a) \lim \frac{M_{v+1} - M_v}{M_v} \begin{cases} < 0 & \text{Divergenz,} \\ > 0 & \text{Konvergenz,} \end{cases} \\ (b) \lim \frac{\lg \frac{M_{v+1} - M_v}{L_x(M_v) \cdot a_v}}{L_{x+1}(M_v)} \begin{cases} < 0 & \text{Divergenz,} \\ > 0 & \text{Konvergenz.} \end{cases} \quad (x = 0, 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Spezialisiert man wiederum $M_v = v$, so liefert (a) das *Cauchy'sche* Fundam.-Kriterium (I), (b) für $x = 0$ das *Cauchy'sche* Kriterium (16), für $x = 1, 2, \dots$ eine zuerst von *Bertrand*¹⁸⁶) abgeleitete Serie.

183) Diff. and Integr. Calc. (1839), p. 326. *De Morgan* leitet daraus noch eine andere scheinbar allgemeinere Kriterienform ab, deren Tragweite indessen genau dieselbe ist, wie *Bertrand* und *Bonnet* (J. de Math. 7, p. 48; 8, p. 86) gezeigt haben.

184) J. de Math. 8 (1843), p. 78.

185) In etwas anderer Form abgeleitet von *Dini* a. a. O. p. 14.

186) J. de Math. 7 (1842), p. 37. — Eine elementarere Ableitung giebt *Paucker* (J. f. Math. 42 [1851], p. 139) und *Cauchy* (C. R. 1856, 2^{me} sém., p. 638),

Schliesslich gestattet das in (a) enthaltene *Konvergenz-Kriterium* noch die folgende Verallgemeinerung:

$$(30) \quad \lim \frac{\lg P_v \cdot a_v}{s_v} < 0: \text{Konvergenz,}^{187})$$

wo (P_v) jede beliebige positive Zahlenfolge bedeuten kann und

$$s_v = P_0 + P_1 + \dots + P_v.$$

Dieses *allgemeinste Konvergenzkriterium erster Art* bildet dann das Analogon zum *Kummer'schen Konvergenzkriterium zweiter Art*.

Durch Einsetzen des allgemeinen Ausdrucks (23) für C_v^{-1} in das *Konvergenz-Kriterium zweiter Art* (21) ergibt sich das merkwürdige Resultat, dass dasselbe auch auf die Form gebracht werden kann:

$$(31) \quad \lim (D_v \cdot \frac{a_v}{a_{v+1}} - D_{v+1}) > 0: \text{Konvergenz.}$$

Da jede beliebige positive Zahlenfolge (P_v) entweder der Gattung (D_v) oder der Gattung (C_v) angehören muss, so findet man durch Kombination von (31) mit dem *Konvergenz-Kriterium* (21) unmittelbar das *Kummer'sche Konvergenz-Krit.* (18), mit dem *Divergenz-Krit.* (21) das *disjunktive Krit. zweiter Art*:

$$(32) \quad \lim (D_v \cdot \frac{a_v}{a_{v+1}} - D_{v+1}) \begin{cases} < 0: \text{Divergenz,} \\ > 0: \text{Konvergenz,} \end{cases}$$

in welches man nur aus (22a), (26a):

$$(33) \quad D_v = \frac{1}{M_{v+1} - M_v} \quad \text{bzw.} \quad D_v = \frac{L_x(M_v)}{M_{v+1} - M_v} \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

einzusetzen hat, um *Skalen* von immer wirksameren¹⁸⁸⁾ Kriterien zu erhalten. Für $M_v = v$ resultiert daraus der Reihe nach das *Cauchy'sche Fund.-Krit.* (II), das *Raabe'sche*¹⁸⁹⁾ und (abgesehen von einem un-

welcher bei dieser Gelegenheit mit Recht den Grundgedanken und die benützten Methoden für sich reklamiert.

$$187) \text{ Anders geschrieben: } \lim (P_v \cdot a_v)^{\frac{1}{s_v}} < 1.$$

188) Über den (hier nicht so unmittelbar wie bei den Kriterien erster Art ersichtlichen) Charakter der successive zu erzielenden *Verschärfung* s. meine Abhandl. a. a. O. p. 364.

189) Z. f. Phys. u. Math. von Baumgartner u. Ettingshausen 10 (1832), p. 63. Wieder entdeckt von Duhamel, J. de Math. 4 (1839), p. 214. Vgl. auch 6 (1841), p. 85. — Das fragliche Kriterium lässt sich auf die Form bringen:

$$\lim v \left(\frac{a_v}{a_{v+1}} - 1 \right) \begin{cases} < 1: \text{Divergenz,} \\ > 1: \text{Konvergenz.} \end{cases}$$

wesentlichen Unterschied in der Form) eine gleichfalls von *Bertrand*¹⁹⁰ aufgestellte Kriterienfolge.

Neben der *Hauptform* (32) des *disjunkt. Krit. zweiter Art* habe ich als besonders einfach und von gleicher Tragweite noch die folgende hervorgehoben:

$$(34) \quad \lim D_{v+1} \lg \frac{D_v a_v}{D_{v+1} a_{v+1}} \begin{cases} < 0: \text{Divergenz,} \\ > 0: \text{Konvergenz.} \end{cases}$$

Auch hier erweist es sich als zulässig, in dem *Konv.-Krit.* die D_v durch die Terme einer ganz beliebigen positiven Zahlenfolge (P_v) zu ersetzen, so dass ein Kriterium von gleicher Allgemeinheit wie das *Kummer'sche* resultiert.

28. Andere Kriterienformen. Die Lehre von den *Kriterien erster und zweiter Art* darf als vollkommen abgeschlossen gelten. Wenn nichtsdestoweniger von Zeit zu Zeit immer wieder „neue“ solche Kriterien auftauchen, so handelt es sich dabei entweder um die Wiederentdeckung längst bekannter Kriterien oder um Spezialbildungen von untergeordneter Bedeutung.

Andererseits ergibt sich die unbegrenzte Möglichkeit weiterer allgemeiner Kriterienbildungen, wenn man statt der a_v oder $\frac{a_v}{a_{v+1}}$ irgendwelche andere, passend gewählte Verbindungen $F(a_v, a_{v+1}, \dots)$ mit den entsprechenden der d_v bzw. c_v vergleicht. Auf diesem Prinzip beruhen die von mir aufgestellten Kriterien *dritter Art* (*Differenzenkrit.*)¹⁹¹, sowie die „*erweiterten Kriterien zweiter Art*“, bei denen statt der Quotienten zweier *consecutiver* diejenigen zweier *beliebig entfernt* Glieder oder auch diejenigen zweier *Gliedergruppen* in Betracht gezogen werden. Ich gelange auf dem letzteren Wege zu dem folgenden *erweiterten Hauptkriterium zweiter Art*:

$$(35) \quad \begin{cases} \lim_{x=\infty} \frac{(M_{x+h} - M_x) \cdot f(M_{x+h})}{(m_{x+h} - m_x) \cdot f(m_x)} > 1: \text{Divergenz der Reihe } \sum f(v), \\ \lim_{x=\infty} \frac{(M_{x+h} - M_x) \cdot f(M_x)}{(m_{x+h} - m_x) \cdot f(m_{x+h})} < 1: \text{Konvergenz „ „ „} \end{cases}$$

190) J. de Math. 7, p. 43. Vgl. auch: *Bonnet*, J. de Math. 8, p. 89 und *Paucker*, J. f. Math. 42, p. 143. — Die *Gauss'schen* Kriterien lassen sich mit Hilfe des *Raabe'schen* und des *ersten Bertrand'schen* Kriteriums ableiten, wie *B. a. a. O.* p. 52 gezeigt hat; übrigens auch mit Hilfe der *Kummer'schen* Kriterien (*Kummer* a. a. O. p. 178). — Das analoge gilt für den etwas allgemeineren Fall: $\frac{a_{v+1}}{a_v} = 1 + \frac{c_1}{v} + \frac{c_2}{v^2} + \dots$, nach *O. Schlömilch*, Z. f. Math. 10 (1865), p. 74.

191) A. a. O. p. 379.

wenn $M_x > m_x$ und M_x, m_x monoton zunehmende, $f(x)$ eine monoton abnehmende Funktion der positiven Veränderlichen x bedeuten. Aus demselben ergeben sich für $h=1$ die von *G. Kohn*¹⁹²⁾ abgeleiteten Kriterien, für $\lim h=0$ die durch formale Einfachheit und grosse Tragweite ausgezeichneten Kriterien von *Ermakoff*¹⁹³⁾:

$$(36) \quad \lim_{x=\infty} \frac{M'_x \cdot f(M_x)}{m'_x \cdot f(m_x)} \begin{cases} > 1: \text{Divergenz,} \\ < 1: \text{Konvergenz,} \end{cases}$$

Die letzteren habe ich neuerdings in der Weise verallgemeinert, dass $f(x)$ nicht mehr als *monoton* vorausgesetzt zu werden braucht¹⁹⁴⁾.

29. Tragweite der Kriterien erster und zweiter Art. Das Anwendungsgebiet irgend eines Kriteriums *zweiter Art* ist naturgemäss ein merklich *engeres*, als dasjenige des entsprechenden (d. h. mit demselben D_v, C_v gebildeten) Kriteriums *erster Art*¹⁹⁵⁾. *Cauchy* hat auf Grund des in Nr. 18 Gl. (9) erwähnten Grenzwertsatzes den Zusammenhang zwischen seinen Fundam.-Krit. erster und zweiter Art genauer festgestellt. Das betreffende Resultat lässt sich in folgender Weise verallgemeinern: Liefert das disjunktive Kriterium *zweiter Art* (32) für $D_v^{-1} = M_{v+1} - M_v$ eine *Entscheidung* oder *versagt* es durch Auftreten des Grenzwertes *Null*, so gilt das gleiche von dem Kriterium *erster Art* (29 a). Dagegen kann das letztere noch eine Entscheidung liefern, wenn das erstere durch das Auftreten von *Unbest.-Grenzen versagt*¹⁹⁶⁾.

Die Grenzen für die Tragweite der gewöhnlichen *Kriterienpaare erster Art* (20) ergeben sich aus der Bemerkung, dass dieselben nicht nur versagen, wenn geradezu:

$$(A) \quad \lim D_v \cdot a_v = 0, \quad \lim C_v \cdot a_v = \infty,$$

sondern auch dann, wenn jene Grenzwerte überhaupt *nicht existieren* und *gleichzeitig*:

$$(B) \quad \underline{\lim} D_v a_v = 0, \quad \overline{\lim} C_v \cdot a_v = \infty.$$

192) Archiv f. Math. 67 (1882), p. 82. 84.

193) *Darboux* Bulletin 2 (1871), p. 250; 18 (1883), p. 142. — Das für

$M_x = e^x, m_x = 1$ resultierende Kriterium: $\lim \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \geq 1$ besitzt z. B. dieselbe Tragweite, wie die *ganze Skala* der logarithmischen Kriterien.

194) *Chicago Papers* p. 328. Dasselbst auch ein kürzerer, auf der Theorie der bestimmten Integrale beruhender Beweis (Verbesserung des ursprünglich von *W. Ermakoff* gegebenen) und genauere Feststellung der Beziehung zwischen

$$\sum_m f(v) \text{ und } \int_m^\infty f(x) dx.$$

195) Vgl. a. a. O. p. 308.

196) *Pringsheim* a. a. O. p. 376.

Wählt man, wie bei den in der Praxis ausschliesslich angewendeten Kriterien geschieht, die D_v , C_v *monoton* zunehmend¹⁹⁷⁾, so erstreckt sich ihre Anwendbarkeit offenbar nur auf solche a_v , die entweder geradezu *monoton* oder doch „im wesentlichen“ *monoton* abnehmen, d. h. so, dass die etwaigen Schwankungen innerhalb gewisse Grenzen bleiben.

30. Die Grenzgebiete der Divergenz und Konvergenz. Das erste Beispiel einer *konvergenten* Reihe, für welche die gewöhnliche logarithmische (*Bonnet'sche*) Skala nach dem Modus von Gl. (A) *versagt*, hat *Du Bois-Reymond* konstruiert¹⁹⁸⁾. Ich habe sodann einen etwas allgemeineren Reihentypus von durchsichtigerem Bildungsgesetz angegeben, welcher zugleich auch *divergente* Reihen von der fraglicher Beschaffenheit liefert¹⁹⁹⁾. Die hierbei benützte Methode lässt sich wie *Hadamard* gezeigt hat²⁰⁰⁾, leicht auf jede *beliebige* Kriterienskala übertragen.

Es giebt aber auch unendlich viele *monotone* a_v , für welche eine beliebig gewählte Kriterienskala im Sinne der Gleichungen (B) vollkommen versagen muss. Die von mir in dieser Richtung angestellten Untersuchungen²⁰¹⁾ führen zu dem folgenden allgemeinen Satze: „Wie stark auch $\sum C_v^{-1}$ *konvergieren* möge, so giebt es stets monotone *divergente* Reihen $\sum a_v$, für welche: $\lim C_v a_v = 0$. Wie langsam auch m_v mit v ins Unendliche wachsen möge, so existieren stets monotone *konvergente* Reihen $\sum a_v$, für welche: $\lim v \cdot m_v \cdot a_v = \infty$; dagegen hat man stets: $\lim v \cdot a_v = 0$.“ Es giebt also überhaupt kein M_v von *beliebig hohem Unendlichen*, so dass $\lim M_v \cdot a_v > 0$ eine *notwendige* Bedingung für die *Divergenz* von $\sum a_v$ bildet. Andererseits bildet zwar die Beziehung $\lim v \cdot a_v = 0$ eine *notwendige*²⁰²⁾ Bedingung für die

197) Z. B.

 $D_v = v, \quad v \lg v, \quad \dots$ $C_v = v^{1+q}, \quad v \cdot (\lg v)^{1+q}, \quad \dots$

(Bonnet'sche Kriterien: s. Nr. 27).

198) J. f. Math. 76 (1873), p. 88.

199) A. a. O. p. 353 ff.

200) Acta Math. 18 (1894), p. 325.

201) A. a. O. p. 347. 356. Math. Ann. 37 (1890), p. 600. Münch. Ber. 26 (1896), p. 609 ff.

202) Dass dieselbe für die Konvergenz stets auch *hinreiche*, ist von Th. Olivier (J. f. Math. 2, 1827, p. 34) behauptet, von Abel (a. a. O. 3, p. 79. Oeuvres 1, p. 399) durch den Hinweis auf die Reihe $\sum \frac{1}{v \lg v}$ widerlegt worden. Kummer hat dagegen gezeigt, dass jene Bedingung für die Konvergenz allemal dann hin-

Konvergenz von $\sum a_v$, dagegen keine²⁰³⁾ Beziehung von der Form: $\lim v \cdot m_v \cdot a_v = 0$ bei beliebig schwachem Unendlich von $\lim m_v$. Mit anderen Worten: Es existiert, auch wenn man sich auf die Betrachtung monotoner²⁰⁴⁾ a_v beschränkt, überhaupt keine Schranke der Divergenz, d. h. keine Zahlenfolge (c_v) , so dass von irgend einem bestimmten v an beständig $a_v > c_v$ sein müsste, wenn $\sum a_v$ divergiert. Und es bildet zwar jede Zahlenfolge von der Form $\left(\frac{\varepsilon}{v}\right)$, wo $\varepsilon > 0$, eine Schranke der Konvergenz (d. h. es muss von irgend einem bestimmten v an beständig $a_v < \frac{\varepsilon}{v}$ sein, wenn $\sum a_v$ konvergieren soll), dagegen keine Zahlenfolge von der Form $\left(\frac{\varepsilon_v}{v}\right)$, wie langsam auch ε_v mit $\frac{1}{v}$ der Null zustreben möge.

Hiernach beruht die von Du Bois-Reymond eingeführte²⁰⁵⁾ Fiktion einer „Grenze zwischen Konvergenz und Divergenz“ von vornherin auf einer falschen Grundanschauung. Aber auch wenn man dieselbe in wesentlich engerem Sinne auffasst, nämlich als präsumtive Grenze zwischen irgend zwei bestimmten divergenten und konvergenten Skalen, wie: $\frac{1}{L_x(v)}$ und $\frac{1}{L_x(v) \cdot (\lg v)^q}$ ($x = 1, 2, 3, \dots; q < 0$), erscheint sie unhaltbar, wie ich des näheren nachzuweisen versucht habe²⁰⁶⁾.

31. Bedingte und unbedingte Konvergenz. Eine Reihe mit positiven und negativen Gliedern u_v heisst absolut konvergent, wenn $\sum |u_v|$ konvergiert; dass sie unter dieser Voraussetzung wirklich auch selbst allemal konvergiert, ist, wie schon in Nr. 23 bemerkt wurde, von Cauchy bewiesen worden. Dass es aber auch konvergente Reihen $\sum u_v$ gibt, für welche $\sum |u_v|$ divergiert, hatte bereits das Beispiel

reicht, wenn $\frac{a_v}{a_{v+1}}$ sich nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{v}$ entwickeln lässt (J. f. Math. 13, 1835, p. 178).

203) Man findet vielfach den falschen Satz (vgl. meine Conv.-Theorie a. a. O. p. 343), dass allgemein: $\lim D_v \cdot a_v = 0$ eine notwendige Bedingung für die Konvergenz bilde, während für $D_v > v$ in Wahrheit nur: $\lim D_v \cdot a_v = 0$ zu sein braucht. Diese einzig richtige Formulierung giebt schon Abel in der oben zitierten nachgelassenen Note: Oeuvres 2, p. 193.

204) Für nicht-monotone a_v erscheint die Existenz derartiger Konvergenz- und Divergenzschranken a priori ausgeschlossen; s. meine Conv.-Theorie a. a. O. p. 344. 357.

205) Münch. Abh. 12 (1876), p. XV. Math. Ann. 11 (1877), p. 158 ff.

206) Münch. Ber. 27 (1897), p. 203 ff.

der *Leibniz*'schen Reihe²⁰⁷⁾: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ gelehrt. Auch hat *Leibniz* allgemein die *Konvergenz* jeder Reihe von der Form $\sum (-1)^v \cdot a_v$ (wo $a_v \geq a_{v+1} > 0$, $\lim a_v = 0$) erwiesen²⁰⁸⁾. An derartige Reihen, speziell an $\sum (-1)^v \cdot \frac{1}{v+1}$, hat *Cauchy* die wichtige Bemerkung geknüpft²⁰⁹⁾, dass ihre *Konvergenz wesentlich von der Anordnung der Glieder* abhängt, derart, dass sie bei gewissen Umordnungen *divergent* werden. Hiermit hat er diejenige Eigenschaft aufgedeckt, welche man heute als *bedingte Konvergenz* zu bezeichnen pflegt. *Lej.-Dirichlet* hat hinzugefügt²¹⁰⁾, dass bei gewissen Umordnungen die *Konvergenz* zwar erhalten bleibt, die *Summe* dagegen eine Veränderung erleidet; und er hat insbesondere scharf hervorgehoben, dass eine *absolut konvergente* Reihe stets *unbedingt*, d. h. unabhängig von der Anordnung der Glieder gegen dieselbe Summe konvergiert²¹¹⁾. Durch *Cauchy* und *Dirichlet* war immerhin nur so viel erwiesen worden, dass gewisse nicht-absolut konvergierende Reihen nur *bedingt* konvergieren; dass dies in Wahrheit bei jeder nicht-absolut konvergierenden Reihe der Fall sein muss, lehrte erst ein von *Riemann* bewiesener Satz²¹²⁾, wonach sich zwei beliebige *divergente* Reihen von der Form $\sum a_v$, $\sum (-b_v)$ ($a_v > 0$, $b_v > 0$, $\lim a_v = \lim b_v = 0$) zu einer *konvergenten* Reihe mit *beliebig vorzuschreibender Summe* vereinigen lassen²¹³⁾. Damit erscheint die vollkommene Äquivalenz von

207) De vera proportionem circuli ad quadratum circumscriptum. Acta erud. Lips. 1682. (Opera, Ed. Dutens 3, p. 140.) Die Reihe findet sich schon bei *James Gregory*. Vgl. *Reiff* a. a. O. p. 45. *M. Cantor* 3, p. 72.

208) Brief an *Joh. Bernoulli*, 1. Jan. 1714. (Commerc. epist. 2, p. 329.)

209) Résumé. anal. p. 57.

210) Berl. Abh. 1837, p. 48. (Ges. W. 1, p. 318.)

211) Ausdrücklich bewiesen wurde dies wohl zum ersten Male von *W. Scheibner*: Über unendliche Reihen und deren Konvergenz. Gratulationsschrift, Lpzg. 1860, p. 11. — Der Ausdruck „*unbedingte*“ Konvergenz dürfte von *Weierstrass* stammen (J. f. Math. 51 [1856], p. 41). — Einzelne deutsche und fast alle französischen und englischen Autoren bezeichnen die *bedingt* konvergenten Reihen als *semikonvergent*. Dieser Ausdruck ist an sich wenig passend (denn der Zusatz „*semi*“ bezeichnet nicht sowohl einen besonderen *Modus*, als vielmehr die partielle *Negation* der Konvergenz) und erscheint auch schon aus dem Grunde wenig empfehlenswert, weil er (bezw. der damit synonyme *halbkonvergente* Reihe, série *demi-convergente*) nach dem Vorgange von *Legendre* (Exerc. de calc. integr. 1, p. 267) bereits eine völlig andere Bedeutung erlangt hat. Vgl. Nr. 38.

212) Gött. Abh. 13 (1867). (Ges. W. p. 221.)

213) *Dini* hat bemerkt, dass man in analoger Weise auch eigentliche oder uneigentliche *Divergenz* erzeugen kann; Ann. di Mat. (2) 2 (1868), p. 31.

absoluter und *unbedingter*, *nicht-absoluter* und *bedingter* Reihenkonvergenz endgültig festgestellt.

32. Wertveränderungen bedingt konvergenter Reihen. Für die *Veränderung*, welche die harmonische Reihe

$$\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \cdot \frac{1}{v+1} = \lg 2$$

erleidet, falls man auf je p positive Glieder je q negative folgen lässt, wurde von *Mart. Ohm* (mit Hülfe der Integralrechnung) der Wert $\frac{1}{2} \lg \frac{p}{q}$ gefunden²¹⁴). Eine unmittelbare Verallgemeinerung dieses Resultates bildet der von *Schlömilch* bewiesene²¹⁵) Satz, dass der Reihe $\sum (-1)^v \cdot a_{v+1}$ bei analoger Umstellung die Wertveränderung $(\lim v \cdot a_v) \cdot \frac{1}{2} \lg \frac{p}{q}$ zukommt. Ich habe in ganz allgemeiner Weise untersucht²¹⁶), welche Wertveränderungen eine aus den beiden divergenten Bestandteilen $\sum a_v$, $\sum (-b_v)$ zusammengesetzte konvergente Reihe erleidet, wenn die *relative Häufigkeit* der a_v und $(-b_v)$ (mit Festhaltung der ursprünglichen Reihenfolge innerhalb der beiden einzelnen Gruppen (a_v) und (b_v)) in beliebig vorgeschriebener Weise abgeändert wird, und umgekehrt, welche derartige Umordnung erforderlich ist, um eine beliebig vorgeschriebene Wertveränderung zu erzeugen. Die hierzu erforderliche und für den Fall $\lim \frac{a_{v+1}}{a_v} = 1$ vollständig durchführbare Untersuchung „*singulärer Reihenreste*“ von der Form: $\lim_{n=\infty} \sum_{v=n+1}^{n+\varphi(n)} a_v$ lehrt, dass die fraglichen Wertveränderungen nicht von dem speziellen Bildungsgesetze der a_v , sondern lediglich von deren Verhalten für $\lim v = \infty$ abhängen: Ist $\lim_{n+1}^{n+\varphi(n)} a_v = a$ (endlich), so wird auch $\lim_{n+1}^{n+\varphi(n)} a'_v = a$, falls $a'_v \asymp a_v$; dagegen $\lim_{n+1}^{n+\varphi(n)} a'_v = 0$ bzw. $= \infty$, falls $a'_v < a_v$ bzw. $> a_v$. Das zur Erzeugung eines gewissen Restwertes (incl. 0 und ∞) erforderliche $\varphi(n)$ (d. h. schliesslich das zu einer gewissen *Wertveränderung* führende *Umordnungsgesetz*)

214) De nonnullis seriebus summandis. Antr.-Programm, Berlin 1839. — Eine elementare Herleitung bei *H. Simon*, Die harm. Reihe. Dissert. Halle 1886.

215) Z. f. Math. 18 (1873), p. 520.

216) Math. Ann. 22 (1883), p. 455 ff.

hängt dann in genau angebbarer Weise von der infinitären Beschaffenheit der a_v ab. Ist $a_v > \frac{1}{v}$, so erleidet die Reihensumme die Änderung 0, a ∞ , je nachdem $\lim \varphi(n) \cdot a_n = 0, a, \infty$. Das analoge findet im Falle $a_v \asymp \frac{g}{v}$ statt, mit dem einzigen Unterschiede, dass die Änderung, falls $\lim \varphi(n) \cdot a_n = a$, hier den Wert: $\frac{1}{g} \lg(1 + ag)$ annimmt. Ist endlich $a_v < \frac{1}{v}$, so liefern die beiden Annahmen $\lim \varphi(n) \cdot a_n = 0$ und $= a$ keine Wertveränderung; im Falle: $\lim \varphi(n) \cdot a_n = \infty$ resultiert dann eine bestimmte endliche oder unendlich grosse Änderung, je nach der besonderen Art des Unendlichwerdens von $\lim \varphi(n) \cdot a_n$.²¹⁷⁾

Einen etwas allgemeineren Typus von Umordnungen, welche die Summe einer bedingt konvergierenden Reihe *unverändert* lassen, hat E. Borel betrachtet²¹⁸⁾.

33. Kriterien für eventuell nur bedingte Konvergenz. Für die Feststellung der *einfachen*, d. h. eventuell nur *bedingten* Konvergenz einer Reihe mit positiven und negativen Gliedern besitzt man keine allgemeinen Kriterien. Das *Mass der Gliederabnahme* ist hier für die Beurteilung der Konvergenz ganz ohne Belang, wie das *Leibniz'sche* Kriterium für alternierende Reihen (Nr. 31) erkennen lässt: $\sum (-1)^v \cdot a_v$ konvergiert, auch wenn die a_v *beliebig langsam* monoton der Null zustreben. Ein in vielen Fällen brauchbares Hilfsmittel giebt die von *Abel*²¹⁹⁾ herrührende Transformation („partielle Summation“):

$$(37) \quad \sum_v^n u_v v_v = \sum_v^{n-1} (u_v - u_{v+1}) \cdot V_v + u_n V_n$$

(wo: $V_v = v_0 + v_1 + \dots + v_v$),

welche für $\lim n = \infty$ den folgenden Konvergenzsatz liefert: „Ist $\sum (u_v - u_{v+1})$ absolut und $\sum v_v$ überhaupt konvergent, so konvergiert $\sum u_v v_v$ zum mindesten in der vorgeschriebenen Anordnung. Dies gilt auch, wenn $\sum v_v$ innerhalb endlicher Grenzen oscilliert, sofern noch $\lim u_v = 0$ ist.“ Die Anwendung der *Abel'schen* Transformation für derartige Konvergenzbetrachtungen rührt von *Dirichlet* her²²⁰⁾, der obige Satz in etwas speziellerer Fassung von *Dedekind*²²¹⁾; die hier

217) Näheres a. a. O. p. 496 ff.

218) Bull. d. Sc. (2) 14 (1890), p. 97.

219) J. f. Math. 1 (1826), p. 314. Oeuvres 1, p. 222.

220) Vorl. über Zahlentheorie, herausgeg. von R. Dedekind, 3. Aufl. (1879), § 101.

221) Ebenda, Supplem. 9, § 143.

gegebene findet sich nebst einigen einfachen Modifikationen bei *Du Bois-Reymond*²²²⁾.

Aus diesem Satze folgt z. B. unmittelbar die zuerst von *Malmsten*²²³⁾ anderweitig bewiesene Konvergenz von $\sum a_v \cdot \cos vx$ (excl. $x = \pm 2k\pi$) und $\sum a_v \cdot \sin vx$, wenn die a_v *monoton* der Null zustreben²²⁴⁾, sowie diejenige einiger anderer trigonometrischer Reihen²²⁵⁾. Auch lässt sich unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen der Konvergenzbeweis für die *Fourier'sche* Reihe auf ihn zurückführen²²⁶⁾.

Die *Abel'sche* Transformation in Verbindung mit der in Nr. 26 hervorgehobenen Konvergenz der Reihe $\sum \frac{M_{v+1} - M_v}{M_{v+1} \cdot M_v^q}$ ist von mir benützt worden²²⁷⁾, um ein sehr allgemeines Kriterium für die Be-

urteilung der sog. *Dirichlet'schen* Reihen: $\sum k_v \cdot M_v^{-q}$ (k_v beliebig, $q > 0$) zu gewinnen. Spezielle Fälle desselben sind bereits früher von *Dedekind*²²⁸⁾ und *O. Hölder*²²⁹⁾ auf anderen Wegen gefunden worden.

Eine nützliche Verallgemeinerung des gewöhnlichen Konvergenzsatzes über alternierende Reihen ergibt sich aus den *Weierstrass'schen* Konvergenzuntersuchungen²³⁰⁾. Darnach konvergiert $\sum (-1)^v \cdot a_v$

noch *bedingt*, wenn $\frac{a_v}{a_{v+1}} = 1 + \frac{x}{v} + \frac{\lambda}{v^2} + \dots$ und $0 < x \leq 1$.²³¹⁾

Die wichtigste Kategorie von Reihen, welche generell nur *bedingt* zu konvergieren brauchen, bilden die *Fourier'schen Reihen*²³²⁾. Die allgemeinen Untersuchungen über ihre Konvergenz und Divergenz be-

222) Antr.-Programm, p. 10.

223) Mit der unnötigen Einschränkung $\lim \frac{a_{v+1}}{a_v} = 1$. Nova acta Upsal. 12 (1844), p. 255. Ohne jene Einschr. und einfacher: *Hj. Holmgren*, J. de Math. 16 (1851), p. 186.

224) *G. Björling* (J. de Math. 17 (1852), p. 470) hält fälschlicher Weise die Bedingungen: $a_v > 0$, $\lim a_v = 0$ schon für ausreichend.

225) *Du Bois-Reymond* a. a. O. p. 12. 17.

226) Desgl. p. 13.

227) Math. Ann. 37 (1886), p. 41.

228) Vorl. über Zahlentheorie, Suppl. 9, § 144.

229) Math. Ann. 20 (1882), p. 545.

230) J. f. Math. 51 (1856), p. 29; Werke 1, p. 185.

231) Dies gilt auch für *komplexe* a_v , falls der reelle Teil von x der im Text angegebenen Bedingung genügt. — Für $x > 1$ konvergiert $\sum a_v$ *absolut* (am einfachsten nach dem *Raabe'schen* Kriterium), für $x \leq 0$ *divergiert* sie. — Vgl. auch *Stolz*, Allg. Arithm. 1, p. 268.

232) Vgl. IIA 8.

ruhen auf der Darstellung von s_n durch ein bestimmtes Integral und dessen Discussion für $\lim n = \infty$.

34. Addition und Multiplikation unendlicher Reihen. Für die *Addition* bzw. *Subtraktion* zweier konvergenter Reihen ergibt sich unmittelbar aus der Beziehung: $\lim a_v \pm \lim b_v = \lim (a_v \pm b_v)$ (Nr. 17 Gl. (15)) die Regel:

$$(38) \quad \sum_0^\infty u_v \pm \sum_0^\infty v_v = \sum_0^\infty (u_v \pm v_v).$$

Für die *Multiplikation* hat *Cauchy* den Satz aufgestellt:

$$(39) \quad \left(\sum_0^\infty u_v \right) \cdot \left(\sum_0^\infty v_v \right) = \sum_0^\infty w_v \quad (w_v = u_0 v_v + u_1 v_{v-1} + \dots + u_v u_0),$$

unter der Voraussetzung, dass $\sum u_v$, $\sum v_v$ *absolut konvergieren*²³³), und mit dem ausdrücklichen Hinweise, dass die Formel für *nicht-absolut* konvergierende Reihen *versagen* kann²³⁴). *Abel* hat gezeigt, dass dieselbe *gültig* ist, sobald (ausser den selbstverständlich als *konvergent* vorausgesetzten Reihen $\sum u_v$, $\sum v_v$) die Reihe $\sum w_v$ überhaupt *konvergiert*²³⁵). Da dieser Konvergenzbeweis (abgesehen von dem durch *Cauchy* erledigten Falle der *absoluten* Konvergenz von $\sum u_v$, $\sum v_v$) jedesmal besonders erbracht werden muss, so erscheint es keineswegs überflüssig, dass *F. Mertens* die Gültigkeit des Multiplikationstheorems (39) auf den Fall ausgedehnt hat, dass nur *eine* der beiden Reihen $\sum u_v$, $\sum v_v$ *absolut konvergiert*²³⁶). Der Fall, dass *beide* Reihen nur *bedingt* konvergieren, ist von mir des näheren betrachtet worden²³⁷). Besitzt die eine der beiden Reihen, etwa $\sum u_v$, die Eigenschaft, dass $\sum |u_v + u_{v+1}|$ konvergiert, so erscheint die Bedingung $\lim w_v = 0$ als *notwendig und hinreichend* für die Gültigkeit der Formel (39); daraus ergeben sich insbesondere einfache Kriterien für den Fall

233) Anal. algébr. p. 147.

234) Ebenda p. 149 — wohl die erste Stelle, an welcher das *verschiedene* Verhalten *absolut* und *nicht-absolut* konvergierender Reihen hervorgehoben wird.

235) J. f. Math. 1 (1826), p. 318. (Oeuvres 1, p. 226.) *Abel's* Beweis beruht auf der Betrachtung der Reihen $\sum u_v x^v$, $\sum v_v x^v$ für $\lim x = 1$, also auf einem *stetigen* Grenzübergange. Einen Beweis *ohne* Benützung dieses der Funktionenlehre angehörigen Hilfsmittels hat *E. Cesaro* gegeben: Bull. d. Sc. (2) 14 (1890), p. 114. — Ähnlich *Jordan*, Cours d'Anal. 1, p. 282.

236) J. f. Math. 79 (1875), p. 182. Anderer Beweis von *W. V. Jensen*, Nouv. Corresp. math. 1879, p. 430.

237) Math. Ann. 21 (1883), p. 327.

zweier *alternierender* Reihen mit *monotonen* Gliedern²³⁸). Unter der allgemeineren Annahme, dass $\sum u_v$ *absolut* konvergent wird, wenn man die u_v in Gruppen von p_v Gliedern (p_v constant oder veränderlich, aber endlich bleibend) zusammenfasst, habe ich eine *hinreichende* Bedingung angegeben, welche den *Cauchy'schen* und *Mertens'schen* Satz als speziellen Fall umfasst. Für den Fall $p_v = 2$ hat sodann A. Voss²³⁹), für beliebige *constante*²⁴⁰) und *endlich-veränderliche*²⁴¹) p_v F. Cajori die *notwendigen und hinreichenden* Bedingungen aufgestellt.

35. Doppelreihen. Die Additionsformel (38) ist zwar ohne weiteres auf eine beliebige *endliche* Anzahl von Reihen:

$$\sum_0^\infty u_v^{(\mu)} \quad (\mu = 0, 1, \dots m),$$

aber nicht auf den Fall $m = \infty$ übertragbar, d. h. für die Gültigkeit der Beziehung:

$$(40) \quad \sum_0^\infty \left(\sum_0^\infty u_v^{(\mu)} \right) = \sum_0^\infty \left(\sum_0^\infty u_v^{(\mu)} \right)$$

erscheint es keineswegs als *hinreichend*, dass die *linke* Seite einen bestimmten Sinn hat, also schlechthin *konvergiert*. *Cauchy* hat gezeigt,

dass Gl. (40) gilt, wenn auch $\sum_0^\infty \left(\sum_0^\infty |u_v^{(\mu)}| \right)$ konvergiert²⁴²); das

Multiplikationstheorem (39) für zwei *absolut* konvergente Reihen erweist sich als spezieller Fall dieses Satzes²⁴³). Zugleich hat *Cauchy* an die Betrachtung eines *zweifach-unendlichen* Schemas von Termen $u_v^{(\mu)}$ (wobei etwa der Index μ die *Zeilen*, der Index v die *Kolonnen* charakterisieren mag) den Begriff der *Doppelreihe* geknüpft. Setzt man

$\sum_0^m \sum_0^n u_v^{(\mu)} = s_n^{(m)}$, so heisst die aus den Gliedern $u_v^{(\mu)}$ gebildete *Doppelreihe* $\sum_0^\infty \sum_0^\infty u_v^{(\mu)}$ *konvergent* und s ihre *Summe*, wenn in dem

238) Eine Anwendung auf die Multiplikation zweier *trigonometrischen* Reihen s. Math. Ann. 26 (1886), p. 157.

239) Math. Ann. 24 (1884), p. 42.

240) Am. J. of Math. 15 (1893), p. 339.

241) N. Y. Bull. (2), 1 (1895), p. 180. — Cajori giebt eine kurze Analyse der von mir und Voss gefundenen Resultate: N. Y. Bull. 1 (1892), p. 184.

242) Anal. algébr. p. 541. — Eine allgemeinere, für *Potenzreihen* geltende Form einer hinreichenden Bedingung, die von *Weierstrass* herrührt (Werke 2, p. 205), ist wesentlich *funktionentheoretischer* Natur. Vgl. II B 1.

243) *Cauchy* a. a. O. p. 542.

Nr. 20 dieses Artikels angegebenen Sinne: $\lim_{m, n = \infty} s_n^{(m)} = s$ ist²⁴⁴); (in jedem anderen Falle heisst sie *divergent* und zwar *eigentlich divergent*, wenn: $\lim_{m, n = \infty} s_n^{(m)} = +\infty$ bzw. $-\infty$). Auf Grundlage dieser Definition ist die Lehre von den Doppelreihen späterhin von *Stolz*²⁴⁵) und neuerdings von mir²⁴⁶) ausführlicher behandelt worden. *Stolz* hebt vor allem mit Recht hervor, dass jene Konvergenzdefinition in keiner Weise die *Konvergenz* irgend einer einzelnen *Zeile* oder *Kolonne* involviere; es braucht nicht einmal für irgend einen einzigen bestimmten Wert μ (bzw. ν): $\lim_{\nu = \infty} u_\nu^{(\mu)} = 0$ (bzw. $\lim_{\mu = \infty} u_\nu^{(\mu)} = 0$) zu sein, während allerdings bei einer konvergenten Doppelreihe stets: $\lim_{\mu, \nu = \infty} u_\nu^{(\mu)} = 0$ sein muss. Ebensovienig kann aus der Konvergenz der einzelnen Zeilen (Kolonnen) und der von ihren Summen gebildeten Reihe, ja nicht einmal aus der Existenz der Gleichung (40)²⁴⁷) die *Konvergenz der Doppelreihe* gefolgert werden. Dagegen gilt der Satz: „Konvergiert ausser der Doppelreihe auch jede einzelne Zeile (Kolonne), so hat man:

$$\sum_0^{\infty} \sum_{\mu, \nu} u_\nu^{(\mu)} = \sum_0^{\infty} \sum_{\mu} \sum_{\nu} u_\nu^{(\mu)} \quad (\text{bzw.} = \sum_0^{\infty} \sum_{\nu} \sum_{\mu} u_\nu^{(\mu)}). "$$

Man kann die Terme einer Doppelreihe auch als einfach-unendliche Reihe $\sum_0^{\infty} w_\nu$ ordnen, am bequemsten nach „*Diagonalen*“, d. h. wenn man setzt: $w_\nu = u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \dots + u_\nu^{(0)}$. Ist dann $\sum_0^{\infty} \sum_{\mu, \nu} u_\nu^{(\mu)} = s$

244) Dies *scheint* wenigstens der Sinn der ihrem Wortlaute nach nicht ganz klaren *Cauchy'schen* Definition (a. a. O. p. 538). Freilich ist alsdann die von *Cauchy* daraus gezogene Folgerung, dass jede *Zeile* und jede *Kolonne* eine *konvergente* Reihe bilde, *unrichtig*. *Cauchy* dürfte dies später selbst bemerkt haben, da er in den *Résum. anal.* p. 56 eine *andere* Definition zu Grunde legt; dieselbe erscheint mir jedoch teils zu eng (da sie in Wahrheit nur den Fall der *unbedingten* Konvergenz umfasst), teils zu kompliziert und wenig prägnant (wegen der grossen Unbestimmtheit des a. a. O. mit s_n bezeichneten Ausdrucks).

245) *Math. Ann.* 24 (1884), p. 157 ff.

246) *Münch. Ber.* 27 (1897), p. 101 ff.

247) Auch wenn $\sum_0^{\infty} \sum_{\mu} u_\nu^{(\mu)}$, $\sum_0^{\infty} \sum_{\nu} u_\nu^{(\mu)}$ beide konvergieren, brauchen sie nicht einander gleich zu sein. (Vgl. *F. Arndt*, *Arch. f. Math.* 11 [1848], p. 319. *Pringsheim* a. a. O. p. 119.) In diesem Falle ist die betreffende *Doppelreihe* allemal *divergent*.

und $u_v^{(\mu)} \geq 0$, so hat man allemal auch $\sum_0^\infty w_v = s$. Sind die $u_v^{(\mu)}$ beliebig, aber so beschaffen, dass die einzelnen Zeilen und Kolonnen konvergieren oder innerhalb *endlicher* Grenzen oscillieren, so kann $\sum w_v$ nur *oscillieren* oder *konvergieren*, und im letzteren Falle ist wiederum $\sum_0^\infty w_v = s$.²⁴⁸⁾

Konvergiert die Doppelreihe $\sum_{\mu, v} |u_v^{(\mu)}|$, so konvergiert auch stets $\sum_{\mu, v} u_v^{(\mu)}$ und heisst dann wiederum *absolut* konvergent. Zugleich konvergiert jede Zeile (Kolonne), und es konvergiert die Reihe der Zeilen- (Kolonnen-) Summen, desgleichen diejenigen der Diagonalen. Dieses Resultat lässt sich noch folgendermassen verallgemeinern: „Von den vier Gleichungen

$$(41) \quad \sum_0^\infty \sum_{\mu, v} u_v^{(\mu)} = s, \quad \sum_0^\infty \sum_{\mu} \sum_0^\infty u_v^{(\mu)} = s, \quad \sum_0^\infty \sum_0^\infty u_v^{(\mu)} = s, \quad \sum_0^\infty w_v = s$$

zieht *jede* die drei anderen nach sich, wenn die betreffende Reihe bei Vertauschung der $u_v^{(\mu)}$ mit $|u_v^{(\mu)}|$ konvergent bleibt“²⁴⁹⁾.

Jede *absolut* konvergente Doppelreihe ist auch *unbedingt* konvergent — *vice versa*²⁵⁰⁾.

Für die Feststellung der *absoluten* Konvergenz lassen sich analog wie bei den einfachen Reihen mit Hülfe des Prinzipes der Reihenvergleichung allgemeine Kriterien aufstellen. Als wesentlich ist hierbei hervorzuheben, dass für die *Divergenz* der Doppelreihe $\sum_{\mu, v} a_v^{(\mu)}$ (wo: $a_v^{(\mu)} \geq 0$) schon die *Divergenz einer einzigen Zeile* (Kolonne) *ausreicht*, aber *keineswegs notwendig* ist, während umgekehrt für die *Konvergenz* der Doppelreihe die *Konvergenz aller möglichen Zeilen* (Kolonnen) *notwendig* ist, aber *nicht ausreicht*. Infolgedessen erscheint es zweckmässig, die *Konvergenz-* und *Divergenzkriterien wesentlich von*

248) Münch. Ber. a. a. O. p. 124. — Sind unter den Zeilen oder Kolonnen der *konvergenten* Doppelreihe solche, deren Summen *nicht endlich* bleiben, so kann $\sum w_v$ gegen einen von s *verschiedenen* Wert konvergieren oder *eigentlich* divergieren. (A. a. O. p. 130.)

249) A. a. O. p. 133. — In diesem Satze ist der zu Anfang erwähnte *Cauchy'sche* als Teil enthalten.

250) A. a. O. p. 138. — Beispiele *bedingt* konvergierender Doppelreihen s. Stolz a. a. O. p. 161. — Die von *Eisenstein* (J. f. Math. 35 (1847), p. 172 ff.) behandelten „*Doppelreihen*“ fallen überhaupt nicht unter den hier gegebenen *Konvergenz-Begriff*, sie können nur in einem *erweiterten* Sinne *bedingt konvergent* genannt werden. Vgl. meine Bem. a. a. O. p. 140.

einander verschieden zu formulieren und auch die erforderlichen *Vergleichsreihen* entsprechend verschieden auszuwählen. Von diesem Gesichtspunkte ausgehend habe ich die folgenden allgemeinen Kriterien aufgestellt ²⁵¹):

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Konvergenz, wenn:} \\ \lim_{\mu=\infty} C_\mu \cdot a_v^{(\mu)} < \infty, \quad \lim_{v=\infty} C_v \cdot a_v^{(\mu)} < \infty, \quad \lim_{\mu, v=\infty} C_\mu \cdot C_v \cdot a_v^{(\mu)} < \infty, \\ \text{Divergenz, wenn:} \quad \lim_{\mu, v=\infty} (\mu + v) \cdot D_{\mu+v} a_v^{(\mu)} > 0. \end{array} \right. \quad \text{252)}$$

36. Vielfache Reihen. Die oben für Doppelreihen aufgestellte Konvergenzdefinition lässt sich ohne weiteres auf *beliebig-vielfache* Reihen übertragen ²⁵³). Dass eine solche allemal *überhaupt* und zwar *unbedingt* konvergiert, wenn die entsprechende Reihe der absoluten Beträge konvergiert, ist wiederum schon von *Cauchy* hervorgehoben worden ²⁵⁴). Für einen speziellen Typus von p -fachen Reihen, nämlich: $\sum (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_p^2)^{-\sigma}$ (v_1, v_2, \dots ganze Zahlen) hat *Eisenstein* die *Konvergenz* erwiesen, falls $\sigma > \frac{p}{2}$, und daraus die Konvergenz einer wesentlich allgemeineren Gattung erschlossen ²⁵⁵). Behufs Untersuchung der p -fachen Thetareihen ²⁵⁶) hat *Riemann* durch einfache Umformung des in Nr. 23 erwähnten *Cauchy'schen* Satzes über den Zusammenhang von $\sum_m^\infty f(v)$ und $\int_m^\infty f(x) dx$ ein zur Beurteilung einfacher, wie beliebig-vielfacher Reihen brauchbares Konvergenzkriterium gewonnen ²⁵⁷). *A. Hurwitz* hat dasselbe neuerdings mit einem durchsichtigeren Beweise versehen, durch ein entsprechendes Divergenzkriterium ergänzt und auf p -fache Reihen von sehr allgemeinem Charakter angewendet, welche die *Eisenstein'schen* Reihen und p -fachen Thetareihen als spezielle Fälle enthalten ²⁵⁸).

251) A. a. O. p. 146. 150.

252) Diese Kriterien lassen sich wiederum durch passende Wahl der C_v, D_v (vgl. Nr. 26) beliebig verschärfen. — Einige Kriterien von geringerer Tragweite, darunter auch ein solches 2^{ter} Art, welches dem *Cauchy'schen* Fundamental-kriterium entspricht, hat *O. Biermann* angegeben: Monatsh. f. Math. u. Phys. 8 (1896), p. 121 ff.

253) Eine *engere* Definition wiederum bei *Cauchy*, Résumé. anal. p. 56. — Vgl. Nr. 35, Fussn. 9.

254) Par. C. R. 19 (1844), p. 1434.

255) J. f. Math. 35 (1847), p. 157 ff.

256) Vgl. II B 7.

257) Ges. W. (1876), p. 452.

258) Math. Ann. 44 (1894), p. 83.

37. Transformation von Reihen. Wie wenig sich auch die Analysten des vorigen Jahrhunderts um die Frage nach der Konvergenz der Reihen kümmerten, so haben sie sich doch vielfach mit der *Transformation* konvergierender Reihen in *schneller* konvergierende beschäftigt²⁵⁹). Als *arithmetisch-elementare* hierher gehörige Methoden sind diejenigen von *J. Stirling*²⁶⁰) und *Euler*²⁶¹) zu nennen. Beide beruhen im Grunde auf dem gleichen Prinzip, nämlich auf der Umwandlung der einzelnen Reihenglieder in unendliche Reihen und der Summation des aus jenen Reihen als *Zeilen* zu bildenden zweifach-unendlichen Schemas nach *Kolonnen*. *Euler* gelangt so zu der Transformationsformel:

$$(43) \quad \sum_0^{\infty} a_v x^v = a_0 + a_1 \frac{x}{1-x} + \Delta a_1 \left(\frac{x}{1-x} \right)^2 + \dots \\ + \Delta^v a_1 \left(\frac{x}{1-x} \right)^{v+1} + \dots$$

(wo: $\Delta a_1 = a_2 - a_1$, $\Delta^2 a_1 = \Delta a_2 - \Delta a_1$, u. s. f.), welche für $x = -1$ die zur Berechnung gewisser numerischer Reihen nützliche Form annimmt:

$$(44) \quad \sum_0^{\infty} (-1)^v \cdot a_v = a_0 - \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2^2} \Delta a_1 - \dots \\ + (-1)^{v+1} \cdot \frac{1}{2^{v+1}} \Delta^v a_1 + \dots$$

Die bei *Euler* selbstverständlich fehlende *Konvergenz*-Untersuchung ist später von *J. V. Poncelet* durch Aufstellung des die Entwicklungen (43), (44) vervollständigenden *Restgliedes* nachgeholt worden²⁶²).

Die Anwendbarkeit der *Euler'schen* Transformation ist eine verhältnismässig beschränkte. Grössere Allgemeinheit besitzt eine von *Kummer* herrührende Methode²⁶³), welche zugleich gestattet, durch

259) Über die sog. Transformation von *divergenten* Reihen in *konvergente* vgl. Nr. 40 Fussn. 6.

260) Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum. Lond. 1730, p. 6. — Näheres über *Stirling's* Methode s. *Klügel* 5, Art. „Umformung der Reihen“, p. 350 ff. — Ein Beispiel derselben giebt auch *Bertrand*, Calc. diff. p. 260.

261) Instit. calc. different. 1755, p. 281.

262) J. f. Math. 13 (1835), p. 1 ff. — Die bemerkenswertesten, übrigens auch schon von *Euler* (a. a. O. p. 294) angeführten, von *Poncelet* genauer diskutierten (a. a. O. p. 17–20) Beispiele für die Anwendung der Formel (44) sind:

$$\lg 2 = \sum_1^{\infty} (-1)^{v-1} \cdot \frac{1}{v} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{v \cdot 2^v}, \\ \frac{\pi}{4} = \sum_0^{\infty} (-1)^v \cdot \frac{1}{2^{v+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot v}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2v+1)}.$$

263) J. f. Math. 16 (1837), p. 206 ff.

iterierte Anwendung die *Konvergenz* der betreffenden Reihe immer weiter zu *verstärken*. Dieselbe bezieht sich zunächst auf Reihen mit lauter *positiven* Gliedern und knüpft unmittelbar an den beim *Kummer*-schen Konvergenzkriterium (Nr. 24, (18)) auftretenden Ausdruck an:

$$(45) \quad P_v \cdot \frac{a_v}{a_{v+1}} - P_{v+1} = \lambda_v,$$

aus welchem ja für: $\lim \lambda_v = \lambda > 0$ die *Konvergenz* von $\sum a_v$ resultierte. Aus (45) folgt nämlich:

$$(46) \quad \sum_1^\infty a_v = \frac{1}{\lambda} (P_0 a_0 - \lim_{n=\infty} P_n a_n) + \sum_1^\infty \left(1 - \frac{\lambda_{v-1}}{\lambda}\right) \cdot a_v,$$

wobei die rechts auftretende Reihe wegen $\lim (\lambda - \lambda_{v-1}) = 0$ wesentlich *stärker* konvergiert, als $\sum a_v$.²⁶⁴⁾ *Leclert* hat in einer von *E. Catalan* publizierten²⁶⁵⁾ Mitteilung gezeigt, dass die Formel (46) ebenfalls auf Reihen mit *positiven* und *negativen* Gliedern, insbesondere auch nur *bedingt* konvergierende anwendbar ist²⁶⁶⁾ und hat noch eine zweite, der obigen verwandte Transformationsformel angegeben.

In neuester Zeit hat sich *A. Markoff* mehrfach mit Reihentransformation beschäftigt²⁶⁷⁾ und ist zu einer allgemeinen Transformationsformel gelangt²⁶⁸⁾, welche, wiederum auf der Umformung der gegebenen Reihe in eine *zweifach-unendliche* beruhend, eine erhebliche Verallgemeinerung der von *Stirling* und *Euler* entwickelten Methoden darstellt und diese letzteren als spezielle Fälle umfasst.

38. Euler-Mac Laurin'sche Summenformel. Halbkonvergente Reihen. Von durchgreifenderer Bedeutung als die genannten *rein elementaren* Transformationen ist die als *Euler-Mac Laurin'sche Summenformel* bekannte Beziehung:

264) Bei *Kummer* werden die P_v noch der Beschränkung unterworfen, dass $\lim P_n a_n = 0$; dieselbe ist indessen unnötig, vgl. Nr. 24, Fussn. 1.

265) Mém. Belg. cour. et sav. étr. 33 (1865). — Vgl. auch: *G. Darboux*, Bullet. d. Sc. (2), 1 (1877), p. 356.

266) Durch dreimalige Anwendung der Formel (46) auf die überaus langsam konvergierende *Leibniz'sche* Reihe $\frac{\pi}{4} = \sum_1^\infty (-1)^{v-1} \frac{1}{2v-1}$ ergibt sich z. B.:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{3} + 24 \sum_1^\infty \frac{(-1)^{v-1}}{(4v^2-1)^2(4v^2-9)};$$

eine Reihe, welche so *stark* konvergiert, dass die Summation von *nur vier* Gliedern schon π auf 4 Dezimalstellen richtig liefert.

267) S. z. B. Par. C. R. 109 (1889), p. 934.

268) Pétersb. Mém. (7), 37 (1890). Auch: Differenzenrechnung, deutsch von *Th. Friesendorff* und *E. Prümm*, Leipzig 1896, p. 178.

$$(47) \quad h \cdot \sum_{0}^{p-1} f(a + \nu h) = \int_a^{a+ph} f(x) dx - \frac{h}{2} \{f(a + ph) - f(a)\} \\ + \sum_{1}^n (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{B_{2\nu-1} \cdot h^{2\nu}}{(2\nu)!} \{f^{2\nu-1}(a + ph) - f^{2\nu-1}(a)\} + R_{2n+1}$$

(wo R_{2n+1} ein *Restglied* bedeutet, dem man verschiedene Formen geben kann). Dieselbe gehört indessen nach Form und Herleitung der *Integralrechnung* an²⁶⁹⁾ und findet hier nur Erwähnung, weil sich daran die Entstehung des allgemeinen Begriffs der sogenannten *Halbkonvergenz* von Reihen knüpft. Wenn in der für jedes n geltenden Gl. (47): $\lim_{n=\infty} R_{2n+1} = 0$ wird, so geht die rechte Seite für $\lim n = \infty$

in eine *konvergente* Reihenentwicklung über, deren Summe genau mit dem Werte der linken Seite übereinstimmt. Dies ist aber in der Regel *nicht* der Fall. Dagegen besitzt R_{2n+1} die Eigenschaft, mit wachsenden Werten von n *zunächst* abzunehmen und für einen gewissen Wert $n = N$ einen *verhältnismässig sehr kleinen* Minimalwert zu erlangen, so dass also die Reihe \sum_{1}^n bei wachsendem $n \leq N$ den

Wert der linken Seite mit *wachsender*, für $n = N$ mit *relativ grosser*, bei weiterer Vergrösserung von n nur zu *verringender* Annäherung darstellt. Solche Reihen heissen dann nach dem Vorgange von *Legendre*²⁷⁰⁾ *halbkonvergent*. *Halbkonvergente* Reihenentwicklungen sind also *divergente* Reihen von der Beschaffenheit, dass die Summe einer *passenden endlichen* Anzahl von Gliedern einen gegebenen arithmetischen Ausdruck mit *verhältnismässig grosser* (aber immerhin durch den Charakter der Reihe *definitiv begrenzter, nicht*, wie bei einer *konvergenten* Reihe mit *beliebig grosser*) Annäherung darstellt²⁷¹⁾. Die für die Analysis wichtigsten halbkonvergenten Reihen entspringen der Formel (47), z. B. die als *Stirling'sche* Formel²⁷²⁾ bekannte Darstel-

269) Näheres darüber s. II A 2 u. 3; auch I E.

270) Vgl. Nr. 31, Fussn. 5. Die Erscheinung der Halbkonvergenz wurde zuerst von *Euler* bemerkt; s. *Reiff* p. 100.

271) Für wirkliche numerische Berechnung erweist sich diese nur „*verhältnismässig*“ grosse Annäherung häufig wertvoller, als die *theoretisch* zwar „*beliebig*“ gross zu machende, in der *Praxis* aber im Verhältnis zu der aufzuwendenden Rechnung oft *geringe* Annäherung, welche durch Summation eines *konvergenten* s_n erzielt wird.

272) Dieselbe wurde schon vor Auffindung der allgemeinen Formel (47), aus welcher sie für $f(x) = \lg x$ hervorgeht, im wesentlichen von *Stirling* angegeben: a. a. O. p. 135. Übrigens bezeichnet man häufig als *Stirling'sche* Formel

lung von $\sum_{v=0}^{p-1} \lg(x + v h)$. Einen andern Typus, der sich unmittelbar durch fortgesetzte partielle Integration ergibt, hat *Laplace* gelegentlich der angenäherten Darstellung des für die Wahrscheinlichkeitsrechnung fundamentalen Integrals $\int_0^x e^{-x^2} \cdot dx$ hervorgehoben²⁷³⁾

und auch darauf hingewiesen, dass die gewöhnliche *Taylor'sche* Formel möglicherweise zu *halbkonvergenten* Entwicklungen führen kann²⁷⁴⁾. *Cauchy* hat in ganz *elementarer* Weise gezeigt²⁷⁵⁾, dass gewisse *divergente* Potenzreihen allemal zu den *halbkonvergenten* gehören, und einige auf Grund dieser Bemerkung ohne weiteres als *halbkonvergent* charakterisierte Entwicklungen abgeleitet, welche sonst durch die Formel (47) oder andere transscendente Hilfsmittel gewonnen zu werden pflegen²⁷⁶⁾.

Gewisse halbkonvergente Reihen (z. B. die oben erwähnte *Stirling'sche*) haben die Eigenschaft, dass die *Annäherung* zwischen der *darzustellenden Funktion* $F(x)$ und der *Summe* $S_n(x)$ einer endlichen Gliederzahl mit *wachsendem* x in dem Grade *zunimmt*, dass

$$\lim_{x=\infty} x^n \cdot (F(x) - S_n(x)) = 0.$$

Man sagt alsdann, $S_n(x)$ liefere eine *asymptotische* Darstellung von $F(x)$. *H. Poincaré* bezeichnet deshalb solche Reihen schlechthin als *asymptotische* und hat verschiedene allgemeine Typen dieser Art an-

teils den speziellen Fall: $\sum_1^p \lg v$, teils aber auch den *allgemeineren* (von *Stirling* noch keineswegs behandelten): $\lg \Gamma(x+1)$, welcher für $x=p$ in den obigen Spezialfall übergeht. — Vgl. auch II A 3.

273) *Théorie anal. des probab.* Livre I, Art. 27. (*Oeuvres* 7, p. 104.) — Derselben Methode entspringt die von *Ch. Hermite* angegebene halbkonvergente Entwicklung von $\int_{-\infty}^x \Phi(x) \cdot e^{nx} \cdot dx$ (*Tor. Atti* 14 [1879], p. 107), desgl. die von *Edm. Laguerre* zum Ausgangspunkte einer konvergenten Kettenbruchentwicklung benützte von $\int_x^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ (*Bull. S. M. d. F. T.* 7 [1879], p. 72.

274) A. a. O. Art. 44, p. 179.

275) *Par. C. R.* 17 (1843), p. 372.

276) Weitere Untersuchungen über halbkonv. Reihen, insbesondere über zweckmässige Wahl von n , bei *T. J. Stieltjes*: *Recherches sur quelques séries sémi-conv.* Thèse, Paris 1886.

gegeben²⁷⁷⁾278). Auch hat er gezeigt, dass man auf dieselben gewisse Rechnungsoperationen (z. B. Multiplikation, Integration, dagegen *nicht* Differentiation) ganz wie bei *konvergenten* Reihen anwenden kann²⁷⁷⁾.

39. Divergente Reihen. Dass eine *divergente* Reihe *nicht* nach Art einer *konvergenten* eine *bestimmte Zahl* vorstellt, folgt schon unmittelbar aus ihrer Definition. Nichtsdestoweniger bleibt zunächst die Frage offen, ob es zweckmässig und ohne Widersprüche durchführbar erscheint, einer *divergenten* Reihe eine *bestimmte Zahl als Summe zuzuordnen*, und ob (bezw. in wie weit) eine Verwendung *divergenter* Reihen als *formales Darstellungs- und Beweismittel* für zulässig gelten kann. In der Periode bis zu *Cauchy* und *Abel* ist diese Frage von der übergrossen Mehrzahl der bedeutendsten Mathematiker fast rückhaltslos bejaht worden²⁷⁹⁾. Namentlich hat *Euler* in einer grossen Reihe von Arbeiten *divergente* Reihen prinzipiell als völlig gleichberechtigt mit *konvergenten* benützt. Als *Summe* einer *divergenten* Reihe betrachtet er den endlichen Zahlenwert *des arithmetischen Ausdruckes*, durch dessen *Entwicklung* die Reihe entstanden ist²⁸⁰⁾. Also: Besteht für irgend welche Werte von x die *konvergente* Entwicklung:

$$(I) \quad F(x) = \sum_0^{\infty} f_v(x),$$

so setzt er auch:

$$(II) \quad \sum_0^{\infty} f_v(\alpha) = F(\alpha),$$

277) Acta math. 8 (1886), p. 295 ff.

278) Méth. nouvelles de la mécanique céleste 2 (Paris 1893), p. 2.

279) Gegen die Benützung *divergenter* Reihen erklärten sich: *Pierre Varignon* (Reiff p. 68), *Nic. Bernoulli* (ibid. p. 121) und mit vollkommener Klarheit *Jean Le-ron d' Alembert* (p. 135): „Pour moi j'avoue que tous les raisonnements fondés sur les séries qui ne sont pas convergentes . . . me paraîtront très suspects, même quand les résultats s'accorderaient avec des vérités connues d'ailleurs“ (Opusc. math. 5, 1768, p. 183). — Am schärfsten hat sich wohl *Abel* in ähnlichem Sinne ausgesprochen: „Les séries divergentes sont en général quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on ose y fonder aucune démonstration“ (Brief an Holmboe vom 16. Januar 1826; Oeuvres 2, p. 256). Doch will er allenfalls *divergente* Reihen als *symbolische Ausdrücke* zur abgekürzten Darstellung mancher Sätze gelten lassen. (In der gleichfalls von 1826 stammenden Abhandlung über die binomische Reihe: Oeuvres 1, p. 220.) — *Cauchy* versteht in dem Fussn. 275 citierten Aufsätze unter der „legitimen Anwendung *divergenter* Reihen“ lediglich die Benützung als *halbkonvergent* erkannter Reihen zur angenäherten Berechnung. In einer anderen Arbeit (Par. C. R. 20, 1845, p. 329) handelt es sich um *divergente Doppelreihen*, die immerhin in *bestimmten Anordnungen* noch *konvergieren*, also um einen besonderen Fall von *bedingter* Konvergenz (ähnlich wie bei den *Eisenstein'schen* Reihen, Nr. 35, Fussn. 250).

280) Inst. calc. diff. Pars II, Cap. I, 9 (p. 289).

wenn $\sum f_v(\alpha)$ *divergiert* und $F(\alpha)$ eine bestimmte Zahl vorstellt. Dass diese Definition in der von *Euler* ausgesprochenen *Allgemeinheit* auf unlösbare Widersprüche führt und somit in *dieser* Form unhaltbar ist, steht heute ausser Zweifel; weiss man doch, dass Gl. (II) *selbst dann nicht* allemal aus Gl. (I) zu folgen braucht, wenn $\sum f_v(\alpha)$ *konvergiert* — nämlich dann nicht, wenn $\sum f_v(x)$ in der Nähe der Stelle $x = \alpha$ *ungleichmässig*²⁸¹⁾ konvergiert, oder wenn $\sum f_v(x)$ in *verschiedenen Teilen* des Konvergenzgebietes *verschiedene* arithmetische Ausdrücke zur Summe hat. Und zwar kann diese Eventualität, die man zuerst an dem verhältnismässig *komplizierten* (und in diesem Falle wesentlich auf *reelle* x beschränkten) Typus der *Fourier'schen Reihen*²⁸²⁾ beobachtet hat, schon eintreten, wenn die $f_v(x)$ *rationale Funktionen allereinfachster Art* bedeuten²⁸³⁾.

Wenn nun aber $\sum f_v(x)$ für $x = \alpha$ *divergiert*, so liegt zunächst überhaupt kein stichhaltiger Grund vor, gerade den Wert $F(\alpha)$ als *Summe* der Reihe für *jenen einzelnen Wert* $x = \alpha$ anzusehen. Denn es giebt *unendlich viele* Entwicklungen: $\Phi(x) = \sum_0^\infty \varphi_v(x)$, für welche $\varphi_v(\alpha) = f_v(\alpha)$ wird, während die $\Phi(\alpha)$ unter sich und von $F(\alpha)$ *durchaus verschieden* sein können; der Reihe $\sum_0^\infty f_v(\alpha)$ würden dann also in Wahrheit *unendlich viele verschiedene Summen* zukommen. *Beispiel: Euler* folgert aus der für $|x| < 1$ geltenden Beziehung:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_0^\infty (-1)^v \cdot x^v, \text{ indem er } x = 1 \text{ setzt: } \sum_0^\infty (-1)^v = \frac{1}{2}.^{284)}$$

281) Vgl. II A 1.

282) Vgl. II A 8.

283) Beispiele solcher Reihen sind zuerst von *L. Seidel* (J. f. Math. 73 [1871], S. 297) und *E. Schroeder* (Z. f. Math. 22 [1877], p. 184) angegeben worden. Unabhängig von diesen beiden hat *Weierstrass* die grosse Tragweite der fraglichen Erscheinung für die Funktionentheorie festgestellt: Berl. Ber. 1880, p. 728 ff.; 1881, p. 228 (Werke 2, p. 210. 231). Vgl. auch meine Note: Math. Ann. 22 (1883), p. 109.

284) Novi Comment. Petrop. 5 (ad ann. 1754. 1755), p. 206. — Die Gleichung: $\sum_0^\infty (-1)^v = \frac{1}{2}$ (bezw. die damit gleichwertige: $\sum_0^\infty (-1)^v \cdot \frac{l}{m} = \frac{l}{2m}$) war schon von *Jac. Bernoulli* als ein „paradoxon non in elegans“ auf die gleiche Art abgeleitet worden (Pos. de ser. inf. P. III (1696); Opera 2, p. 751) und hatte zu einer umfangreichen Diskussion (*Reiff* p. 65—70) geführt, in deren Verlauf

Man hat aber andererseits für $|x| < 1$ (wenn $[λ]$ die grösste in $λ$ enthaltene ganze Zahl bedeutet):

$$(48) \quad \begin{cases} \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \cdot x^{\left[\frac{v}{2}\right]} &= 1 - 1 + x - x + x^2 - x^2 + \dots = 0, \\ \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \cdot x^{v+(-1)^v} &= x - 1 + x^3 - x^2 + x^5 - x^4 + \dots = -\frac{1}{1+x} \end{cases}$$

u. s. f.

Da jede dieser Reihen für $x = 1$ gleichfalls die Form $\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v$ annimmt, so könnte man nach *Euler* der letzteren Reihe eben so gut die Summe 0 oder $-\frac{1}{2}$ (oder auch unendlich viele andere Summenwerte) beilegen²⁸⁵). Wenn also *Euler* an jene angeblich zu Recht bestehende Gleichung: $\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v = \frac{1}{2}$ die unzweideutige Bemerkung knüpft²⁸⁶): man könne, wenn man *durch irgendwelche Rechnung* auf die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v$ geführt werde, dieselbe ohne weiteres durch die Zahl $\frac{1}{2}$ ersetzen — so enthält dieselbe eine *prinzipiell irrtümliche*, durch keinerlei analytische Hilfsmittel irgendwie annehmbar zu machende Behauptung, während allerdings der Gleichung $\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v = \frac{1}{2}$

insbesondere *Leibniz* für die Richtigkeit der Gleichung $\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v = \frac{1}{2}$ bedingungslos eintrat und deren wahre Natur mit Hülfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung metaphysisch zu erklären suchte: der Wert $\frac{1}{2}$ erscheine als das *arithmetische Mittel* aus den für $\sum_{v=0}^n (-1)^v$ mit *vollkommen gleicher Wahrscheinlichkeit* resultierenden Summenwerten 1 und 0. Die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v$ wird seitdem gewöhnlich (auch von *Euler*) schlechthin als die *Leibniz'sche* bezeichnet (neben der Nr. 31 erwähnten Reihe: $\frac{\pi}{4} = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \cdot \frac{1}{2v+1}$).

285) Der umgekehrte, schon von *Nic. Bernoulli* (*Reiff* p. 122) gemachte Einwurf, dass man für ein und dieselbe Zahl *verschiedene* divergente Entwicklungen finden könne, entbehrt offenbar der nötigen Beweiskraft.

286) L. c., p. 211. — Noch *Fourier* (*Théorie analyt. de la chaleur* 1822) bedient sich ohne Bedenken dieser Substitution (*Oeuvres* 2, p. 206).

als einer durch *eine ganz bestimmte Rechnung* abgeleiteten *cum grano salis* eine ganz vernünftige analytische Bedeutung beigelegt werden

kann, nämlich: $\lim_{x=1} \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \cdot x^v = \frac{1}{2}$.²⁸⁷⁾

40. Divergente Potenzreihen. Auch wenn man die *Euler'sche* Definition der divergenten Reihensummen nicht im Sinne der eben citierten Bemerkung²⁸⁸⁾, sondern in dem offenbar vorteilhafteren²⁸⁹⁾ Sinne auffasst, dass statt *einzelner numerischer Werte* α allemal ein *zusammenhängendes Divergenzgebiet* von Werten x' in Betracht kommt, so liefert dieselbe kein brauchbares Resultat, falls man nicht die $f_v(x)$ *sehr wesentlichen* Einschränkungen unterwirft; andernfalls kann ja, wie oben bemerkt, $\sum_{v=0}^{\infty} f_v(x)$ in *verschiedenen Teilen* des Konvergenz-Gebietes ganz *verschiedene* $F(x)$ vorstellen, sodass hieraus eine *bestimmte* Definition von $\sum_{v=0}^{\infty} f_v(x)$ für das *Divergenz-Gebiet* nicht entnommen werden kann. Als passendste Spezialisierung der $f_v(x)$ erweist sich aber die Annahme: $f_v(x) = a_v x^v$, und thatsächlich hat *Euler* seine obige *viel zu allgemeine* Definition fast ausschliesslich in diesem

287) Die von *Leibniz* hervorgehobene Eigentümlichkeit, dass hierbei gerade das *arithmetische Mittel* aus den Summen $s_n = \sum_{v=0}^n (-1)^v$ zum Vorschein kommt, haben *Raabe* (J. f. Math. 15 [1836], p. 355) und *Jeppé Prehn* (ibid. 41 [1851], p. 8) in freilich unzulänglicher Weise zu verallgemeinern gesucht. Eine präzise Fassung und Begründung hat diese Verallgemeinerung erst durch *G. Frobenius* (ibid. 89 [1880], p. 262) erhalten, nämlich: „Ist $\sum_{v=0}^n a_v = s_n$, so hat man:

$$\lim_{x=1} \sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n},$$

falls der letztere Grenzwert *existiert*.“ Dieser Satz bildet das Anfangsglied einer ganzen Kette ähnlicher Sätze: *O. Hölder*, Math. Ann. 20 [1882], p. 535 ff.

288) Darnach würde schon jeder einzelnen *numerischen* divergenten Reihe eine *eindeutig bestimmte* Summe zukommen.

289) Hierbei treten nämlich an die Stelle der blossen *Zahlen* $f_v(\alpha)$ gesetzmässig gebildete *analytische Ausdrücke* $f_v(x')$, so dass also auch bei *numerischer Gleichheit* von $f_v(x')$ und $\varphi_v(x')$ für irgend einen bestimmten Wert $x' = \alpha$ die Reihen $\sum f_v(\alpha)$, $\sum \varphi_v(\alpha)$ immer noch als *merklich verschieden* charakterisiert erscheinen und ihnen ohne direkten Widerspruch auch *verschiedene* „Summen“ zugeordnet werden könnten.

sehr speziellen Sinne gebraucht²⁹⁰): und wenn fast alle Endresultate, bei denen ihm rein formale, nach heutigen Begriffen an sich unzulässige Operationen mit *divergenten* Reihen als Durchgangspunkt gedient haben, sich als *richtig* erweisen, so rührt das einfach davon her, dass diese Operationen (sog. Summation, Transformation, Integration) infolge der ganz besonderen Qualitäten der „Potenzreihen“ $\sum a_n x^n$ sich durch Grenzübergänge²⁹¹) oder durch das Prinzip der analytischen Fortsetzung²⁹²) a posteriori rechtfertigen lassen.

Hieraus ergibt sich aber die Berechtigung, die am Anfang von Nr. 39 angedeutete Frage nunmehr in folgender Weise spezieller zu formulieren: In wie weit kann eine Potenzreihe $\sum a_n x^n$ auch dort, wo sie *divergiert*, zur Definition einer bestimmten von x abhängigen Zahl („Funktion“) $F(x)$ dienen? Und dürfen gewisse zunächst nur für *konvergente* Reihen definierte Rechnungsoperationen auf solche *rein formale Äquivalenzen*: $F(x) = \sum a_n x^n$ (welche nur im Falle der *Konvergenz* von $\sum a_n x^n$ den Sinn wirklicher Gleichungen annehmen) ohne Widerspruch angewendet werden?

H. Padé und E. Borel haben neuerdings in ganz verschiedener Weise versucht, diese Fragen zu beantworten. Der erstere²⁹³) stützt sich auf die Bemerkung, dass einer Potenzreihe nach einem genau definierten Gesetze unendlich viele, aus rationalen Funktionen zusammengesetzte unendliche Kettenbrüche zugeordnet werden können, von denen jeder einzelne umgekehrt auch die Gesamtheit aller übrigen und die Koeffizienten der ursprünglichen Potenzreihe vollständig bestimmt. Sind unter diesen Kettenbrüchen solche, welche gleichzeitig mit $\sum a_n x^n$ konvergieren, so stimmt ihr Grenzwert mit der Summe $\sum a_n x^n$ überein. Es kann aber auch solche geben, welche konvergieren, wo die

290) Dies erklärt sich ganz naturgemäss aus dem Umstande, dass man zu jener Zeit unter „Reihenentwicklungen“ schlechthin zunächst immer nur Potenzreihen verstand. Andererseits war man gerade deshalb auch sehr geneigt, jeder anderen Reihe ohne weiteres die Eigenschaften einer Potenzreihe beizulegen.

291) Vgl. Fussn. 287. — Gewisse, aus Umformungen der divergenten harmonischen Reihe von E. abgeleitete Resultate lassen sich einfacher mit Hülfe des Grenzüberganges: $\lim_{q=0} \sum \frac{1}{n^{1+q}}$ rechtfertigen.

292) Dies gilt insbesondere bezüglich der Transformation und Summation divergenter Reihen mit Hülfe der in Nr. 37 erwähnten Euler'schen Methode, da die rechte Seite der Gl. (43) dort, wo sie überhaupt konvergiert, bzw. falls sie sich auf eine endliche Gliederzahl reduziert, die „analytische Fortsetzung“ (II B 1) von $\sum a_n x^n$ liefert. Vgl. Math. Ann. 50 (1898), p. 458. — Par. C. R. 126 (1898), p. 632.

293) Acta math. 18 (1894), p. 97.

Reihe *divergiert*²⁹⁴); diese letzteren können dann als *Ersatz* für die *divergente* Reihe, also gewissermassen als *Definition* für die *Summe der divergenten Reihe* dienen. Auf Grund dieser Definition lässt sich dann zeigen, dass die Regeln der Addition und Multiplikation auch für *divergente* Potenzreihen gültig bleiben²⁹⁵).

Den Ausgangspunkt der *Borel'schen* Untersuchung²⁹⁶) bildet eine direkte Verallgemeinerung des *Grenzbegriffs* mit Hülfe der Gleichung:

$$(49) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cdot \frac{t^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n,$$

deren Richtigkeit zunächst für den Fall erweisbar ist, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ (als endlich oder unendlich) *existiert*. Sind nun aber $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ und $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} s_n$ *verschieden*, so kann immerhin der in Gl. (49) *links* stehende Grenzwert *existieren* und alsdann zur *Definition* einer *Verallgemeinerung von* $\lim s_n$ („*limite généralisée*“) dienen, in Zeichen etwa:

$$(50) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{gen } s_n = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cdot \frac{t^n}{n!}.$$

294) Dies gilt sogar, wenn $\sum a_n x^n$ *beständig divergiert*. Auf die Existenz solcher Kettenbruchentwickelungen ist man durch diejenige des Ausdrucks

$e^{x^2} \cdot \int_x^{\infty} e^{-x^2} \cdot dx$ aufmerksam geworden, welcher andererseits eine *beständig di-*

vergente Potenzreihe liefert. Die gewöhnlich *P. S. Laplace* zugeschriebene (*Mécan. cél.* 2, Livre X. Oeuvres 4, p. 254) *formale Umwandlung* dieser letzteren in jenen *konvergenten* Kettenbruch findet sich übrigens (abgesehen von einem unwesentlichen Unterschiede in der Bezeichnung) schon *vollständig* bei *Euler*: *De ser. diverg. a. a. O.* p. 236 (nebst einer *konvergenten* Kettenbruchentwickelung des neuerdings von *Laguerre* — vgl. Nr. 38, Fussn. 273 — behandelten Integrals

$\int_x^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$). Und während *Laplace* mit der an sich ungerechtfertigten formalen

Umwandlung der *divergenten* Potenzreihe in den *konvergenten* Kettenbruch sich begnügt, lehrt *Euler* (a. a. O. p. 232 ff.) schon diejenige Methode, welche späterhin von *K. G. J. Jacobi* (*J. f. Math.* 12 [1834], p. 346) zur Legitimierung der *Laplace'schen* Entwickelung angegeben wurde: die Integration einer Differenzialgleichung, welche durch das betreffende bestimmte Integral (und auch *rein formal* durch die *divergente* Potenzreihe) befriedigt wird, mit Hülfe eines unendlichen Kettenbruches.

295) Im übrigen ist diese Theorie noch in vieler Beziehung unvollständig. Verschiedene lehrreiche Ergänzungen kann man den Abhandlungen von *T. J. Stieltjes* (*Ann. Toul.* 8 [1894], p. 1—122, 9 [1895], p. 1—47) entnehmen.

296) *J. de Math.* 4, 12 (1896), p. 103. Vgl. auch: *Par. C. R.* 122 (1896), p. 73. 805. Auch diese Theorie bedarf noch der Vervollständigung und zum Teil sogar der Berichtigung.

Substituiert man speziell: $s_n = s_n(x) = \sum_0^n a_v x^v$, so wird überall da, wo $\sum_0^\infty a_v x^v$ konvergiert, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \sum_0^\infty a_v x^v$, und die Umkehrung dieser Beziehung bietet dann wiederum die Möglichkeit, $\sum_0^\infty a_v x^v$

dort zu definieren, wo die Reihe (*uneigentlich*) divergiert. Die logische Zweckmässigkeit dieser an sich zunächst ziemlich willkürlich erscheinenden Definition ergibt sich dann aus der Thatsache, dass (unter gewissen noch erforderlichen Einschränkungen) $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ wirklich die *analytische Fortsetzung* $f(x)$ von $\sum_0^\infty a_v x^v$ liefert. Wie Gl. (50) zeigt, kann in diesem Falle $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ für irgend eine Divergenzstelle x' sogar dann zur *numerischen* Berechnung von $f(x')$ dienen, wenn nur der *numerische* Wert der einzelnen $s_n(x')$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), d. h. schliesslich der *numerische* Wert der einzelnen *Reihenglieder*, nicht deren *analytisches* Bildungsgesetz bekannt ist.

[In diesem Artikel wurde wesentlich nur die *allgemeine* Theorie der Reihen mit *constanten* Gliedern behandelt. Über *spezielle* Reihen dieser Art, sowie *Funktional-Reihen* sind insbesondere zu vergleichen: *Arithmetische Reihen* (ID 3, IE). — *Recurrente Reihen* (IE und Entwicklung rationaler Funktionen in Potenzreihen). — *Harmonische und Dirichlet'sche Reihen* (IC 3). — *Gleichmässig und ungleichmässig konvergente Reihen* (II A 1). — *Potenzreihen* (II B 1). — *Hypergeometrische Reihen* (II B 1). — *Fourier'sche Reihen* (II A 8). — *Summation von Reihen* (II A 2, 3, 4).]

IV. Unendliche Produkte, Kettenbrüche und Determinanten.

41. Unendliche Produkte. Historisches. Auch die Einführung *unendlicher Produkte* knüpft sich unmittelbar an das für die gesamte Grenzwertlehre als grundlegend erkannte *Quadratur-Problem*, speziell an die Quadratur des Kreises. Schon *Vieta* stellte das Verhältnis des Quadrates mit der Diagonale 2 zur Fläche des umschriebenen Kreises, also die Zahl $\frac{2}{\pi}$, durch das unendliche Produkt dar²⁹⁷):

$$(51) \quad \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots$$

297) Francisci Vietae opera math. Ed. Schooten, Lugd. Bat. 1646, p. 400. — Konv.-Beweis von *Rudio*, Ztschr. f. Math. 36 (1891), Hist. Abt. p. 139. — Verallgemeinerungen dieser Formel bei *Euler*, Opusc. analyt. 1 (1785), p. 346 — und *L. Seidel*, J. f. Math. 73 (1871), p. 273 ff.

Und kurze Zeit darauf gab *Wallis* die nach ihm benannte Formel²⁹⁸):

$$(52) \quad \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdots$$

Durch ein Problem der *Wahrscheinlichkeitsrechnung*²⁹⁹) wurde *Dan. Bernoulli* auf das folgende unendliche Produkt geführt³⁰⁰):

$$(53) \quad \sqrt[2]{\alpha+1} \cdot \sqrt[4]{\alpha+2} \cdot \sqrt[8]{\alpha+4} \cdot \sqrt[16]{\alpha+8} \cdots$$

Die prinzipielle Wichtigkeit dieses Darstellungsmittels hat indessen erst *Euler* genügend erkannt und dasselbe vielfach mit glänzendem Erfolge verwertet. Das von ihm behufs *Interpolation*³⁰¹) von $n!$ aufgestellte unendliche Produkt³⁰²):

$$(54) \quad \frac{1^{1-\omega} \cdot 2^\omega}{1+\omega} \cdot \frac{2^{1-\omega} \cdot 3^\omega}{2+\omega} \cdot \frac{3^{1-\omega} \cdot 4^\omega}{3+\omega} \cdots,$$

in Verbindung mit der gleichfalls zuerst von ihm gegebenen Darstellung der *trigonometrischen Funktionen* durch *unendliche Produkte*³⁰³), darf geradezu als *fundamental* für die Theorie der *eindeutigen analytischen Funktionen*³⁰⁴) gelten. Kaum minder wichtig für die *analytische Zahlentheorie*³⁰⁵) erweist sich die gleichfalls von ihm herrührende Produktdarstellung³⁰⁶):

$$(55) \quad \sum_1^\infty \frac{1}{v^n} = \left(\prod_1^\infty \left(1 - \frac{1}{p_v^n} \right) \right)$$

(wo (p_v) die Reihe der Primzahlen), und eine Anzahl anderer (s. Gl. (64) — (66)).

Allgemeine Regeln über die *Konvergenz* und *Divergenz* unend-

298) Arithm. infin. (1659): Opera 1, p. 468. Näheres darüber bei *Reiff* p. 6 ff.

299) Vgl. I D 1.

300) De mensura sortis. Comment. Petrop. T. V (ad ann. 1730. 31), p. 188. — Konv.-Beweis in der von mir besorgten deutschen Ausgabe (Leipzig 1896), p. 53, Fuss. 12.

301) Vgl. I D 3.

302) Brief an *Chr. F. Goldbach* 13. Oct. 1729 (Corresp. math. et phys., éd. P. H. Fuss, Pétersb. 1843, p. 3). Inst. calc. diff. P. II. Cap. XVII, p. 834.

303) Introd. 1, Cap. 19, p. 120.

304) Vgl. II B 1. — Das obige Produkt stimmt *genau* überein mit demjenigen von *Gauss* (Werke 3, p. 146) für $\omega \cdot \Pi(\omega - 1) = \Pi(\omega)$, welches *Weierstrass* (Werke 2, p. 91) ausdrücklich als Vorbild der von ihm ersonnenen Produkte von *Primfunktionen* zitiert. Jenes erste *typische Beispiel* einer solchen Produktdarstellung findet sich also in Wahrheit schon bei *Euler*.

305) Vgl. I C 3.

306) Introd. 1, Cap. XV, p. 225.

licher Produkte³⁰⁷) hat zuerst *Cauchy* angegeben³⁰⁸); dieselben beruhen auf der Beziehung:

$$\lg \prod_{v=0}^{\infty} (1 + u_v) = \sum_{v=0}^{\infty} \lg (1 + u_v)$$

und der Entwicklung von $\lg (1 + u_v)$ in eine Potenzreihe. *Weierstrass* hat gezeigt³⁰⁹), dass man die Fundamentalsätze über die Konvergenz und Divergenz unendlicher Produkte auch ganz direkt, *ohne* Benützung dieses transcendenten Hilfsmittels herleiten kann. Mit Festhaltung dieses Grundgedankens habe ich späterhin eine zusammenhängende elementare Theorie der unendlichen Produkte entwickelt³¹⁰).

42. Konvergenz und Divergenz. Setzt man: $\prod_{v=0}^n (1 + u_v) = U_n$,

so heisst das *unendliche* Produkt: $\prod_{v=0}^{\infty} (1 + u_v)$, wo durchweg

$|1 + u_v| > a > 0$ angenommen wird, *konvergent* und U der Wert desselben, wenn $\lim U_n = U$ endlich und von Null verschieden ist. In jedem anderen Falle heisst das Produkt *divergent*, insbesondere also auch dann, wenn $\lim U_n = 0$. Der Ausschluss der Produkte mit dem Grenzwerte 0 aus der Klasse der als *konvergent* zu bezeichnenden erweist sich als unbedingt notwendig, wenn ein *konvergentes* Produkt die *fundamentale* Eigenschaft eines *endlichen* Produktes behalten soll, *nicht* zu verschwinden, so lange *kein* einzelner Faktor verschwindet³¹¹). Die *zwei* für die *Konvergenz* von $\prod (1 + u_v)$ hiernach *notwendigen* und *hinreichenden* Bedingungen, nämlich:

$$(56) \quad |U_\varrho| > g > 0, \quad |U_{n+\varrho} - U_n| < \varepsilon \quad (\varrho = 0, 1, 2, \dots),$$

lassen sich vollständig durch die folgende *einzige* ersetzen:

$$(57) \quad \left| \frac{U_{n+\varrho}}{U_n} - 1 \right| < \varepsilon \quad (\varrho = 0, 1, 2, \dots),$$

welche aussagt, dass das „*Restprodukt*“: $\prod_{v=n+1}^{n+\varrho} (1 + u_v)$ bei passender

Wahl von n und für jedes ϱ der 1 beliebig nahe kommen muss, also den bis dahin erzielten Produktwert U_n nicht mehr wesentlich ändert.

307) Ein spezielles Kriterium für die Beurteilung unendlicher Produkte, welches im wesentlichen dem Reihenkriterium von *Gauss* (Nr. 22) entspricht, hat, wie *G. Eneström* (Jahrb. Fortschr. d. Math. 11 [1879], p. 38) bemerkte, schon *Stirling* (Method. diff. 1730, p. 37) angegeben.

308) Anal. algébr. Note 9, p. 561.

309) J. f. Math. 51 (1856), p. 18 ff. — Werke 1, p. 173 ff.

310) Math. Ann. 33 (1889), p. 119. Vgl. auch 42 (1893), p. 183.

311) Vgl. meine Bemerk. a. a. O., p. 125 Fussn., p. 140 Fussn.

Mit dem Produkte $\prod(1 + |u_v|)$ konvergiert auch allemal das Produkt $\prod(1 + u_v)$ und heisst dann *absolut* konvergent; dasselbe konvergiert in diesem Falle unabhängig von der Anordnung der Faktoren, also *unbedingt*. Umgekehrt lässt sich aber auch zeigen, dass ein *unbedingt* konvergentes Produkt auch *absolut* konvergieren muss³¹²⁾. Als *notwendig und hinreichend* für die *absolute und unbedingte Konvergenz* von $\prod(1 + u_v)$ erweist sich die *Konvergenz* der Reihe $\sum |u_v|$.³¹³⁾

Ist $\sum u_v$ nur *bedingt* konvergent, so konvergiert $\prod(1 + u_v)$ oder *divergiert nach Null*, je nachdem $\sum u_v^2$ konvergiert oder *divergiert*³¹⁴⁾. Im ersteren Fall konvergiert $\prod(1 + u_v)$ nur *bedingt*, lässt sich in zwei Produkte von der Form $\prod(1 + a_v)$, $\prod(1 + b_v)$ ($a_v > 0$, $b_v > 0$) zerfällen, von denen das erste nach $+\infty$, das zweite nach 0 *divergiert*, und die sich wiederum ganz nach Analogie des in Nr. 31 erwähnten *Riemann'schen* Reihensatzes zu *konvergenten* Produkten von *beliebig vorzuschreibendem* Werte vereinigen lassen. Die von mir bezüglich der Wertveränderungen *bedingt konvergenter Reihen* gefundenen Resultate lassen sich auch auf solche *Produkte* übertragen³¹⁵⁾.

43. Umformung von unendlichen Produkten in Reihen. Vermöge der Identität:

$$(58) \quad s_n = s_0 + \sum_1^n (s_v - s_{v-1})$$

lässt sich *jeder* Grenzwert $s = \lim s_n$ durch die unendliche *Reihe*:

$$(59) \quad s = s_0 + \sum_1^\infty (s_v - s_{v-1})$$

312) A. a. O., p. 135 ff.

313) Man kann also aus der etwa anderweitig erkannten Konvergenz oder Divergenz von $\prod(1 + |u_v|)$ auch diejenige von $\sum |u_v|$ erschliessen. Vgl. *Weierstrass*, Werke 1, p. 175.

314) Die vorangehenden Sätze gelten auch für *komplexe* u_v , der letzte in dieser Fassung nur für *reelle*. (Von *Cauchy* mit Hülfe der logarithm. Reihe bewiesen: a. a. O. p. 563; rein elementar von mir: a. a. O. p. 150, einfacher: 44, p. 413.) Eine Verallgemeinerung des Satzes für *komplexe* u_v habe ich *Math. Ann.* 22 (1883), p. 480 angegeben. — Auch wenn $\sum u_v$ *divergiert*, lassen sich noch bestimmte Aussagen über verschiedenartiges Verhalten des Produktes $\prod(1 + u_v)$ machen, welches selbst in diesem Falle noch *konvergieren* kann (a. a. O. 33, p. 152 ff.).

315) *Math. Ann.* 22, p. 481.

darstellen³¹⁶). Die Anwendung dieser Methode auf $U_n = \prod_{v=0}^n (1 + u_v)$ giebt die für jedes konvergente (oder auch nach 0 bzw. $+\infty$ divergierende) Produkt gültige Reihendarstellung:

$$(60) \quad \prod_{v=0}^{\infty} (1 + u_v) = 1 + u_0 + \sum_1^{\infty} U_{v-1} \cdot u_v.$$

Konvergiert das Produkt und somit auch $\sum u_v$ absolut, so gestattet diese Reihe jede beliebige Anordnung³¹⁷), insbesondere die folgende:

$$(61) \quad \prod_{v=0}^{\infty} (1 + u_v) = 1 + \sum_x u_x + \sum_{x,\lambda} u_x u_\lambda + \sum_{x,\lambda,\mu} u_x u_\lambda u_\mu + \dots,$$

wobei die Summen $\sum_x, \sum_{x,\lambda}, \sum_{x,\lambda,\mu}, \dots$ über alle möglichen Kombinationen der u_v zur 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten}, ... Klasse zu erstrecken sind. Ist also $u_v = a_v x$, $\sum |a_v|$ konvergent, so hat man für jedes endliche x :³¹⁸)

$$(62) \quad \prod_{v=0}^{\infty} (1 + a_v x) = 1 + \sum_1^{\infty} A_v x^v \quad (A_1 = \sum a_x, A_2 = \sum a_x a_\lambda, \text{ etc.})$$

und allgemeiner:

316) Vermöge der (lediglich an die Beschränkung: $|s_v| \geq \alpha > 0$ gebundenen) analogen Identität:

$$(58a) \quad s_n = s_0 \prod_{v=1}^n \frac{s_v}{s_{v-1}}$$

lässt sich auch jeder Grenzwert $s = \lim s_n$ durch das unendliche Produkt:

$$(59a) \quad s = s_0 \prod_{v=0}^{\infty} \frac{s_v}{s_{v-1}}$$

darstellen. Ist also speziell: $s_n = \sum_{v=0}^n u_v = s_{n-1} + u_n$, so wird

$$(60a) \quad \sum_{v=0}^{\infty} u_v = u_0 \cdot \prod_{v=0}^{\infty} \left(1 + \frac{u_v}{s_{v-1}}\right).$$

Hieraus ergibt sich z. B. der Nr. 26, Fussn. 2 erwähnte *Abel'sche* Satz, dass gleichzeitig mit der Reihe $\sum u_v$ (wo $u_v > 0$) stets auch $\sum \frac{u_v}{s_{v-1}}$ divergiert.

Im übrigen ist aber die Transformation (60a) von wesentlich geringerer Bedeutung als die umgekehrte (60). Beispiele für ihre Anwendung giebt *Stern*, Journ. f. Math. (1834), p. 353.

317) Vgl. z. B. die *Euler'sche* Formel (55).

318) Ein solches Produkt stellt dann nach *Weierstrass'* Bezeichnung eine

$$(63) \quad \prod_0^{\infty} (1 + \sum_1^{\infty} a_v^{(\mu)} x^{\mu}) = 1 + \sum_1^{\infty} A_v x^v,$$

so lange $\sum_0^{\infty} \sum_1^{\infty} |a_v^{(\mu)} x^{\mu}|$ konvergiert.

Bei geeigneter Spezialisierung der a_v , $a_v^{(\mu)}$ lassen sich die unendlichen Reihen, welche zunächst zur Darstellung der A_v sich ergeben, mit Hilfe von Rekursionsformeln summieren. Schon *Euler* fand durch die Substitutionen $a_v = q^{v+1}$, $a_v^{(\mu)} = q^{\mu(v+1)}$ ($|q| < 1$) die Beziehungen³¹⁹⁾:

$$(64) \quad \prod_1^{\infty} (1 + q^v x) = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}v(v+1)}}{(1-q) \cdots (1-q^v)} \cdot x^v,$$

$$(65) \quad \prod_1^{\infty} (1 - q^v x)^{-1} = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{q^v}{(1-q) \cdots (1-q^v)} \cdot x^v,$$

und aus der ersten derselben für $x = -1$ und durch Entwicklung nach Potenzen von q die folgende³²⁰⁾:

$$(66) \quad \prod_1^{\infty} (1 - q^v) = 1 + \sum_1^{\infty} (-1)^v \cdot \left(q^{\frac{1}{2}v(3v-1)} + q^{\frac{1}{2}v(3v+1)} \right).$$

Durch *Jacobi's* Untersuchungen ist der enge Zusammenhang dieser von *Euler* für zahlentheoretische³²¹⁾ Zwecke aufgestellten Formeln und ähnlicher auf analoge Weise zu gewinnender mit der Theorie der *elliptischen Funktionen*³²²⁾ festgestellt worden. Derselbe beruht auf dem Umstande, dass die zur Darstellung der elliptischen Funktionen

ganze transcendente Funktion mit den Nullstellen $x = -\frac{1}{a_v}$ dar. Über die *Weierstrass'sche* Verallgemeinerung dieser Formel (Nr. 41, Fussn. 404) für den Fall, dass $\sum |a_v|$ divergiert, vgl. II B 1.

319) Introd. T. I, Cap. XVI: De partitione numerorum, p. 259. 263.

320) L. c. p. 270. Dort zunächst nur durch Induktion gefunden, bald darauf von *E.* analytisch bewiesen; Petrop. Novi Comment. 5 (ad ann. 1754. 55), p. 75. — Einfacherer Beweis von *Legendre*: Théorie des nombres (1830), T. 2, p. 128. — *Jacobi* ist mehrmals auf diese Formel zurückgekommen und hat ausser zwei elementaren Beweisen (J. f. Math. 21 [1840], p. 13; 32 [1846], p. 164 = Werke 6, p. 281. 303), deren zweiter eine Modifikation des *Euler'schen* ist, noch drei weitere mit Hilfe der *elliptischen Funktionen* gegeben (Fundam. nova, § 62. 63 u. 64—66 = Werke 1, p. 228 ff.; 2, p. 153. J. f. Math. 36 [1848], p. 75).

321) Über die zahlentheoretische Verwertung der Formeln (64) bis (66) vgl. IC 3.

dienlichen *Jacobi'schen Thetafunktionen*³²²⁾ sich aus Produkten von der Form:

$$(67) \quad \prod_1^{\infty} (1 \pm q^{\nu} \cdot x^{\pm 1}), \quad \prod_1^{\infty} (1 \pm q^{2\nu+1} \cdot x^{\pm 1})$$

zusammensetzen lassen³²³⁾. Von den weiteren in dem genannten Zusammenhang von *Jacobi* abgeleiteten Reihendarstellungen unendlicher Produkte will ich als besonders merkwürdig noch die folgenden hervorheben³²⁴⁾:

$$(68) \quad \prod_1^{\infty} \frac{1-q^{\nu}}{1+q^{\nu}} = 1 - 2 \sum_1^{\infty} (-1)^{\nu} \cdot q^{\nu^2},$$

$$(69) \quad \prod_1^{\infty} \frac{1-q^{2\nu}}{1-q^{2\nu-1}} = 1 + \sum_1^{\infty} q^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)},$$

$$(70) \quad \prod_1^{\infty} (1-q^{\nu})^3 = 1 + \sum_1^{\infty} (-1)^{\nu} \cdot (2\nu+1) \cdot q^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}.$$

44. Faktoriellen und Fakultäten. *Cauchy* hat Produkte von der Form $\prod (1+a_{\nu}x)$, bei welchen die a_{ν} wie in (67) eine *geometrische Progression* bilden, als *geometrische Faktoriellen* bezeichnet³²⁵⁾ und eine allgemeine elementare Theorie derselben entwickelt³²⁶⁾. Dieselbe liefert insbesondere Transformationen in unendliche Reihen, welche die *Euler'schen* Formeln und die Entwicklungen der elliptischen Funktionen als spezielle Fälle umfassen.

Als *arithmetische Faktoriellen* hätte man nach *Cauchy* solche $\prod (1+a_{\nu}x)$ oder etwas allgemeiner $\prod (u+a_{\nu}x)$ zu bezeichnen, bei denen die a_{ν} eine *arithmetische Progression* bilden und die sonst zu meist numerische und analytische *Fakultäten* oder auch *Faktoriellen* schlechthin genannt werden³²⁷⁾. Setzt man etwa $a_{\nu} = a + \nu b$ und schreibt wiederum u statt $u+a$, x statt bx , so folgt, dass man $\prod (u+a_{\nu}x)$ stets auf die Form $\prod (u+\nu x)$ bringen kann. Da nun solche *unendliche* Produkte offenbar stets *divergieren* müssen, so handelt es sich hierbei zunächst um *endliche* Produkte von der Form:

322) Vgl. II B 6 a, 7.

323) *Jacobi*, Fundamenta, § 64 (Werke 1, p. 232). Vgl. auch *Gauss'* Nachlass (Werke 3, p. 434). — *Ch. Biehler*, J. f. Math. 88 (1880), p. 186.

324) Fundam. § 66 (Werke 1, p. 237). Die Formel (69) auch bei *Gauss*, Werke 2, p. 20.

325) Par. C. R. 17 (1843), p. 641.

326) Par. C. R. 17, p. 523. 640. 693. 921. 1159.

327) Die Terminologie ist sehr schwankend.

$f(u, x, n) = \prod_{v=0}^{n-1} (u + vx)$ und sodann um deren *Interpolation* für den

Fall, dass eine beliebige Zahl y an die Stelle der natürlichen Zahl n tritt; diese führt auf gewisse unendliche Produkte (zur Darstellung von $f(u, x, y)$), welche als *analytische Fakultäten* bezeichnet zu werden pflegen.

Das fragliche Problem ist zuerst von Euler³²⁸), in speziellerer Form von Vandermonde³²⁹) behandelt worden. Die erste ausführliche Theorie der *Fakultäten* hat sodann Kramp geliefert³³⁰), an welche sich weitere Arbeiten von Bessel³³¹), Crelle³³²), Ohm³³³) und Öttinger³³⁴) anschliessen. Weierstrass hat gezeigt, dass alle diese auf rein formale Behandlungsweise gegründeten Theorien auf mannigfache Widersprüche führen³³⁵), und hat eine völlig neue, wesentlich auf funktionentheoretischer Grundlage ruhende Theorie der *analytischen Fakultäten* entwickelt. Die letzteren werden dabei auf das von W. speziell als *Faktorielle* bezeichnete, für jedes endliche (reelle oder complexe) u konvergierende Produkt:

$$(71) \quad Fc(u) = u \prod_{v=1}^{\infty} \left(\frac{v}{v+1} \right)^u \cdot \left(1 - \frac{u}{v} \right)$$

zurückgeführt, welches sich als identisch mit dem Legendre'schen $\frac{1}{\Gamma(u)}$ oder dem Gauss'schen $\frac{1}{\Pi(u-1)}$ erweist³³⁶) und dessen prinzipielle Bedeutung vor allem darin besteht, dass es den Ausgangspunkt für die Nr. 41, 42, Fussn. 304. 318 erwähnten Untersuchungen gebildet hat.

45. Allgemeine formale Eigenschaften der Kettenbrüche. Als n -gliedrigen *Kettenbruch*³³⁷) bezeichnet man einen Ausdruck von der Form:

328) Inst. calc. diff. 2, p. 832. Vgl. Nr. 41, Formel (54).

329) Vgl. Nr. 10, Fussn. 70. V. behandelt nur den Fall: $f(u, -1, y)$ und bezeichnet die f als *Potenzen zweiter Ordnung*.

330) Analyse des réfractions astronomiques et terrestres, Chap. III, Nr. 142 bis 203. — Gergonne, Ann. 3 (1812), p. 1.

331) Königsb. Archiv f. Naturw. u. Math. 1812. Abh. 2, p. 343.

332) Theorie der analyt. Facultäten, Berlin 1824. J. f. Math. 7 (1831), p. 356.

333) J. f. Math. 39 (1850), p. 23.

334) Ibid. 33 (1846), p. 1 (hier eine übersichtliche Zusammenstellung der bis dahin gebrauchten verschiedenen Definitionen und Bezeichnungen). p. 117. 226. 329; 35 (1847), p. 13; 38 (1849), p. 162. 216; 44 (1852), p. 26. 147.

335) J. f. Math. 51 (1856), p. 1 ff. Der kritische Teil ausführlicher in dem Wiederabdruck dieser Abh.: Werke 1, p. 153 ff.

336) Vgl. II A 3.

337) Über die ältere Geschichte der Kettenbrüche vgl. ausser der im Ein-

$$(72) \left\{ \begin{array}{l} b_0 \pm \frac{a_1}{b_1 \pm \frac{a_2}{b_2 \pm \dots \pm \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} \pm \frac{a_n}{b_n}}} \\ \text{d. h. eigentlich: } b_0 \pm \frac{a_1}{b_1 \pm \frac{a_2}{b_2 \pm \dots \pm \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} \pm \frac{a_n}{b_n}}} \end{array} \right.$$

Derselbe soll hier stets in der gedrängteren Form³³⁸⁾:

$$(73) \quad b_0 \pm \left| \frac{a_1}{b_1} \right| \pm \left| \frac{a_2}{b_2} \right| \pm \dots \pm \left| \frac{a_n}{b_n} \right|$$

geschrieben oder durch das Symbol:

$$(74) \quad \left[b_0; \pm \frac{a_v}{b_v} \right]_1^n$$

bezeichnet werden³³⁹⁾. Die a_v, b_v stellen dabei ganz beliebige Zahlen

gange zitierten Schrift von *S. Günther* deren erweiterte italienische Bearbeitung: *Boncompagni*, *Bulletino di Bibl.* 7 (1874), p. 213. Ibid. p. 451: *Ant. Favaro*, *Notizie storiche sulle frazioni continue*. Auch: *Klügel*, T. 3, p. 88. *M. Cantor*, a. a. O. 2, p. 631. 694; 3, p. 92. 669. — Zusammenhängende Theorien der allgemeinen Kettenbrüche haben ausser *Euler* (*Petrop. Comment.* 9 [1737], p. 98; 11 [1739], p. 22. *Introductio* 1, p. 295) noch *F. A. Möbius* (*J. f. Math.* 6 [1830], p. 216. Werke 4, p. 505) und sehr ausführlich *M. A. Stern* (*J. f. Math.* 10 [1833], p. 1. 154. 241. 364; 11 [1834], p. 33. 142. 277. 311) entwickelt. *Lagrange* (*Add. aux Éléments d'Algèbre d'Euler: Oeuvres* 7, p. 8) und *Legendre* (*Théorie des nombres* [1830], 1, p. 17) haben nur aus ganzen Zahlen zusammengesetzte, insbesondere sog. *regelmässige* Kettenbrüche behandelt. Im übrigen vgl. die citierten Lehrbücher von *Stern*, *Schlömilch*, *Hattendorff* und *Stolz*; auch: *J. A. Serret*, *Cours d'Algèbre supérieure* (Paris 1835), I, p. 7.

338) Diese Schreibweise scheint mir charakteristischer, als die zumeist verbreitete: $b_0 \pm \frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_2} \pm \dots \pm \frac{a_n}{b_n}$, welche nach *Baltzer's* Angabe (*El. der Math.* 1, p. 189, *Fussn.*) von *J. H. T. Müller* (*Allg. Arithm.*, Halle 1838) herrührt (vgl. übrigens Nr. 9, *Fussn.* 52).

339) Allgemein bezeichne ich also durch das Symbol $\left[b_m; + \frac{a_v}{b_v} \right]_{m+1}^n$ den Kettenbruch $b_m \pm \left| \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} \right| \pm \dots \pm \left| \frac{a_n}{b_n} \right|$. Dabei schreibe ich statt $\left[0; \pm \frac{a_v}{b_v} \right]_{m+1}^n$ kürzer: $\left[\pm \frac{a_v}{b_v} \right]_{m+1}^n$, so dass also: $\left[b_m; \pm \frac{a_v}{b_v} \right]_{m+1}^n = b_m + \left[\pm \frac{a_v}{b_v} \right]_{m+1}^n$. — *Stern* bedient sich a. a. O. des allzu undeutlichen Symbol: $F(b_0, b_n)$ oder auch des wenig übersichtlichen: $F(b_0 \pm a_1 : b_1 \pm a_2 : b_2 \pm \dots)$. *E. Heine* (*Handb. der Kugelf.* 1 [1878], p. 261) schreibt dafür: $\left| \begin{array}{cccc} \mp a_1 & \mp a_2 & \dots & \mp a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_n \end{array} \right|$. Ist durchweg $\pm a_v = 1$, so pflegt man den betreffenden Kettenbruch nach *Dirichlet* (Werke 2,

vor, nur wird man naturgemäss die $|a_v| > 0$ voraussetzen, während von den b_v beliebig viele, mit *einzigster Ausnahme*³⁴⁰⁾ von b_n , auch $= 0$ sein können; im übrigen unterliegen die letzteren noch gewissen Beschränkungen, sofern der Kettenbruch überhaupt einen *bestimmten Sinn* haben, d. h. eine bestimmte *Zahl* vorstellen soll.

Man nennt a_0 das *Anfangsglied*, $\pm \frac{a_v}{b_v}$ das v^{te} *Glied* oder den v^{ten} *Teilbruch*, $\pm a_v$ bzw. b_v den v^{ten} *Teilzähler* bzw. *Teilnenner* des Kettenbruches. Verwandelt man den Kettenbruch $\left[b_0; \frac{a_v}{b_v} \right]_1^{\infty}$ ³⁴¹⁾ durch successives Fortschaffen der Teilnenner in einen gewöhnlichen Bruch $\frac{A_v}{B_v}$ und zwar *rein formal* (d. h. insbesondere ohne Anwendung von *Reduktionen*, falls im Laufe der Rechnung infolge *besonderer* Beschaffenheit der a_v, b_v *reduktible* Brüche auftreten sollten³⁴²⁾), so ergibt sich zunächst:

$$(75a) \quad \begin{aligned} A_0 &= b_0 & B_0 &= 1 \\ A_1 &= b_1 \cdot A_0 + a_1 & B_1 &= b_1 \cdot B_0 \end{aligned}$$

und sodann (durch vollständige Induktion) für $v \geq 2$ die Rekursionsformel³⁴³⁾:

$$(75b) \quad A_v = b_v \cdot A_{v-1} + a_v \cdot A_{v-2}, \quad B_v = b_v \cdot B_{v-1} + a_v \cdot B_{v-2}.$$

Fällt hierbei B_v von Null verschieden aus, so heisst $\frac{A_v}{B_v}$ der v^{te} *Näherungsbruch* und im Falle $v = n$ der Wert des Kettenbruches:

$$(76) \quad K_n = b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \dots + \frac{a_n}{|b_n|}.$$

p. 141) mit (b_0, b_1, \dots, b_n) zu bezeichnen, während dieses nämliche Symbol bei Möbius a. a. O. den Kettenbruch $\frac{1}{|b_0|} - \frac{1}{|b_1|} - \dots - \frac{1}{|b_n|}$ bedeutet.

340) Indessen darf immerhin $\lim b_n = 0$ werden, wenn man die b_v als Funktionen einer Veränderlichen auffasst; in diesem Falle geht der Kettenbruch (73) in den folgenden über: $b_0 \pm \frac{a_1}{|b_1|} \pm \dots \pm \frac{a_{n-2}}{|b_{n-2}|}$. (Nur auf diese Art können

z. B. diejenigen Schlüsse legalisiert werden, die Möbius — Werke, 4, p. 507 — zieht, indem er einfach $b_n = 0$ setzt.)

341) Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn ich von jetzt ab nur a_v statt $\pm a_v$ schreibe, da ja die a_v an sich beliebiges Vorzeichen besitzen dürfen.

342) Über diese Möglichkeit vgl. Stern a. a. O. 2, p. 13.

343) Dem Sinne nach schon bei Wallis, Arithm. infinit. p. 191 (Opera 1, p. 475). — Verallgemeinerung der Rekursionsformel (75b) bei Stolz a. a. O. 2, p. 268.

Aus (75) ergibt sich die für die gesamte Lehre von den Kettenbrüchen fundamentale Relation³⁴⁴⁾:

$$(77) \quad \frac{A_v}{B_v} - \frac{A_{v-1}}{B_{v-1}} = (-1)^{v-1} \cdot \frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_v}{B_{v-1} \cdot B_v} \quad (1 \leq v \leq n)$$

und in ähnlicher Weise die allgemeinere:

$$(78) \quad \frac{A_v}{B_v} - \frac{A_\mu}{B_\mu} = (-1)^\mu \cdot \frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{\mu+1} \cdot B_{\mu+1, v}}{B_\mu \cdot B_v} \quad (\mu \leq v-1),$$

wenn noch gesetzt wird:

$$(79) \quad a_x + \frac{a_{x+1}}{|b_{x+1}|} + \cdots + \frac{a_v}{|b_v|} = \frac{A_{x,v}}{B_{x,v}} \quad (x \leq v).$$

Vermöge der Identität $\frac{a}{b+r} = \frac{ca}{cb+cr}$ lässt sich jeder Kettenbruch K_n durch unendlich viele ihm völlig äquivalente (d. h. durchweg gleichwertige Näherungsbrüche liefernde) ersetzen, nämlich:

$$(80) \quad K_n = b_0 + \frac{c_1 a_1}{|c_1 b_1|} + \frac{c_1 c_2 a_2}{|c_2 b_2|} + \cdots + \frac{c_{n-1} c_n a_n}{|c_n b_n|}.$$

Durch passende Wahl der c_v kann man allemal erzielen, dass sich ergibt:

$$(81) \quad K_n = b_0 + \frac{\alpha_1}{|\beta_1|} + \frac{\alpha_2}{|\beta_2|} + \cdots + \frac{\alpha_n}{|\beta_n|},$$

wo die α_v oder die β_v beliebig vorgeschriebene Zahlen sind (mit angemessenem Ausschluss von 0). Wählt man durchweg³⁴⁵⁾ $\alpha_v = +1$, so mag der resultierende Kettenbruch als die *Hauptform*³⁴⁶⁾ von K_n bezeichnet werden. Für $\alpha_v = -1$ kommt diejenige Form zum Vorschein, deren reciproken Wert *Möbius* als Normalform benützt hat und die von *Seidel*³⁴⁷⁾ die *reduzierte Form*³⁴⁸⁾ von K_n genannt worden ist.

46. Rekursorische und independente Berechnung der Näherungsbrüche. Die Rekursionsformeln (75)³⁴⁹⁾ liefern zugleich auch die Hilfsmittel zur *independenten* Berechnung der A_v , B_v .

344) *Euler*, Petr. Comment. 9, p. 104.

345) *Ibid.* p. 108.

346) *Heine* (a. a. O. p. 264) gebraucht diesen Ausdruck, falls die β_v natürliche Zahlen sind.

347) *Münch. Abh.* 2. Kl. 7 (1855), p. 267.

348) Hiervon wohl zu unterscheiden ist der Ausdruck „*reduzierter Kettenbruch*“, mit welchem man nach *Stern* (a. a. O. p. 4) den Wert des betr. Kettenbruchs, also den Näherungsbruch $\frac{A_n}{B_n}$ zu bezeichnen pflegt.

349) Bei dem entsprechenden Rekursionsverfahren wird mit dem Einrichten

Euler hat für den Fall, dass K_v auf die Hauptform gebracht ist, einen eigenen *Algorithmus* zur Darstellung der A_v, B_v ersonnen³⁵⁰⁾, der sich zwar zur Herleitung gewisser Kettenbruchrelationen als sehr nützlich erweist, dagegen für die A_v, B_v im Grunde genommen nur eine *symbolische*, zur effektiven Berechnung nicht genügend durchsichtige³⁵¹⁾ Darstellung liefert, nämlich:

$$(82) \quad \frac{A_v}{B_v} = \frac{(b_0, b_1, b_2, \dots, b_v)}{(b_1, b_2, \dots, b_v)},$$

wobei das Symbol $(b_m, b_{m+1}, \dots, b_v)$ durch die Rekursionsformel definiert ist:

$$(83) \quad (b_m, b_{m+1}, \dots, b_v) = b_v \cdot (b_m, b_{m+1}, \dots, b_{v-1}) + (b_m, b_{m+1}, \dots, b_{v-2}).$$

Mit diesen *Euler'schen* Symbolen im wesentlichen identisch erweisen sich trotz der zunächst gänzlich verschiedenen Definition die von *Möbius*³⁵²⁾ eingeführten Symbole $[b_0, b_1, \dots, b_v]$ — abgesehen davon, dass sich dieselben auf Kettenbrüche von der Form:

$$(84) \quad K_n = b_0 - \frac{1}{|b_1|} - \frac{1}{|b_2|} - \dots - \frac{1}{|b_n|} \quad \left(\text{genauer gesagt: } k_n = \frac{1}{K_n} \right)$$

beziehen. Setzt man nämlich für $m \leq v$:

$$(85) \quad K_{m,v} = b_m - \frac{1}{|b_{m+1}|} - \frac{1}{|b_{m+2}|} - \dots - \frac{1}{|b_v|}$$

(also: $K_{0,v} = K_v, \quad K_{v,v} = b_v$)

und definiert nach *Möbius* das fragliche Symbol durch die Gleichung:

$$(86) \quad [b_0, b_1, b_2, \dots, b_v] = K_{0,v} \cdot K_{1,v} \cdot K_{2,v} \cdots K_{v,v},$$

so lässt sich zeigen, dass diese Ausdrücke ganze rationale Funktionen ihrer Elemente sind, und man erkennt im übrigen unmittelbar, dass

$$K_{0,v} = \frac{A_v}{B_v} = \frac{[b_0, b_1, b_2, \dots, b_v]}{[b_1, b_2, \dots, b_v]}$$

in voller Analogie mit der *Euler'schen* Formel (82).

der Brüche von vorn begonnen. Man findet $\frac{A_2}{B_2}$ aus: $\frac{A_1}{B_1} = \frac{b_1 A_0 + A_1}{b_1 B_0}$ durch Substitution von $b_1 + \frac{a_2}{b_2}$ an Stelle von b_1 u. s. f. Stern hat a. a. O. p. 5 auch

ein mit dem Brüche $\frac{A'_n}{B'_n} = \frac{b_n a_{n-1} + a_n}{b_n}$ beginnendes und rückwärts laufendes

Rekursionsverfahren entwickelt. (Vgl. auch *Stolz* a. a. O. p. 266.)

350) *Petrop. Novi Comment.* 9 (1764). Vgl. auch *Gauss*, *Disquis. arithm.* Art. 27 (Werke 1, p. 20). *Dirichlet-Dedekind*, Vorl. über Zahlentheorie § 23.

351) D. h. etwa nach Art einer Determinante. — Eine brauchbare Regel zur Berechnung der *Euler'schen* Symbole hat übrigens *V. Schlegel* angegeben: *Z. f. Math.* 22 (1877), p. 402.

352) Werke 4, p. 511.

Da die A_v , B_v durch je ein *System linearer Gleichungen* (und zwar, abgesehen von den beiden Anfangsgleichungen (75a) durch das nämliche System) definiert sind, so ergibt sich als nächstliegendes Darstellungsmittel³⁵³) der *Quotient zweier Determinanten*, der sich aber wegen der besonderen Form jener Gleichungen auf *eine einzige Determinante* reduciren lässt. Für den Fall $a_v = +1$ bezw. $a_v = -1$ wurde dies von *Sylvester* und *Spottiswoode* zuerst hervorgehoben³⁵⁴) Die allgemeine Auflösung der in Frage kommenden *rekurrenten dreigliedrigen Linearsysteme* mit Hülfe von Determinanten wurde aus anderweitiger Veranlassung von *Painvin*³⁵⁵) gegeben und zuerst von *S. Günther*³⁵⁶) für die Darstellung der A_v , B_v prinzipiell verwertet³⁵⁷). Unabhängig davon und ungefähr gleichzeitig wurde die Determinantendarstellung der A_v , B_v von *G. Bauer*³⁵⁸) angegeben und auch von *K. Hattendorff*³⁵⁹) in sehr einfacher Weise abgeleitet.

Während hiernach das Problem, die Näherungsbrüche eines vorgelegten Kettenbruches zu berechnen, auf die Auflösung eines rekurrenten dreigliedrigen Linearsystems führt, so kann umgekehrt jedes solche System zur *Definition* eines bestimmten *Kettenbruches* dienen. Diese schon von *Euler*³⁶⁰) gemachte Bemerkung ist von *G. Bauer*³⁶¹), *Heine*³⁶²) und *Scheibner*³⁶³) mit Vorteil zur Herleitung von Kettenbruchrelationen benützt worden. Durch entsprechende Betrachtung

353) Ich übergehe hier die auf kombinatorischen Betrachtungen beruhenden Berechnungsmethoden von *Hindenburg*, *Eytelwein*, *Stern* (a. a. O. p. 5) und anderen; näheres darüber (nebst zahlreichen einschlägigen litterarischen Notizen) in *S. Günther's* Habilitationsschrift: „Darstellung der Näherungswerte von Kettenbrüchen in independenter Form“. Erlangen 1872.

354) *Philos. Mag.* (4) 5 (1853), p. 453; 6 (1853), p. 297. — *J. f. Math.* 51 (1856), p. 374.

355) *J. de Math.* (2) 3 (1858), p. 41.

356) Hieran wird durch die Bemerkung *Heine's* (Kugelf. 1, p. 262, Fussn.), dass ihm der Zusammenhang des gelegentlich (*J. f. Math.* 56 [1859], p. 80) von ihm benützten *Painvin'schen* Resultates mit der *Kettenbruch-Theorie* keineswegs entgangen sei, nichts geändert.

357) In der oben citierten Schrift, deren zweiter Teil eine Anzahl verschiedenartiger Anwendungen jener „Kettenbruchdeterminanten“ (Continuanten), vgl. IA 2 Nr. 31, enthält.

358) *Münch. Abh.*, 2. Kl., 11 (1872), Abt. II, p. 103.

359) *Einl. in die Lehre von den Determinanten.* Hannover 1872, p. 20. Auch: *Algebr. Anal.* p. 264.

360) *Acta Petrop.* 1779, 1, p. 3.

361) *J. f. Math.* 56 (1859), p. 105.

362) *Ibid.* 57 (1860), p. 235.

363) *Leipz. Ber.* 1864, p. 44. Vgl. auch: *Baltzer*, *El. der Math.* 1, p. 189.

analoger *viergliedriger* Systeme gelangte *Jacobi*³⁶⁴⁾ zu einer Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus, die sich auch auf beliebige vielgliedrige Systeme ausdehnen lässt³⁶⁵⁾.

Schliesslich sei hier noch auf den Zusammenhang solcher rekurrenter Systeme mit der Theorie der *Differenzengleichungen*³⁶⁶⁾ hingewiesen. Insbesondere genügen die A_v , B_v , also auch die *Euler'schen* und *Möbius'schen* Symbole einer linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung³⁶⁷⁾.

47. Näherungsbrucheigenschaften besonderer Kettenbrüche.

Die bisher betrachteten Eigenschaften der Kettenbrüche sind *rein formaler* Natur; sie bestehen völlig unabhängig von der besonderen Natur der a_v , b_v (unter denen man sich also statt beliebiger *reeller Zahlen* eventuell auch *complexe Zahlen* bzw. beliebige *Funktionen* denken kann). Eigenschaften anderer Art kommen zum Vorschein, wenn man die a_v , b_v spezialisiert. Insbesondere tritt der eigentümliche Charakter der Näherungsbrüche, welchem dieselben ihren Namen verdanken, erst hervor, wenn die a_v unter sich, desgl. die b_v unter sich (abgesehen von dem allemal irrelevanten b_0) *gleichbezeichnet* sind. Nimmt man durchweg $b_v > 0$ (was vermöge Gl. (80) keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet), so bleiben folgende zwei Möglichkeiten:

I. $a_v > 0$. Aus Gl. (75), (77), (78) folgt dann unmittelbar, dass die A_v , B_v mit v *monoton zunehmen*, die $\frac{A_{2v-1}}{B_{2v-1}}$ eine *zunehmende*, die $\frac{A_{2v}}{B_{2v}}$ eine *abnehmende* Folge bilden, so dass also:

$$(87) \quad \frac{A_{2v-1}}{B_{2v-1}} < \frac{A_{2v+1}}{B_{2v+1}} < K_n < \frac{A_{2v+2}}{B_{2v+2}} < \frac{A_{2v}}{B_{2v}} \quad (1 \leq v < \frac{n}{2} - 1).^{368)}$$

II. $a_v < 0$ — wobei es wegen der Formulierung des folgenden

364) J. f. Math. 69 (1868), p. 29. Werke 6, p. 385. (Aus J.'s Nachlasse von *Heine* herausgegeben.) Vgl. *E. Fürstenau*, Wiesbaden Gymn.-Progr. 1874. — Die fragliche Untersuchung ist neuerdings von *W. Fr. Meyer* erheblich vereinfacht und vervollständigt worden: Königsb. Ber. 1898, p. 1. Züricher Verh. (1898), p. 168.

365) S. die Schlussbem. einer anderen, der eben citierten unmittelbar vorangehenden Abh. von *Jacobi*: a. a. O. p. 28, bzw. 384.

366) Vgl. I E.

367) *Heine*, Kugelf. 1, p. 261.

368) Eine geometrische Deutung dieser Relation s. *Schlömilch*, Algebr. Anal. p. 268. Weitere Ausführung dieses Gedankens bei *Lieblein*, Z. f. Math. 12 (1887), p. 189; *F. Klein*, Gött. Nachr. 1895, p. 257. Andere geometrische Darstellung bei *M. Koppe*, Math. Ann. 29 (1887), p. 187. (Weiterbildung einer von *Poinsot*, J. de Math. 10 [1845], p. 50 herrührenden Methode.)

zweckmässig erscheint, $a_1 > 0$, $b_0 \geq 0$ anzunehmen³⁶⁹). Genügen so-
dann die b_v noch der Bedingung:

$$(88) \quad b_v \geq |a_v| + 1 \quad (v \geq 1),$$

so sind die A_v , B_v und alle $\frac{A_v}{B_v}$ positiv und mit v monoton zunehmend.

Definiert man ferner als v^{ten} *Nebennäherungsbruch*³⁷⁰) den Wert des Kettenbruches:

$$(89) \quad \frac{A'_v}{B'_v} = b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \dots + \frac{a_{v-1}}{|b_{v-1}|} + \frac{a_v}{|b_v - 1|} \quad \left(= \frac{A_v - A_{v-1}}{B_v - B_{v-1}} \right),$$

so hat man stets $\frac{A'_v}{B'_v} > K_n$, und es bilden die $\frac{A'_v}{B'_v}$ eine im allgemeinen monoton abnehmende (nur an Stellen, wo gerade $b_v = |a_v| + 1$, konstante) Folge, so dass also statt Ungl. (87) hier die folgende erscheint:

$$(90) \quad \frac{A_v}{B_v} < \frac{A_{v+1}}{B_{v+1}} \leq K_n < \frac{A'_{v+1}}{B'_{v+1}} \leq \frac{A'_v}{B'_v} \quad (1 \leq v \leq n-1).$$

Charakteristische Beziehungen von ähnlicher Einfachheit finden bei den Näherungsbrüchen sonstiger allgemeiner Kettenbruchtypen nicht statt. Dagegen ergeben sich noch *spezifisch arithmetische* Eigenschaften³⁷¹), wenn die a_v , b_v ganze Zahlen sind³⁷²), namentlich wenn noch durchweg $a_v = \pm 1$.

Dem Typus I gehören die für $a_v = 1$ und positiv ganzzahlige b_v resultierenden *regelmässigen* (auch: *einfachen* oder *gewöhnlichen*) Kettenbrüche an, deren spezielle Näherungsbrücheigenschaften den eigentlichen Anstoss zur Ausbildung der Lehre von den Kettenbrüchen ge-

369) Der Fall $a_1 < 0$, b_0 beliebig, ist ohne weiteres auf den im Text behandelten zurückzuführen.

370) Stern, von dem diese für die Beurteilung analoger *unendlicher* Kettenbrüche nützliche Bemerkung herrührt, bezeichnet die $\frac{A'_v}{B'_v}$ als *mittelbare Näherungsbrüche* (a. a. O. p. 168). Der Ausdruck *Nebennäherungsbrüche* wird sonst gewöhnlich in etwas weiterem Sinne gebraucht, nämlich für alle Brüche, welche aus $\frac{A_v}{B_v}$ entstehen, wenn man den letzten Teilnenner b_v durch $b_v - k$ ($k = 1, 2, \dots$, soweit als $b_v - k > 0$) ersetzt. Dieselben spielen namentlich bei gewissen arithmetischen Betrachtungen über *regelmässige* Kettenbrüche eine Rolle und werden von Stern (a. a. O. p. 18) als *eingeschaltete Näherungsbrüche* bezeichnet. (Bei Lagrange, Oeuvres 2, p. 567: *fractions secondaires*; 7, p. 29: *fractions intermédiaires*.) Vgl. auch Stern, Algebr. Anal. p. 292. 305.

371) Vgl. I C 1.

372) Sind die a_v , b_v beliebige *rationale* Zahlen, so kann man den Kettenbr. mit Hilfe von Gl. (80) stets in einen äquivalenten *ganzzahligen* transformieren.

geben haben³⁷³). Für $a_v = -1$, $b_v \geq |a_v| + 1$, d. h. ≥ 2 ergeben sich dem Typus II (der „reduzierten Form“) angehörige, kaum minder einfach charakterisierte Kettenbrüche, die etwa als *reduziert-regelmässig* bezeichnet werden mögen³⁷⁴). Jede rationale (bezw. irrationale) Zahl A lässt sich *auf eine einzige Weise*³⁷⁵) durch einen begrenzten (bezw. unbegrenzt fortsetzbaren) *regelmässigen* oder auch *reduziert-regelmässigen* Kettenbruch darstellen. Setzt man: $A = b_0 + \frac{1}{r_1}$, $r_1 = b_1 + \frac{1}{r_2}$, u. s. f., so erscheint die *regelmässige*, bezw. *reduziert-regelmässige* Entwicklung, je nachdem man $\frac{1}{r_v}$ allemal dem Intervalle $(0, 1)$ oder $(0, -1)$ entnimmt³⁷⁶).

48. Konvergenz und Divergenz unendlicher Kettenbrüche.
Allgemeines Divergenzkriterium. Aus zwei unbegrenzten Zahlenfolgen (a_v) , (b_v) kann man, zunächst rein formal, einen „unendlichen“ (d. h. unbegrenzt fortsetzbaren) *Kettenbruch*³⁷⁷) bilden, der mit:

$$(91) \quad b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots \quad \text{oder:} \quad \left[b_0; \frac{a_v}{b_v} \right]_1^\infty$$

373) Die Näherungsbrüche regelmässiger Kettenbrüche wurden zuerst von *Daniel Schwenter* zur angenäherten Darstellung von Verhältnissen grosser Zahlen benützt (*Geometria practica* 1625 bezw. 1641). Der durch Ungl. (87) dargestellte Charakter der Näherungsbrüche und ihre *Irreduktibilität* bei *Huygens* (*Descriptio automati planetarii* — Datierung unbestimmt, erst mit seinem Nachlass 1698 veröffentlicht).

374) Eine besondere Benennung scheint sich bisher nicht eingebürgert zu haben.

375) Mit der Nebenbedingung, dass bei einem begrenzten *regelmässigen* Kettenbrüche das *letzte* Glied stets < 1 , bei einem *reduziert-regelmässigen* nicht $= -\frac{1}{2}$ zu nehmen ist.

376) Eine andere Art der Entwicklung, bei welcher $\frac{1}{r_v}$ stets dem Intervalle $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$ entnommen wird, also eine solche „nach nächsten Ganzen“, hat für einen besonderen Fall *C. Minnigerode* (Gött. Nachr. 1873, p. 160) und allgemein *A. Hurwitz* untersucht (*Acta math.* 12 [1889], p. 367). Vgl. auch *Hurwitz*, *Math. Ann.* 39 (1891), p. 281; 44 (1894), p. 429.

377) Als erstes Beispiel eines unendlichen Kettenbruches erscheint nächst der von *Cataldi* gegebenen Entwicklung von Quadratwurzeln (s. Nr. 9) die Beziehung: $\frac{4}{\pi} = \left[1, \frac{(2v-1)^2}{2} \right]_1^\infty$, welche *Lord Brouncker* (um 1659) auf unbekannte Weise aus der *Wallis'schen* Formel abgeleitet hat. (Einfachster Beweis von *Euler* durch Transform. der *Leibniz'schen* Reihe für $\frac{\pi}{4}$: *Opusc. analyt.* 2, p. 449. Im übrigen vgl. *G. Bauer*, *Münch. Abh.* Cl. II 11² [1872], p. 100.)

bezeichnet werden mag. Nennt man wiederum $K_n = \frac{A_n}{B_n}$ den Wert des betr. n -gliedrigen Kettenbruches, so heisst der *unendliche* Kettenbruch *konvergent* und K sein Wert, wenn $\lim K_n = K$; dagegen *eigentlich* oder *uneigentlich divergent* (im letzteren Falle auch *oscillierend*), wenn das entsprechende von der Zahlenfolge (K_v) gilt³⁷⁸). Mit Hülfe von Gl. (77) hat man:

$$(92) \quad K_n = K_0 + \sum_1^n (K_v - K_{v-1}) = b_0 + \sum_1^n (-1)^{v-1} \cdot \frac{a_1 \cdots a_v}{B_{v-1} \cdot B_v},^{379)}$$

und daher:

$$(93) \quad \left[b_0; \frac{a_v}{b_v} \right]_1^\infty = b_0 + \sum_1^\infty (-1)^{v-1} \cdot \frac{a_1 \cdots a_v}{B_{v-1} \cdot B_v},^{380)}$$

falls die betreffende Reihe *konvergiert*, während andererseits die *Divergenz* dieser Reihe stets diejenige des Kettenbruches nach sich zieht. Im Gegensatz zu unendlichen *Reihen* oder *Produkten* können *konvergente Kettenbrüche* lediglich durch *Weglassung einer endlichen Anzahl von Anfangsgliedern* auch *divergent* werden und *umgekehrt*. Ich nenne Kettenbrüche, deren Verhalten durch solche Weglassungen *nicht* alteriert wird, *unbedingt konvergent* bzw. *divergent*. Darnach ist jeder *eigentlich divergente* Kettenbruch nur *bedingt divergent*; beginnt man ihn erst mit dem Gliede $\frac{a_2}{b_2}$, so muss er gegen den Wert $-a_1$ *konvergieren*.

Die Beziehung (92) bzw. (93) liefert ein einfaches und sehr allgemeines *Divergenz-Kriterium*. Ist nämlich der Kettenbruch in der *Hauptform* vorgelegt, etwa: $\left[q_0; \frac{1}{q_v} \right]_1^\infty$, so lautet die gleichgeltende Reihe: $q_0 + \sum_1^\infty (-1)^{v-1} \cdot (Q_{v-1} \cdot Q_v)^{-1}$, wenn Q_v den Nenner des v ten Näherungsbruches bezeichnet. Da aber offenbar

$$|Q_n| < \prod_1^n (1 + |q_v|),$$

so folgt, dass jene Reihe und somit auch der *Kettenbruch* allemal *di-*

378) Der Begriff der *Konvergenz* und *Divergenz* von *Kettenbrüchen* scheint erst von *Seidel* („Unters. über die Konv. und Div. der Kettenbr.“, Habil.-Schr., München 1846) hinlänglich präzisiert worden zu sein. *Stern* (a. a. O. 10, p. 364) rechnet die innerhalb endl. Grenzen *oscillierenden* Kettenbr. zu den *konvergenten* und hat diese Anschauung erst später modifiziert (a. a. O. 37 [1848], p. 255).

379) Mit angemessener Abänderung, wenn einzelne B_v verschwinden sollten.

380) Diese Beziehung schon bei *Euler*, *Petrop. Comm.* 9, p. 104.

vergiert, wenn $\sum |q_v|$ konvergiert³⁸¹). Andererseits lässt sich der ursprünglich betrachtete Kettenbruch mit Hilfe von Gl. (80) stets auf die obige Hauptform bringen, wobei sich ergibt: $q_0 = b_0$, $q_1 = \frac{b_1}{a_1}$ und für $v \geq 2$, $\mu \geq 1$:

$$(94) \quad q_v = c_v \cdot b_v, \quad c_{2\mu} = \frac{a_1 \cdot a_3 \cdots a_{2\mu-1}}{a_2 \cdot a_4 \cdots a_{2\mu}}, \quad c_{2\mu+1} = \frac{a_2 \cdot a_4 \cdots a_{2\mu}}{a_1 \cdot a_3 \cdots a_{2\mu+1}},$$

und somit *divergiert* der Kettenbruch, falls die *beiden* Reihen:

$$(95) \quad \sum \left| \frac{a_1 \cdot a_3 \cdots a_{2\mu-1}}{a_2 \cdot a_4 \cdots a_{2\mu}} \cdot b_{2\mu} \right|, \quad \sum \left| \frac{a_2 \cdot a_4 \cdots a_{2\mu}}{a_1 \cdot a_3 \cdots a_{2\mu+1}} \cdot \frac{b_{2\mu+1}}{a_{2\mu+1}} \right|$$

konvergieren. Die Untersuchung der letzteren kann dann mit Hilfe der Kriterien zweiter Art auf diejenige des Quotienten $\left| \frac{a_{v+2} \cdot b_v}{a_{v+1} \cdot b_{v+2}} \right|$ zurückgeführt werden.

49. Kettenbrüche mit positiven Gliedern. Ein Kettenbruch mit lauter *positiven* Gliedern: $\left[\frac{1}{q_v} \right]_1^\infty$ bzw. $\left[\frac{a_v}{b_v} \right]_1^\infty$ (wo: $q_v > 0$, $a_v > 0$, $b_v > 0$) kann vermöge der besonderen Eigenschaften seiner Näherungsbrüche (s. Ungl. (87)) nur *konvergieren* (in welchem Falle stets: $\left[\frac{1}{q_v} \right]_1^\infty < 1$, $\left[\frac{a_v}{b_v} \right]_1^\infty < \frac{a_1}{b_1}$), oder innerhalb *endlicher* Grenzen *oscillieren*. Die soeben angegebene *hinreichende Divergenz-Bedingung* erweist sich hier zugleich als *notwendig*; d. h. der Kettenbruch *konvergiert* und zwar stets *unbedingt*, wenn $\sum q_v$ bzw. *mindestens* eine der beiden Reihen (95) *divergiert*³⁸²). Da aber die *Divergenz* von $\sum q_v$ feststeht, wenn $\sum q_v \cdot q_{v+1}$ *divergiert* (jedoch *nicht* umgekehrt!), so liefert die *Divergenz* von $\sum q_v \cdot q_{v+1}$ bzw. diejenige von $\sum \frac{b_v b_{v+1}}{a_{v+1}}$ eine merklich einfachere *hinreichende* (aber *nicht notwendige*) Bedingung für die *Konvergenz* des Kettenbruches³⁸³). Bleibt dabei $\frac{b_v}{a_v}$ über, also $\frac{a_v}{b_v}$ unter

381) Für positive q_v bei Seidel a. a. O.; für beliebige q_v bei Stolz a. a. O. p. 279.

382) Zuerst von Seidel (a. a. O.) bewiesen; unabhängig auch von Stern, J. f. Math. 37 (1848), p. 269.

383) Schlömilch (Algebr. Anal. p. 290) giebt die von ihm aufgefundenene allzu enge Bedingung: $\lim \frac{b_v b_{v+1}}{a_{v+1}} > 0$ — mit dem unrichtigen Zusatze, dass man im Falle: $\lim \frac{b_v b_{v+1}}{a_{v+1}} = 0$ über die Beschaffenheit des Kettenbruches nichts aussagen könne. Andere Lehrbücher geben für diesen Fall die gleichfalls un-

einer endlichen Grenze, so genügt schon die *Divergenz* der noch einfacheren Reihe $\sum b_v$. Daraus folgt insbesondere, dass jeder *ganzzahlige* Kettenbruch $\left[\frac{a_v}{b_v}\right]_1^\infty$, falls $0 < a_v \leq b_v$, insbesondere also jeder *regelmässige konvergiert*. Sein Wert ist stets *irrational*³⁸⁴⁾ und < 1 . Über den mit Hilfe der Näherungsbrüche zu erzielenden Grad der Annäherung^{384a)} geben die Formeln (77), (78), (87) Aufschluss.

Ist dagegen $a_v > b_v$ und der Kettenbruch *konvergent* (was mit Hilfe der oben angegebenen Regeln in unendlich vielen Fällen wirklich festgestellt werden kann), so kann sein Wert auch *rational* sein³⁸⁵⁾, und man besitzt keine allgemeinen Kriterien, um seine etwaige *Irrationalität* zu beurteilen. Schon *Euler* hat bemerkt³⁸⁶⁾, dass der Kettenbruch $\left[\frac{m+v}{1+v}\right]_1^\infty$, welcher nach dem gesagten *irrational* ausfällt für $m=0$ und $m=1$,³⁸⁷⁾ einen *rationalen* Wert besitzt, wenn die ganze Zahl $m \geq 2$ ist. Analoges Verhalten zeigt der allgemeinere Kettenbruch $\left[\frac{m+v}{n+v}\right]_1^\infty$, dessen Wert nur für $m \leq n$ *irrational*, dagegen für $m \geq n+1$ *rational* ist³⁸⁸⁾.

50. Konvergente Kettenbrüche mit Gliedern beliebigen Vorzeichens. Ein Kettenbruch, dessen Teilzähler und Teilnenner beliebige Vorzeichen besitzen, kann mit Hilfe von Gl. (80) stets auf die Form gebracht werden: $\varepsilon_0 b_0 + \left[\frac{\varepsilon_v a_v}{b_v}\right]_1^\infty$, wo: $\varepsilon_v = \pm 1$, $a_v > 0$, $b_v > 0$. Ein Kettenbruch dieser letzteren Art ist *unbedingt konvergent*, wenn durchweg oder zum mindesten für $v \geq n$:

$$(96) \quad b_v \geq a_v + 1. \quad (\text{Vgl. Ungl. (88).}^{389})$$

nötig eingeeengte Ergänzungsbedingung: $\sum \frac{b_v b_{v+1}}{a_{v+1} + b_v b_{v+1}}$ *divergent* (herührend von *F. Arndt*, Disqu. de fractionibus continuis, Sundiae 1845).

384) Nach *Legendre*; vgl. Nr. 9, Fussn. 59; Nr. 50, Fussn. 391.

384a) Vgl. *Koppe* a. a. O. p. 199. *Hurwitz*, Math. Ann. 39 (1891), p. 279.

385) Einen besonderen Fall dieser Art s. Fussn. 390.

386) Opusc. anal. 1, p. 85.

387) Er hat für $m=0$ bzw. $m=1$ die Werte: $\frac{1}{e-2} - 1$ bzw. $e-2$.

388) *Euler* a. a. O. p. 103. *Stern* a. a. O. 11, p. 43 ff. Vgl. auch 18, p. 74. *G. Bauer*, Münch. Abh. 11², p. 109.

389) In dieser allgemeinen Form (auch für complexe ε_v , wo $|\varepsilon_v| = 1$) habe ich den Satz neuerdings bewiesen: Münch. Ber. 28 (1898), p. 312 (daselbst auch einige weitere Kriterienformen p. 319 ff.). — Für den besonderen Fall: $\varepsilon_v a_v = -1$ (die „reduzierte“ Form der Kettenbrüche) findet er sich bei *Seidel*, Münch. Abh. 2. Kl., 7² (1855), p. 582; für den etwas allgemeineren: $\varepsilon_v = -1$, $a_v > 0$ — bei *Stern*, Algebr. Anal. p. 301.

Dabei ist stets: $0 < \varepsilon_1 \cdot \left[\frac{\varepsilon_v a_v}{b_v} \right]_1^\infty < 1$, ausser wenn durchweg: $b_v = a_v + 1$, $\varepsilon_v = -1$ und $\sum a_1 a_2 \cdots a_v$ *divergiert*, in welchem Falle der Wert 1 resultiert³⁹⁰). Sind die a_v, b_v ganze Zahlen, so ist der Wert dieses Kettenbruches *irrational*³⁹¹), sofern nicht die eben genannten Spezialbedingungen für $v \geq 1$ bzw. $v \geq n$ bestehen, in welchem Falle er $= 1$, bzw. ein rationaler ächter Bruch ist. In der durch Ungl. (96) charakterisierten Klasse *konvergenter* Kettenbrüche sind insbesondere die *reduziert-regelmässigen* (Nr. 47) und die von A. Hurwitz betrachteten Kettenbruchentwickelungen³⁹²) nach „nächstgelegenen Ganzen“ enthalten. Der Konvergenzgrad der ersteren kann mit Hinzuziehung der Nebennäherungsbrüche (Ungl. (90)) genauer beurteilt werden.

Im übrigen ist die Konvergenzbedingung (96) weit davon entfernt, eine *notwendige* zu sein. Seidel hat gezeigt, dass es unter den Kettenbrüchen von der Form $\left[-\frac{1}{q_v} \right]_1^\infty$ (welche nur für $q_v \geq 2$ als *reduziert-regelmässig* zu gelten haben) sowohl *konvergente*, als *divergente* giebt, falls $q_v < 2$, $\lim q_v = 2$;³⁹³) ja es giebt sogar *konvergente*, für welche $\lim q_v < 2$, z. B. $= \sqrt{2}$.³⁹⁴) *Allgemeine Kriterien* zur Beurteilung von Kettenbrüchen, welche *nicht* der Bedingung (96) genügen (abgesehen von solchen mit lauter positiven Gliedern) scheinen bisher nicht entdeckt worden zu sein.

51. Periodische Kettenbrüche. Bestimmtere Aussagen lassen sich noch bezüglich der speziellen Klasse der periodischen Kettenbrüche machen. Der Kettenbruch $\left[\frac{a_v}{b_v} \right]_1^\infty$ heisst *rein periodisch* mit der *m-gliedrigen Periode* $\left[\frac{a_v}{b_v} \right]_1^m$, wenn für jedes λ und für $\mu = 1, 2, \dots m$:

390) Man hat also in diesem Falle: $-\left[\frac{-a_v}{a_v + 1} \right]_1^\infty = 1$, dagegen $= 1 - \frac{1}{s}$, wenn $1 + \sum_1^\infty a_1 a_2 \cdots a_v = s$. Analog ist für $a_v > 1$: $\left[\frac{a_v}{a_v - 1} \right]_1^\infty = 1$ (Stern Journ. f. Math. 11, p. 41).

391) Schon in dieser Allgemeinheit von Legendre (a. a. O.) ausgesprochen, aber nur insoweit bewiesen, als der Kettenbruch ohne weiteres als *konvergent* angesehen wird. Vgl. Pringsheim, Münch. Ber. 28 (1898), p. 326.

392) Nr. 47, Fussn. 376.

393) A. a. O., p. 585 ff. Der fragliche Kettenbruch ist z. B. *divergent* für $q_v = 2 - \frac{1}{v}$, *konvergent* für $q_v = 2 - \frac{1}{v^1 + q}$ ($q > 0$).

394) A. a. O. p. 595.

$$(97) \quad a_{m\lambda+\mu} = a_\mu, \quad b_{m\lambda+\mu} = b_\mu$$

(mit der selbstverständlichen Nebenbedingung, dass die Periode $\left[\frac{a_v}{b_v}\right]_1^m$ nicht schon in mehrere kleinere Perioden zerfällt). Ist nur der Kettenbruch $\left[\frac{a_v}{b_v}\right]_n^\infty$ ($n > 1$) *periodisch*, so heisst $\left[\frac{a_v}{b_v}\right]_1^\infty$ *gemischt-periodisch*.

Für die Konvergenzuntersuchung genügt die Betrachtung eines *rein-periodischen* Kettenbruches. Falls nun der Kettenbruch $\left[\frac{a_v}{b_v}\right]_1^\infty$ mit der Periode $\left[\frac{a_v}{b_v}\right]_1^m$ überhaupt *konvergiert*, so bestimmt sich sein

Wert x aus der Beziehung: $x = \frac{A_m + x \cdot A_{m-1}}{B_m + x \cdot B_{m-1}}$, also, wenn $|B_{m-1}| > 0$,

aus der quadratischen Gleichung:

$$(98) \quad B_{m-1} \cdot x^2 + (B_m - A_{m-1})x - A_m = 0,$$

aus deren Natur dann umgekehrt die *Konvergenz* oder *Divergenz* des Kettenbruches erschlossen werden kann, soweit dieselbe nicht schon aus den früher angegebenen Kriterien hervorgeht. Als *notwendige* Bedingung für die *Konvergenz* des Kettenbruches ergibt sich bei *reellen* a_v, b_v ohne weiteres die *Realität* der Wurzeln x_1, x_2 von Gl. (98). Dieselbe ist auch *hinreichend* (und zwar hat man $x = x_1$), wenn *entweder* $x_1 = x_2$ oder x_1, x_2 verschieden und zugleich:

$$|B_m + x_1 B_{m-1}| > |B_m + x_2 B_{m-1}|, \quad |A_v - x_2 B_v| > 0 \\ (\nu = 0, 1, \dots (m-2), A_0 = 0, B_0 = 1).$$

In jedem anderen Falle *divergiert* der Kettenbruch; dies gilt insbesondere auch, wenn $B_{m-1} = 0$.³⁹⁵) Sind bei verschiedenen x_1, x_2 die obigen *Konvergenz*-Bedingungen in soweit erfüllt, dass nur für einen oder mehrere *bestimmte* Werte $\nu = p$: $A_\nu - x_2 B_\nu = 0$, so *oscilliert* der Kettenbruch in der Weise, dass: $\lim_{\lambda=\infty} K_{m\lambda+p} = x_2$, im übrigen aber $\lim_{\nu=\infty} K_\nu = x_1$ wird³⁹⁶).

Unter den periodischen Kettenbrüchen nehmen wiederum die *regelmässigen*, deren *Konvergenz* nach Nr. 49 *a priori* feststeht, eine bevorzugte Stellung ein³⁹⁷). Im Gegensatz zu der (im wesentlichen

395) Die vorstehenden Bedingungen rühren von *Stolz* her (Innsbr. Ber. 1886, p. 1. Allg. Arithm. 2, p. 302). Dieselben gelten auch für complexe a_v, b_v (in welchem Falle natürlich die *Realität* von x_1, x_2 als *notwendige* Konvergenzbedingung wegfällt). Ein weiteres *Divergenz*-Kriterium giebt *Stolz*: Innsbr. Ber. 1887/88, p. 1. Vgl. auch: *Mansion*, Mathesis 6 (1886), p. 80.

396) *T. N. Thiele*, Tidskr. (4) 3 (1881), p. 70.

397) Eine etwas allgemeinere Gattung, bei welcher an Stelle des Zählers 1 immer eine *beliebige* konstante ganze Zahl steht, ist von *E. de Jonquières* aus-

schon bei *Cataldi* vorhandenen) *Euler'schen* Entwicklungsform³⁹⁸):

$$(99) \quad x = b + \frac{a}{|b|} + \frac{a}{|b|} + \dots, \quad \text{wo: } x^2 - bx - a = 0,$$

hat *Lagrange* die *regelmässige* Entwicklung³⁹⁹):

$$(100) \quad x = b_0 + \frac{1}{|b_1|} + \frac{1}{|b_0|} + \frac{1}{|b_1|} + \dots, \quad \text{wo: } b_1 x^2 - b_0 b_1 x - b_0 = 0,$$

und (wegen der zuweilen damit verbundenen Abkürzung der Rechnung⁴⁰⁰) allenfalls eine solche von der Form: $\left[b_0; \pm \frac{1}{b_v} \right]_1^\infty$ als einzig wertvolle hingestellt⁴⁰¹). Von ihm rührt der Fundamentalsatz, dass sich jede reelle Wurzel einer quadratischen Gleichung mit reellen ganzzahligen Koeffizienten durch einen allemal *periodischen regelmässigen* Kettenbruch darstellen lässt⁴⁰²). Den einfachen Zusammenhang zwischen den Entwicklungen der beiden verschiedenen Wurzeln hat *Galois* zuerst festgestellt⁴⁰³); die eine Periode ist genau die inverse der anderen⁴⁰⁴).

fürhlich betrachtet worden: Par. C. R. 96 (1883), p. 568. 694. 832. 1020. 1129. 1210. 1297. 1351. 1420. 1490. 1571. 1721. Insbesondere werden die Periodengesetze solcher allgemeinerer Kettenbruchentwicklungen für bestimmt klassifizierte quadratische Irrationalitäten untersucht und der Gang der Näherungsbrüche mit demjenigen der entsprechenden *regelmässigen* Entwicklungen verglichen.

398) *Introductio* P. I, p. 315. Der Kettenbruch wird nur dann *regelmässig*, wenn gerade $a = 1$. — *Petrop. Novi comment.* 11 (1765) giebt *Euler* die Entwicklung von \sqrt{g} (g eine beliebige natürliche Zahl) in einen *regelmässigen* Kettenbruch. — Die Übertragung der eingliedrig-periodischen *Euler'schen* Entwicklungsform (99) auf den Fall einer beliebigen quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten und reellen Wurzeln findet sich (anonym): *Gergonne Ann.* 14 (1823), p. 329.

399) *Oeuvres* 2, p. 594.

400) *Ibid.* p. 622.

401) In den Zusätzen zu *Euler's Algebra* sagt er geradezu folgendes (*Oeuvres* 7, p. 8): „Nous ne considérons ici que les fractions continues où les numérateurs sont égaux à l'unité . . . car celles-ci sont, à proprement parler, les seules qui soient d'un grand usage dans l'Analyse, les autres n'étant presque que de pure curiosité.“

402) *Oeuvres* 2, p. 609. — Einfachere Beweise geben: *M. Charves*, *Darboux* (2) 1 (1877), p. 41, *Hermite*, *ibid.* 9 (1885), p. 11, *W. Veltmann*, *Z. f. Math.* 32 (1887), p. 210). — Eine zusammenhängende Darstellung der Lehre von den *regelmässigen* Kettenbruchenentwicklungen quadratischer Irrationalitäten: *Serret*, *Cours d'Algèbre*, Paris 1885, 1, Chap. II.

403) *Gergonne Ann.* 19 (1828), p. 294. Vgl. auch *Hermite*, *Veltmann* a. a. O. — Der entsprechende Satz für *reduziert-regelmässige* Entwicklungen bei *Möbius*, *Werke* 4, p. 526.

404) Eine ähnliche Art des Zusammenhanges ergibt sich auch bei der *Hurwitz'schen* Entwicklung nach nächsten Ganzen: *Acta math.* 12, p. 399.

52. Transformation unendlicher Kettenbrüche. Neben der in Nr. 45 erwähnten Transformation eines Kettenbruches in einen *äquivalenten*, bei welcher der Wert *sämtlicher Näherungsbrüche ungeändert* bleibt, giebt es noch unendlich viele andere⁴⁰⁵⁾, bei denen dies *nur teilweise* zutrifft; letzteres ist eo ipso allemal dann der Fall, wenn der transformierte Kettenbruch eine *grössere oder geringere Gliederzahl* enthält, als der ursprüngliche. Es liegt auf der Hand, dass bei Transformationen der gedachten Art ein *konvergenter* Kettenbruch sehr wohl *divergent* werden kann *und umgekehrt*⁴⁰⁶⁾ (analog wie bei entsprechenden Umformungen unendlicher Reihen⁴⁰⁷⁾). Immerhin können dieselben mit der nötigen Vorsicht bisweilen zur Verwandlung *konvergenter* Kettenbrüche in *schneller konvergierende*⁴⁰⁸⁾ und sogar zur wirklichen *Wertbestimmung*⁴⁰⁹⁾ („*Reduktion*“, „*Darstellung in geschlossener Form*“, häufig auch — nicht recht passend — als „*Summation*“ bezeichnet) oder zur Ableitung von Relationen zwischen den Werten *verschiedener* konvergenter Kettenbrüche dienlich sein⁴¹⁰⁾.

53. Umformung einer unendlichen Reihe in einen äquivalenten Kettenbruch. Die Umkehrung der Gleichung (93) liefert die Verwandlung einer *unendlichen Reihe* $\sum_1^{\infty} (-1)^{v-1} \cdot c_v$ in einen *äquivalenten Kettenbruch* $\left[\frac{a_v}{b_{v-1}} \right]_1^{\infty}$; dabei stimmt nicht nur der Wert des *unendlichen Kettenbruches* mit der *Summe der Reihe*, sondern auch der

405) Euler, Comment. Petrop. 9, p. 127; Opusc. analyt. 1, p. 101. Stern a. a. O. 10, p. 157. Seidel a. a. O. p. 567. Möbius a. a. O. p. 518. O. Heilermann, Z. f. Math. 5 (1860), p. 362. — Die Transformation des Kettenbruches

$\left[\frac{a_v}{b_{v-1}} \right]_1^{\infty}$, wo $b_v \geq |a_v| + 1$, in einen positiv-gliedrigen bei Heine, Kugelf. 1, p. 265; diejenige eines *regelmässigen* in einen solchen *nach nächsten Ganzen* bei Hurwitz, Zürich. Naturf. Ges. 41 (1896), p. 62.

406) Vgl. Seidel a. a. O. p. 569.

407) Ist z. B. $\sum c_v$ konvergent und $a_v = c_v + (-1)^v$, so *divergiert* $\sum a_v$, während $\sum (a_{2v-1} + a_{2v})$ konvergiert.

408) Vgl. Möbius a. a. O.

409) Stern a. a. O. 11, p. 43.

410) Dahin gehört z. B. die schon von Wallis (Arithm. inf. Prop. 191: Opera 1, p. 470) behufs Ableitung des Brouncker'schen Kettenbruches für $\frac{4}{\pi}$ (Nr. 48, Fussn. 377) aufgestellte, aber nicht ausreichend bewiesene Formel:

$$\left[a - 1, \frac{(2v-1)^2}{2(a-1)} \right]_1^{\infty} \cdot \left[a + 1, \frac{2v-1}{2(a+1)} \right]_1^{\infty} = a^2$$

und deren Verallgemeinerungen; vgl. G. Bauer a. a. O. p. 113.

Wert jedes einzelnen *Näherungsbruches* $\frac{A_n}{B_n}$ mit demjenigen der entsprechenden *Partialsumme* $\sum_1^n (-1)^v \cdot c_v$ überein, so dass also durch die *Konvergenz* der *Reihe* auch diejenige des *Kettenbruches* von vornherein gesichert ist. Die zur Bestimmung der a_v, b_v lediglich erforderliche Auflösung der Gleichungen:

$$\left[\frac{a_v}{b_v} \right]_1^n = \sum_1^n (-1)^{v-1} \cdot c_v \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

gestattet entweder die a_v oder die b_v völlig *willkürlich* anzunehmen (mit angemessenem Ausschluss von 0 — cf. Gl. (80), (81)). Lässt man etwa die b_v *beliebig*, so ergibt sich, wie schon *Euler gefunden hat*⁴¹¹⁾:

$$(101) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = c_1 b_1, \quad a_2 = \frac{c_2 b_1 b_2}{c_1 - c_2} \\ \text{und für } v \geq 3: \quad a_v = \frac{c_{v-2} \cdot c_v \cdot b_{v-1} \cdot b_v}{(c_{v-2} - c_{v-1})(c_{v-1} - c_v)}. \end{array} \right.$$

Werden die b_v speziell so gewählt, dass die Brüche in den Teilzählern wegfallen, d. h. setzt man: $b_1 = 1$ und für $v \geq 2$: $b_v = c_{v-1} - c_v$, so ergibt sich die *Euler'sche Hauptformel*⁴¹²⁾:

$$(102) \quad \sum_1^\infty (-1)^{v-1} \cdot c_v = \frac{c_1}{1} + \frac{c_2}{|c_1 - c_2|} + \dots + \frac{c_{v-2} \cdot c_v}{|c_{v-1} - c_v|} + \dots,$$

aus der unmittelbar noch die folgenden beiden resultieren⁴¹²⁾:

$$(103) \quad \sum_1^\infty (-1)^{v-1} \frac{p_v}{q_v} \cdot \left(\frac{x}{y} \right)^v = \frac{p_1 x}{|q_1 y|} + \frac{p_2 q_1^2 x y}{|p_1 q_2 y - p_2 q_1 x|} + \dots$$

$$+ \frac{p_{v-2} p_v q_{v-1}^2 x y}{|p_{v-1} q_v y - p_v q_{v-1} x|} + \dots,$$

$$(104) \quad \sum_1^\infty (-1)^{v-1} \frac{p_1 \cdots p_v}{q_1 \cdots q_v} \cdot \left(\frac{x}{y} \right)^v = \frac{p_1 x}{|q_1 y|} + \frac{p_2 q_1 x y}{|q_2 y - p_2 x|} + \dots$$

$$+ \frac{p_v q_{v-1} x y}{|q_v y - p_v x|} + \dots.$$

Die letzteren⁴¹³⁾ liefern insbesondere für $y = 1$ bzw. $x = 1$ die Entwicklung von steigenden bzw. fallenden *Potenzreihen* in *äquivalente*

411) Introductio 1, p. 302.

412) L. c. p. 303, 309, 310.

413) Dieselben enthalten u. a. alle jene Spezialentwicklungen, welche *Euler*, ohne auf diese allgemeinen Formeln zu rekurrieren, in einer eigenen Arbeit über die Verwandlung von Reihen in Kettenbrüche umständlich abgeleitet hat (Opusc. anal. 2, p. 138—177).

Kettenbrüche, deren Teilzähler und Teilnenner durchweg *ganze lineare* Funktionen von x bzw. y sind.

54. Anderweitige Kettenbruchentwickelungen unendlicher Reihen. Bei der eben betrachteten, auf der für jedes n geforderten Beziehung: $s_n - \frac{A_n}{B_n} = 0$ beruhenden Kettenbruchtransformation der

Reihe $s = \lim s_n$, erscheint der resultierende Kettenbruch nur in soweit willkürlich, als er nach Massgabe von Gl. (80) auch durch jeden ihm *äquivalenten* ersetzt werden kann. Daneben sind aber noch unendlich viele andere Kettenbruchentwickelungen denkbar, bei denen lediglich

$\lim_{n=\infty} \left(s_n - \frac{A_n}{B_n} \right) = 0$. Setzt man nämlich:

$$(105) \quad s = b_0 + \frac{a_1}{r_1}, \quad r_1 = b_1 + \frac{a_2}{r_2}, \quad \dots \quad r_n = b_n + \frac{a_{n+1}}{r_{n+1}},$$

so kann man offenbar bei willkürlicher Annahme der a_v, b_v die r_v , insbesondere schliesslich r_{n+1} passend bestimmen und erhält auf diese Weise⁴¹⁴):

$$(106) \quad s = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \frac{a_{n+1}}{r_{n+1}}.$$

Bei unbegrenzter Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt sich eine Kettenbruchentwickelung von der Form $s = \left[b_0; \frac{a_v}{b_v} \right]_1^\infty$, sobald der letztere Kettenbruch *konvergiert* und ausserdem $\lim \left(s - \frac{A_n}{B_n} \right) = 0$ wird⁴¹⁵). Erscheint hierdurch die Willkürlichkeit bezüglich der Auswahl der a_v, b_v von vornherein erheblich eingeschränkt, so ergeben sich weitere Einschränkungen aus der Bemerkung, dass Kettenbruchentwickelungen mit ausgeprägten arithmetischen oder analytischen Eigenschaften auf dem gedachten Wege offenbar nur zu stande kommen werden, wenn die Art der successiven *Annäherung* der $\frac{A_v}{B_v}$ an

414) Dabei könnte offenbar s *jede beliebige Zahl* oder *Funktion* bedeuten, d. h. man kann jedes beliebige s durch einen Kettenbruch darstellen, dessen erste n Glieder willkürlich vorgeschrieben sind.

415) Die bloss *Konvergenz* des Kettenbruches würde zur Erschliessung der Beziehung $s = \left[b_0; \frac{a_v}{b_v} \right]$ nicht genügen (ähnlich wie bei der *Taylor'schen* Reihe). Dagegen involviert umgekehrt die zweite Bedingung (die sich folgendermassen schreiben lässt: $\lim \left\{ \frac{r_{n+1}A_n + a_{n+1}A_{n-1}}{r_{n+1}B_n + a_{n+1}B_{n-1}} - \frac{A_n}{B_n} \right\} = 0$) offenbar die *Konvergenz* des Kettenbruches.

den Grenzwert s in irgend welcher gesetzmässigen Weise genauer präzisiert wird. Im übrigen ist die angedeutete Methode bisher lediglich zur Ableitung gewisser *spezieller* Kettenbruchtypen für *Potenzreihen* oder *Quotienten zweier Potenzreihen* verwertet worden ⁴¹⁶).

55. Kettenbrüche für Potenzreihen und Potenzreihenquotienten. *Lambert*⁴¹⁷) hat das durch Gl. (105) charakterisierte Entwicklungsverfahren (d. h. ein successives Divisionsverfahren nach Art der *Euklidischen* Methode zur Aufsuchung des grössten Gemeinteilers) auf den Quotienten $\tan x = \frac{s}{s'}$

$$\left(\text{wo: } s = \sum_0^{\infty} (-1)^v \cdot \frac{x^{2v+1}}{(2v+1)!}, \quad s' = \sum_0^{\infty} (-1)^v \cdot \frac{x^{2v}}{(2v)!} \right)$$

in der Weise angewendet, dass er setzt: $b_0 = 0$, $a_1 = 1$, im übrigen: $a_v = -1$, $b_v = (2v-1) \cdot x^{-1}$, so dass sich ergibt:

$$(107) \quad \tan x = - \left[- \frac{1}{(2v-1) \cdot x^{-1}} \right]_1^{\infty} = - \frac{1}{x} \cdot \left[- \frac{x^2}{2v-1} \right]_1^{\infty}$$

und analog ⁴¹⁸):

$$(108) \quad \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \left[\frac{1}{(4v-2) \cdot x^{-1}} \right]_1^{\infty} = \frac{1}{x} \cdot \left[\frac{x^2}{4v-2} \right]_1^{\infty}.$$

Als eine für die damalige Zeit ausserordentlich bemerkenswerte Leistung ist hervorzuheben, dass *Lambert* sich keineswegs mit der *formalen Ableitung* der obigen Entwicklungen begnügt hat, sondern durch eine zwar etwas umständliche, aber durchaus strenge Unter-

⁴¹⁶) Ein brauchbares *allgemeines* Prinzip für die genauere Präzisierung der unendlich vielen einer *Potenzreihe* zuzuordnenden Kettenbruchentwicklungen hat *R. Padé* angegeben (Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles. Thèse de Doctorat. Paris 1892). Vgl. Nr. 40.

⁴¹⁷) Hist. Acad. de Berlin, Année 1761 (1768), p. 268.

⁴¹⁸) A. a. O. p. 307. — Der Kettenbruch (108) findet sich im wesentlichen auch bei *Euler* und zwar schon in der Kettenbruchabhandlung von 1737 (Petrop. Comment. 9, p. 132); späterhin (z. B. Opusc. anal. 2, p. 216) auch der Kettenbruch (107). *Euler* gewinnt aber die fraglichen Beziehungen nicht durch *Entwicklung* jener Quotienten in Kettenbrüche, sondern gerade umgekehrt durch *Reduktion* einer bestimmten Klasse von Kettenbrüchen mit Hilfe eines Integrationsverfahrens (vgl. Nr. 9 und Münch. Sitzber. 1898, p. 327). Die arithmetischen Eigenschaften jener Klasse von Kettenbrüchen (bei denen nämlich die Teilnenner *arithmetische Reihen* bilden) sind neuerdings von *A. Hurwitz* untersucht worden, Zürich. Naturf. Ges. 41 (1896), p. 34. — Auch *Lagrange* hat die *Lambert'schen* Kettenbrüche und einige ähnliche durch Integration von Differentialgleichungen abgeleitet, Berl. Mémoires. 1776, p. 236 (Oeuvres 4, p. 320).

suchung von $\lim \frac{A_n}{B_n}$ wirklich deren Gültigkeit beweist⁴¹⁹). Bei Legendre⁴²⁰), welcher das Lambert'sche Divisions-Verfahren durch ein kürzeres rekursorisches ersetzt, findet sich von einem derartigen Beweise keine Spur; auch nicht einmal bei Gauss⁴²¹), der die Legendre'sche Methode auf Quotienten von der Form: $\frac{F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$ und ähnliche übertragen hat; dabei bezeichnet das Symbol F die sog. hypergeometrische Reihe:

$$(109) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha + 1) \cdot \beta(\beta + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma + 1)} x^2 \dots$$

Durch die Annahme $\beta = 0$ ergibt sich sodann, wegen $F(\alpha, 0, \gamma, x) = 1$, für die Reihe:

$$(110) \quad F(\alpha, 1, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\gamma(\gamma + 1)} \cdot x^2 + \dots$$

eine Kettenbruchentwicklung von der Form⁴²²):

$$(111) \quad 1 - \frac{a_1 x}{1} - \frac{a_2 x}{1} - \dots, \quad \text{wo: } a_1 = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad a_2 = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma(\gamma + 1)},$$

$$a_{2v+1} = \frac{(\alpha + v)(\gamma + v - \alpha)}{(\gamma + 2v - 1)(\gamma + 2v)}, \quad a_{2v+2} = \frac{(v + 1)(\gamma + v - \alpha)}{(\gamma + 2v)(\gamma + 2v + 1)}.$$

Ein allgemeiner Konvergenz- und Gültigkeitsbeweis dieser Entwicklungen ist durch Heine's Untersuchungen über das Bildungsgesetz der betreffenden Näherungsbrüche⁴²³) vorbereitet und von

419) Vgl. Münch. Ber. 28 (1898), p. 331. Auf dem Lambert'schen Divisionsverfahren beruhen auch die Kettenbruchentwicklungen von Bret (Gergonne Ann. 9 [1818], p. 45) und Gergonne (ibid. p. 263). Letzterer behandelt die der Gauss'schen Reihe (110) verwandte Stainville'sche (ibid. p. 229):

$$f(\alpha, \gamma) = 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot x + \frac{\alpha \cdot (\alpha + \gamma)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{\alpha(\alpha + \gamma)(\alpha + 2\gamma)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \dots$$

und gewinnt u. a. vermöge der Relation: $f(\alpha, \gamma) \cdot f(\beta, \gamma) = f(\alpha + \beta, \gamma)$ verschiedene merkwürdige Beziehungen für Produkte, Potenzen und Quotienten von Kettenbrüchen.

420) Élé. de Géom. Note IV.

421) Disquis. gen. circa seriem inf. 1812 (Werke 3, p. 134).

422) Dieselbe enthält die Kettenbruchentwicklungen für $(1+x)^m$, $\lg(1+x)$,

e^x u. a. als spezielle Fälle, während der allgemeinere Fall $\frac{F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$ u. a. die Lambert'schen Kettenbrüche liefert.

423) J. f. Math. 34 (1847), p. 301; 57 (1860), p. 231. Heine dehnt zugleich die Untersuchung auf die von ihm eingeführte (a. a. O. 32 [1846], p. 210) verallgemeinerte hypergeometrische Reihe aus:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = 1 + \frac{(q^\alpha - 1)(q^\beta - 1)}{(q - 1)(q^\gamma - 1)} x + \frac{(q^\alpha - 1)(q^{\alpha+1} - 1)(q^\beta - 1)(q^{\beta+1} - 1)}{(q - 1)(q^2 - 1)(q^\gamma - 1)(q^{\gamma+1} - 1)} x^2 + \dots,$$

W. Thomé durch direkte Bestimmung von $\lim \frac{A_n}{B_n}$ wirklich geliefert worden⁴²⁴). Die Skizze eines anderen durchaus funktionentheoretischen Beweises hat sich in *Riemann's* Nachlasse vorgefunden⁴²⁵). Elementare Beweise für besondere Fälle geben *Stern*⁴²⁶) und (besser) *Schlömilch*⁴²⁷) in ihren Lehrbüchern.

Die allgemeinere Aufgabe, eine beliebige Potenzreihe $\sum_0^\infty c_\nu x^\nu$, deren reziproken Wert oder den Quotienten zweier solcher Potenzreihen in einen Kettenbruch von der Form: $\left[b_0; \frac{x}{b_1} \right]_1^\infty$ (wo b_0, b_ν von x unabhängig) zu entwickeln, ist von *Stern*⁴²⁸) und mit besserem Erfolge von O. Heilermann⁴²⁹) behandelt worden. Letzterer giebt auch für den Quotienten von $\sum_0^\infty c_\nu x^{-\nu}$, $\sum_0^\infty d_\nu x^{-\nu}$ eine Darstellung von der Form: $\left[b_0; -\frac{a_\nu}{x + b_\nu} \right]_1^\infty$.⁴³⁰) Beide Arten von Entwicklungen sind (ähnlich wie die regelmässige einer Irrationalzahl) nur auf eine einzige Weise möglich. Ihren allgemeinen Charakter und gegenseitigen Zusammenhang hat Heine genauer festgestellt⁴³¹).

(NB. Im vorstehenden wurden fast ausschliesslich solche Arbeiten

welche für $\lim q = 1$ in die *Gauss'sche* übergeht. — Vgl. auch: Kugelf. 1, p. 280. J. Thomae, J. f. Math. 70 (1869), p. 278.

424) Für den besonderen Fall (110), (111): J. f. Math. 66 (1866), p. 322; für den allgemeineren des Reihenquotienten: ibid. 67 (1867), p. 299. Die Kettenbrüche konvergieren für alle x mit Ausschluss des reellen Intervalles $(1, \infty)$ und stellen die durch die Reihen definierte Funktion bzw. deren analytische Fortsetzung dar.

425) Werke p. 400. Der auf complexer Integration beruhende Beweis ist vom Bearbeiter dieses Fragments H. A. Schwarz einigermassen ergänzt worden.

426) Algebr. Anal. p. 467.

427) Algebr. Anal. p. 321. Vgl. auch Stolz 2, p. 310.

428) A. a. O. 10, p. 245.

429) Ibid. 33 (1846), p. 174. Stern giebt nur eine *Rekursionsformel*, Heilermann dagegen eine *independent* Darstellung der b_ν . Beide haben auch das um-

gekehrte Problem (Umformung von $\left[b_0; \frac{x}{b_1} \right]_1^\infty$ in $\sum_0^\infty c_\nu x^\nu$) behandelt: a. a. O. 18 (1838), p. 69; 46 (1853), p. 88.

430) Der Fall einer einzigen Reihe $\sum_0^\infty c_\nu x^{-\nu}$ bei Herm. Hankel, Z. f. Math. 7 (1862), p. 338; und T. J. Stieltjes, Toul. Ann. 3 (1889), p. 1.

431) Kugelf. 1, p. 268.

berücksichtigt, welche im wesentlichen mit *formalen* Methoden operieren. Die weitere Ausbildung der Beziehungen zwischen Reihen und Kettenbrüchen, sowie der entsprechenden Konvergenzbetrachtungen gehört, wie schon gelegentlich der *Gauss'schen* Reihe hervortrat, der Funktionentheorie an.)

56. Beziehungen zwischen unendlichen Kettenbrüchen und Produkten. Die Verwandlung eines unendlichen *Produktes* in einen äquivalenten Kettenbruch — und umgekehrt — kann entweder mittelst Durchganges durch die entsprechende *Reihe* oder auch *direkt* bewerkstelligt werden. Beide Methoden sind von *Stern* diskutiert worden⁴³²). Setzt man:

$$(112) \quad \prod_{\nu=1}^n \frac{p_{\nu}}{q_{\nu}} = \left[\frac{a_{\nu}}{b_{\nu}} \right]_1^n = \frac{A_n}{B_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

so ergibt sich:

$$(113) \quad \frac{a_1}{b_1} = 1, \quad \frac{a_2}{b_2} = -\frac{p_1 - q_1}{p_1}, \quad \frac{a_3}{b_3} = -\frac{(p_2 - q_2)p_1 q_1}{p_1 p_2 - q_1 q_2},$$

$$\frac{a_{\nu+2}}{b_{\nu+2}} = -\frac{(p_{\nu-1} - q_{\nu-1})(p_{\nu+1} - q_{\nu+1}) \cdot p_{\nu} q_{\nu}}{p_{\nu} p_{\nu+1} - q_{\nu} q_{\nu+1}} \quad (\nu \geq 2),$$

und hieraus die Entwicklung von $\prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{p_{\nu}}{q_{\nu}}$ in einen konvergenten Kettenbruch, falls das Produkt selbst *konvergiert*. Da

$$\left(\prod \frac{p_{\nu}}{q_{\nu}} \right)^m = \prod \frac{p_{\nu}^m}{q_{\nu}^m},$$

so besitzt diese Gattung von Kettenbrüchen die merkwürdige Eigenschaft, dass deren m^{te} Potenz wiederum als Kettenbruch von der gleichen Form dargestellt werden kann⁴³³).

Umgekehrt ergibt sich aus der Identität:

$$(114) \quad \frac{A_n}{B_n} = \frac{A_1}{B_1} \cdot \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{A_{\nu+1} \cdot B_{\nu}}{A_{\nu} \cdot B_{\nu+1}}$$

die konvergente Produktentwicklung:

$$(115) \quad \left[\frac{a_{\nu}}{b_{\nu}} \right]_1^{\infty} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_{\nu+1} \cdot B_{\nu}}{A_{\nu} \cdot B_{\nu+1}},$$

432) A. a. O. 10, p. 266. Algebr. Anal. p. 321.

433) Man kennt keinen allgemeinen Satz über die Darstellung von Kettenbruchsummen, -produkten oder -potenzen. Über einige besondere Fälle vgl. Nr. 52, Fussn. 410; Nr. 55, Fussn. 419.

falls der betreffende Kettenbruch *konvergiert*. Mit Hülfe dieser Formel findet Stern u. a. aus Kettenbruchentwickelungen für e , $\frac{e}{e-1}$ eigentümliche Produktdarstellungen (nach Art der Wallis'schen Formel)⁴³⁴).

57. Aufsteigende Kettenbrüche. Setzt man:

$$(116) \quad K^{(n)} = \frac{a_1 + r_1}{b_1}, \quad r_1 = \frac{a_2 + r_2}{b_2}, \quad \dots$$

$$r_{n-2} = \frac{a_{n-1} + r_{n-1}}{b_{n-1}}, \quad r_{n-1} = \frac{a_n}{b_n},$$

so entsteht durch Elimination der r_v ein sog. n -gliedriger *aufsteigender Kettenbruch*:

$$(117) \quad K^{(n)} = \left\{ \frac{a_v}{b_v} \right\}_1^n = \frac{a_1 + \frac{a_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}{b_2}}{b_1}.$$

Da andererseits, wie unmittelbar erkannt wird:

$$(118) \quad \left\{ \frac{a_v}{b_v} \right\}_1^n = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_1 b_2 \dots b_n},$$

so kann man einen solchen aufsteigenden Kettenbruch von vornherein durch dieses einfache Aggregat bzw., im Falle $\lim n = \infty$, durch die betreffende unendliche Reihe ersetzen⁴³⁵). Von bedeutenderen Mathematikern haben sich nur Lambert⁴³⁶) und Lagrange⁴³⁷) gelegentlich mit dieser Gattung von Ausdrücken beschäftigt. Letzterer hat insbesondere auf deren Zusammenhang mit den gewöhnlichen Kettenbrüchen aufmerksam gemacht, wobei es ihm (wie auch den späteren Bearbeitern dieser Theorie) entgangen zu sein scheint, dass dieser Zusammenhang schon vollständig durch die Euler'sche Formel (104) festgestellt erscheint. Die letztere (welche ja auch gilt, wenn man n statt ∞ setzt) liefert unmittelbar die Beziehung:

$$(119) \quad \left\{ \frac{a_v}{b_v} \right\}_1^n = \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2 b_1}{|a_1 b_2 + a_2|} - \dots - \frac{a_{v-2} a_v b_{v-1}}{|a_{v-1} b_v + a_v|} - \dots - \frac{a_{n-2} a_n b_{n-1}}{|a_{n-1} b_n + a_n|},$$

434) Vgl. auch Nr. 44, Fussn. 316.

435) Darnach können umgekehrt die endlichen oder unendlichen systematischen Brüche, die Potenzreihen für e^a , $\cos a$, $\sin a$, ferner die in Nr. 10 erwähnten Reihendarstellungen der rationalen und irrationalen Zahlen auch als aufsteigende Kettenbrüche betrachtet werden.

436) Beyträge zum Gebr. der Math. Teil II, Berlin 1770, p. 104.

437) Zur Lösung der Aufgabe: einen gegebenen Bruch mit möglichster Annäherung durch einen solchen mit vorgeschriebenem Zähler oder Nenner darzustellen (J. Polyt. Cah. 5 [1798], p. 93. Oeuvres 7, p. 291).

aus welcher sich mit Leichtigkeit alle weiteren Eigenschaften der aufsteigenden Kettenbrüche und ihrer Näherungsbrüche ergeben⁴³⁸).

58. Unendliche Determinanten: Historisches. Das Problem, ein System von *unendlich vielen* Lineargleichungen mit unendlich vielen Unbekannten aufzulösen⁴³⁹) und die bekannte Lösungsmethode für ein *begrenztes* System dieser Art mit Hülfe von *Determinanten* haben naturgemäss auf die Betrachtung „*unendlicher*“ *Determinanten* geführt. Der Versuch, diese Lösungsform *endlicher* Linearsysteme auf *unendliche* zu übertragen, ist wohl zuerst von *Th. Kötteritzsch* gemacht worden⁴⁴⁰). Das Wesen seiner Methode besteht darin, dass er ein beliebig vorgelegtes Linearsystem von der Form:

$$(120) \quad \sum_1^{\infty} a_{\mu}^{(\nu)} x_{\mu} = y_{\mu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots \text{in inf.})$$

in ein anderes:

$$(121) \quad \sum_1^{\infty} b_{\mu}^{(\nu)} x_{\mu} = z_{\mu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

transformiert, wo $b_{\mu}^{(\nu)} = 0$, so lange: $\mu < \nu$ (d. h. wo alle Koeffizienten links von der Hauptdiagonale verschwinden). Dieses letztere, dessen

Determinante sich auf den einfachen Ausdruck $\prod_1^{\infty} b_{\nu}^{(\nu)}$ reduziert,

kann (unter geeigneten, a. a. O. ganz unzureichend erörterten Konvergenzbedingungen) unmittelbar aufgelöst werden; und aus dem Umstande, dass diese Lösungen x_{μ} auch dem ursprünglichen Systeme (120) genügen müssen, lassen sich bestimmte Schlüsse auf den Wert (welcher

438) Im übrigen vgl. *S. Günther*, Verm. Unters. zur Gesch. der math. Wissenschaften. Leipzig 1876. (Kap. II. Die Lehre von den aufsteig. Kettenbrüchen in ihrer geschichtl. Entw. p. 93 ff.)

439) Dieses Problem kommt, allgemein zu reden, überall da zum Vorschein, wo es sich um Reihenentwicklungen nach der *Methode der unbestimmten Koeffizienten* handelt. Dabei wird es in dem vorliegenden Zusammenhange so aufgefasst, dass die für ein System von n Gleichungen geltende Lösung durch einen (allemal noch speziell zu legitimierenden) *Grenzübergang* auf den Fall $n = \infty$ übertragen wird. Ein erstes Beispiel dieser Art liefert die Bestimmung der *Fourier'schen* Reihenkoeffizienten auf dem von *Lagrange* vorgezeichneten (*Oeuvres* 1, p. 80), aber (trotz der scheinbar widersprechenden Stelle l. c. p. 553 — vgl. *Riemann's* Bemerkungen, Werke p. 219) nicht bis zum Grenzübergange durchgeführten Wege (s. *Riemann-Hattendorff*, Part. Diff.-Gleichungen § 22). Ein anderes einfaches Beispiel ähnlicher Art (Reihenentwicklung der elliptischen Funktionen) giebt *P. Appell*: *Bullet. Soc. Math. d. Fr.* 13 (1885), p. 13. Vgl. auch die sich unmittelbar daran anschliessende Note von *Poincaré*.

440) *Z. f. Math.* 15 (1870), p. 1—15. 229—268.

= $\prod_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu}^{(\nu)}$ gefunden wird) und die Eigenschaften der aus den $a_{\mu}^{(\nu)}$ gebildeten unendlichen Determinante und ihrer Unterdeterminanten ziehen. Obschon die fraglichen Arbeiten an mancherlei Unzulänglichkeiten und sogar wirklichen Unrichtigkeiten leiden, so haben sie schwerlich die völlige Nichtbeachtung verdient, die ihnen von allen späteren Bearbeitern dieses Gegenstandes zu teil geworden ist. Gewöhnlich wird die Einführung der unendlichen Determinanten dem amerikanischen Astronomen *G. W. Hill* zugeschrieben, der dieselben in einer Arbeit über Mondbewegung⁴⁴¹⁾ rein formal (d. h. ohne genügende analytische Begründung und die nötige Konvergenzuntersuchung, aber mit grossem praktischen Erfolge) dazu benützt hat, eine lineare Differentialgleichung durch Auflösung eines unendlichen Linearsystems zu integrieren. Die fragliche Lücke ist übrigens bald darauf durch *Poincaré* ausgefüllt worden⁴⁴²⁾. Letzterer giebt insbesondere den Konvergenzbeweis für die in Betracht kommende Klasse unendlicher Determinanten, welche dadurch charakterisiert ist, dass die Glieder $a_{\nu}^{(\nu)}$ der Hauptdiagonale (mit eventuellem Ausschlusse einer endlichen Anzahl) durchweg den Wert 1 haben, während die Gesamtheit der übrigen Glieder (mit eventuellem Ausschlusse einer endlichen Anzahl von Zeilen oder Kolonnen) eine absolut konvergente Doppelreihe bilden. Dieser nämlichen Klasse von Determinanten hat sich sodann auch *Helge von Koch* zur Koeffizientendarstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen bedient⁴⁴³⁾ und ist im weiteren Verlaufe dieser Untersuchungen auf die Betrachtung einer etwas allgemeineren, von ihm als *Normalform* bezeichneten Klasse näher eingegangen⁴⁴⁴⁾; an die Stelle der Bedingung $a_{\nu}^{(\nu)} = 1$ tritt hier die absolute Konvergenz von $\prod_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_{\nu}^{(\nu)}$. Ausser der Entwicklung ihrer Haupteigenschaften giebt er auch Anwendungen auf unendliche homogene Linearsysteme und lineare Differentialgleichungen⁴⁴⁵⁾. Schliesslich hat *T. Cazzaniga*⁴⁴⁶⁾

441) Acta math. 8 (1886), p. 26. (Im wesentlichen, Abdruck einer Monogr. Cambridge Mass. [U. S. A.], 1877).

442) Bullet. S. M. d. F. 14 (1886), p. 87.

443) Acta math. 15 (1891), p. 56.

444) Ibid. 16 (1892—93), p. 219.

445) Anwendungen auf nicht-homogene Linearsysteme *ibid.* 18 (1894), p. 377; desgl. auf Kettenbrüche (im Anschlusse an die Nr. 46 erwähnte Determinantendarstellung der A_{ν} , B_{ν}) C. R. 120 (1895), p. 144. — Einige Bemerkungen über eine etwas allgemeinere Form konvergenter Determinanten nebst Anwendungen auf die Konvergenzbestimmung gewisser Potenzreihen giebt *G. Vivanti*, Ann. di Mat. (2), 21 (1893), p. 27.

in einer umfangreichen Arbeit eine zusammenhängende Theorie der unendlichen Determinanten entwickelt, die ausser den *Koch'schen* Resultaten noch mannigfache Ergänzungen und Verallgemeinerungen enthält. Insbesondere wird hier der von *Koch* anfangs ausschliesslich betrachtete Typus (den ich Nr. 59 als „vierseitig-unendlichen“ bezeichne) auf einen etwas einfacheren („zweiseitig-unendlichen“), übrigens späterhin gleichfalls von *Koch*^{446a)} untersuchten zurückgeführt.

59. Haupteigenschaften unendlicher Determinanten. Es sei eine zweifach-unendliche Zahlenfolge $\{a_{\mu}^{(v)}\}_{\mu, v} = -\infty \dots +\infty$ vorgelegt und in Form eines vierseitig unbegrenzten Schemas angeordnet, derart, dass der obere Index eine bestimmte *Zeile*, der untere eine bestimmte *Kolonne* charakterisiert. Bildet man sodann die Determinante $(m+n+1)^{\text{ten}}$ Grades:

$$(122) \quad D_{m,n} = \begin{vmatrix} a_{-m}^{(-m)} & \dots & a_0^{(-m)} & \dots & a_n^{(-m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-m}^{(0)} & \dots & a_0^{(0)} & \dots & a_n^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-m}^{(n)} & \dots & a_0^{(n)} & \dots & a_n^{(n)} \end{vmatrix} = \left[a_{\mu}^{(v)} \right]_{\mu, v}^{+n}_{-m}$$

(d. h. diejenige, deren *Hauptdiagonale* aus den Termen $a_v^{(v)}$ von $v = -m$ bis $v = n$ besteht), so heisst die *vierseitig-unendliche*⁴⁴⁷⁾ *Determinante der* $(a_{\mu}^{(v)})$ *konvergent* und D ihr *Wert*, wenn (im Sinne von Nr. 20)

$\lim_{m=\infty, n=\infty} D_{m,n} = D$ (d. h. endlich oder Null) ist⁴⁴⁸⁾, in Zeichen:

446) Ann. di Mat. (2), 26 (1897), p. 143. Vgl. auch: *E. H. Roberts*, Ann. of Math. 10 (1896), p. 35.

446a) Stockh. Acad. Bih. 22, No. 4, 1896.

447) Das Beiwort „vierseitig“ wurde in Rücksicht auf das folgende von mir hinzugefügt.

448) Diese von *Cazzaniga* (a. a. O. p. 146) gegebene Konvergenzdefinition erscheint mir konsequenter und zweckmässiger, als die ursprünglich von *Poincaré* eingeführte (a. a. O. p. 85) und auch von *Koch* acceptierte, wonach die Determinante schon *konvergent* genannt wird, wenn nur $\lim_{n=\infty} D_{n,n} = D$. Man pflegt

ja auch eine Reihe von der Form $\sum_{v=-\infty}^{+\infty} a_v$ erst *konvergent* zu nennen, wenn

$\lim_{m=\infty, n=\infty} \sum_{v=-m}^n a_v = s$, nicht aber, wenn nur: $\lim_{n=\infty} \sum_{v=-n}^{+n} a_v = s$. In der That wird

auf diese Weise (ganz analog wie bei einer unendlichen Reihe der genannten Art) die Unabhängigkeit der Konvergenz und des Grenzwertes *von der Wahl des Anfangsgliedes* (vgl. *Cazzaniga* a. a. O. p. 151) erzielt, und es treten überhaupt erst die nötigen Analogien mit den *endlichen* Determinanten hervor. Im übrigen genügen die von *Poincaré* betrachteten, sowie die *Koch'schen* Normaldeterminanten *eo ipso* dieser engeren Definition (vgl. *Koch*, Acta math. 16, p. 221).

$$(123) \quad \left[a_{\mu}^{(\nu)} \right]_{-\infty}^{+\infty} = D.$$

Eine solche *konvergente unendliche* Determinante besitzt dann ganz ähnliche Fundamenteigenschaften, wie eine *endliche*; insbesondere:

Sie bleibt ungeändert, wenn man mit Festhaltung der Hauptdiagonale die Zeilen zu Kolonnen macht.

Bei Vertauschung zweier Zeilen oder Kolonnen geht lediglich D in $-D$ über⁴⁴⁹), bleibt also ungeändert, wenn man gleichzeitig zwei Zeilen und zwei Kolonnen vertauscht. Infolge dessen lässt sich die *vierseitig*-unendliche Determinante durch successives Transponieren der Zeilen und Kolonnen in eine *zweiseitig*-unendliche verwandeln, z. B. in eine solche mit der Hauptdiagonale: $a_0^{(0)} a_1^{(1)} a_{-1}^{(-1)} \dots a_{\nu}^{(\nu)} a_{-\nu}^{(-\nu)} \dots$, wenn man jede Zeile und Kolonne mit *negativem* Index *unter* bzw. *hinter* die entsprechende mit *positivem* Index setzt⁴⁵⁰). Umgekehrt kann eine *zweiseitig*-unendliche Determinante von der Form⁴⁵¹):

$$(124) \quad D = \lim_{n=\infty} D_n = \left[a_{\mu}^{(\nu)} \right]_1^{\infty}_{(\mu, \nu)}, \quad \text{wo:} \quad D_n = \left[a_{\mu}^{(\nu)} \right]_1^n_{(\mu, \nu)},$$

in eine konvergente *vierseitig*-unendliche transformiert werden, falls sie selbst *unbedingt*, d. h. in dem Sinne konvergiert, dass ihre Konvergenz durch Vertauschung von Zeilen oder von Kolonnen nicht alteriert wird⁴⁵²). Es genügt also, für alles weitere lediglich Determinanten dieser letzteren Form in Betracht zu ziehen. Multipliziert man alle Glieder einer Zeile oder Kolonne mit einem Faktor p , so geht D in $p \cdot D$ über. Allgemeiner findet man:

$$(125) \quad \left[p_{\mu} q_{\nu} \cdot a_{\mu}^{(\nu)} \right]_1^{\infty}_{(\mu, \nu)} = \prod_1^{\infty} \mu \prod_1^{\infty} \nu p_{\mu} \cdot q_{\nu} \cdot D,$$

falls das betreffende Produkt absolut konvergiert⁴⁵³).

Als *hinreichende* Bedingung für die unbedingte Konvergenz ergibt sich die *absolute* Konvergenz von $\sum_1^{\infty} \nu \sum_1^{\infty} \mu a_{\mu}^{(\nu)} (\mu \leq \nu)$ und $\prod_1^{\infty} a_{\nu}^{(\nu)}$; ⁴⁵⁴)

449) Man hat also, gerade wie bei endlichen Determinanten, $D = 0$, wenn zwei Zeilen oder Kolonnen einander gleich sind.

450) Cazzaniga a. a. O. p. 153, Nr. 5.

451) Dieser etwas einfachere Typus bildet den Ausgangspunkt der Poincaré'schen Betrachtungen; a. a. O. p. 83.

452) Koch bezeichnet diese Eigenschaft als *absolute* Konvergenz (Acta math. 16, p. 229). Später (Stockh. Acad. Bih. 22) definiert er die *unbedingte* Konvergenz in etwas anderer Weise und giebt sowohl die *notwendigen und hinreichenden*, als auch lediglich *hinreichende* Bedingungen dafür an.

453) Cazzaniga a. a. O. p. 155, Nr. 7.

die Determinante heisst alsdann (nach dem Vorgange von *Koch*) eine *normale*. Eine *Normal-Determinante* bleibt *konvergent*, wenn man die Glieder einer *endlichen* Anzahl von *Zeilen* bzw. *Kolonnen* durch *beliebige endlich bleibende Zahlen* ersetzt⁴⁵⁴). Bezeichnet man als *Unterdeterminante* r^{ter} Ordnung diejenige Determinante, welche entsteht, wenn man sämtliche Glieder von r willkürlich gewählten Zeilen und ebensoviel Kolonnen durch 0, nur das der q^{ten} Zeile und q^{ten} Kolonne ($q = 1, 2, \dots, r$) gemeinsame Glied jedesmal durch 1 ersetzt, so folgt unmittelbar, dass jede *Unterdeterminante* einer *Normaldeterminante* wiederum eine *normale* ist. Ihr Wert stimmt, abgesehen von dem in jedem Falle bestimmbaren Vorzeichen, mit dem Werte derjenigen Determinante überein, welche aus der ursprünglichen durch blosse *Weglassung* der betreffenden Zeilen und Kolonnen entsteht. Bezeichnet man mit $A_\mu^{(v)}$ die *Unterdeterminante erster* Ordnung, welche durch die angegebene Modifikation der v^{ten} Zeile und μ^{ten} Kolonne entsteht, so hat man:

$$(126) \quad D = \sum_1^\infty A_\mu^{(v)} \cdot a_\mu^{(v)} = \sum_1^\infty A_\mu^{(v)} \cdot a_\mu^{(v)} \\ (v = 1, 2, 3, \dots \text{ bzw. } \mu = 1, 2, 3, \dots)^{.455)}$$

Diese Entwicklung, wie auch verschiedene andere Formen ergeben sich aus der unmittelbar Gl. (124) entspringenden Beziehung:

$$(127) \quad D = D_1 + \sum_1^\infty (D_{v+1} - D_v).$$

Alle betreffenden Entwicklungen sind *absolut* konvergent. Der Wert einer *Normaldeterminante* wird nicht geändert, wenn man die Glieder $a_\mu^{(n)}$ der n^{ten} Zeile durch $a_\mu^{(n)} + \sum_v c_v a_\mu^{(n_v)}$ ersetzt (dabei darf die Summation auch über *unendlich* viele ganze Zahlen n_v — excl. $n_v = n$ — erstreckt werden, sofern nur die $|c_v|$ unter einer endlichen Zahl bleiben). Das *Produkt* zweier *Normaldeterminanten* lässt sich wiederum durch eine *Normal-Determinante* darstellen, nämlich:

$$(128) \quad [a_\mu^{(v)}]_1^\infty \cdot [b_\mu^{(v)}]_1^\infty = [c_\mu^{(v)}]_1^\infty, \quad \text{wo: } c_\mu^{(v)} = \sum_1^\infty a_\mu^{(x)} b_v^{(x)}.$$

Die in allen diesen Sätzen hervortretende Analogie mit der Lehre von den *endlichen* Determinanten erstreckt sich *mutatis mutandis* auch auf

454) Diese Hauptsätze (nur mit der unwesentlichen Einschränkung $a_v^{(v)} = 1$) schon bei *Poincaré*.

455) Dagegen: $\sum_1^\infty A_\mu^{(v)} a_\mu^{(q)} = 0, \quad \sum_1^\infty A_\lambda^{(v)} a_\mu^{(v)} = 0.$

die Beziehung von $[a_{\mu}^{(v)}]_1^{\infty}$ zu der sog. *reziproken Determinante*⁴⁵⁶⁾: $[A_{\mu}^{(v)}]_1^{\infty}$ ⁴⁵⁷⁾

Von *konvergenten* Determinanten, welche *nicht* der Normalform angehören oder durch Abänderung einer endlichen Anzahl von Zeilen (Kolonnen) in dieselbe übergeführt werden können, hat *Koch* eine dazu in naher Beziehung stehende etwas allgemeinere Klasse hervorgehoben⁴⁵⁸⁾, *Cazzaniga* eine andere mit dem speziellen Grenzwerte 0 genauer untersucht⁴⁵⁹⁾.

456) Bei *Baltzer* (Determinanten § 6) als: Determinante des adjungierten Systems bezeichnet.

457) Näheres: *Cazzaniga* p. 187.

458) A. a. O. p. 235. Vgl. auch *Cazzaniga* p. 200. Die fraglichen Determinanten sind von der Form $[a_{\mu}^{(v)}]_1^{\infty}$, wo (bei geeigneter Wahl der Zahlen x_{μ}) für $\mu \leq v$: $\sum \sum \frac{x_{\mu}}{x_v} \cdot a_{\mu}^{(v)}$ und $\prod a_v^{(v)}$ als absolut konvergent vorausgesetzt werden.

Vivanti bezeichnet a. a. O. diese Klasse von Determinanten als „normaloide“. 459) A. a. O. p. 205. Auf diesen nämlichen Typus, welcher mit gewissen Untersuchungen von *S. Pincherle* (Ann. di Mat. (2), 12 [1884], p. 29) im Zusammenhang steht, bezieht sich eine neuere Arbeit desselben Verfassers: Ann. di Mat. (3), 1 (1898), p. 84.

Nachträge.

Zu p. 74, *Fussn.* 134. Weitere Verallgemeinerungen des fraglichen Grenzwertsatzes s. *J. L. W. Jensen*, Par. C. R. 106 (1888), p. 833. 1520; *Stolz*, Math. Ann. 33 (1889), p. 237; *E. Schimpf*, Bochum, Gymn.-Progr. 1845, p. 6.

Zu p. 79, Nr. 21. Eine genügende Definition der Reihenkonvergenz hat schon *J. Fourier* in einer Abhandlung von 1811 (also vor *Bolzano* und *Cauchy*) gegeben: s. Par. Mém. 1819—20 [24], p. 326 (auch in die *Théorie analytique de la chaleur* übergegangen: *Oeuvres* 1, p. 156. 221). Freilich rechnet *Fourier* mit divergenten (ib. p. 149) und oscillierenden (p. 206. 234) Reihen ohne Skrupel.

Zu p. 105, *Fussn.* 277. Über asymptotische Darstellung von Integralen linearer Diff.-Gleichungen durch halbkonvergente Reihen vgl. *A. Kneser*, Math. Ann. 49 (1897), p. 389.

Zu p. 141, *Fussn.* 440. Vgl. *Fürstenau* a. a. O. p. 67. *Günther*, Determ. Cap. IV, § 6.

W. D.
O CAŁKOWANIU ALGEBRAICZNÉM

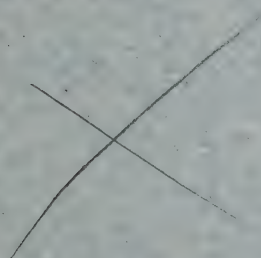
ROŻNICZEK ALGEBRAICZNYCH

PRZEZ

J. PTASZYCKIEGO.

6: Exemples pour "l'Intégration algébrique")

Odbitka z I-go tomu „Prac matematyczno-fizycznych“.



WARSZAWA.

W Drukarni Józefa Sikorskiego, Warecka 14.

1888.

O CAŁKOWANIU ALGEBRAICZNÉM RÓŻNICZEK ALGEBRAICZNYCH.

PRZEZ

J. PTASZYCKIEGO.

1. Przedmiotem pracy niniejszj jest zagadnienie następujące:

„Niechaj funkcyja y będzie związana z zmienną x równaniem algebraiczném; wyrazić całkę $\int y dx$ jako funkcyą algebraiczną zmiennj x lub téż dowieść, że w ten sposób całka ta nie da się przedstawić.“

Zadanie to podjął pierwszy Abel, któremu zawdzięczamy następujące twierdzenie: „Jeżeli całka $\int y dx$ jest algebraiczną, to daje się przedstawić jako funkcyja wymierna ilości x i y .“ Opierając się na tém twierdzeniu, Liouville ¹⁾ rozwiązał w zupełności powyższe zagadnienie. Później i inni matematycy zajmowali się rozwiązaniem tego zadania, jak: Briot i Bouquet ²⁾, Zeuthen ³⁾, Raffy ⁴⁾ i Humbert ⁵⁾.

Nie wchodząc w rozbiór szczegółowy znanych sposobów, prowadzących do rozwiązania zadania, zauważę tylko, że wszystkie one sprowadzić się dają do odszukania kilku wielomianów, a to za pomocą metody współczynników nieoznaczonych.

W pracy niniejszj chcę podać twierdzenie, które pozwala rozwiązać zagadnienie to inną drogą. Przyczém twierdzenie to daje możność rozwiązania

¹⁾ Journal de l'École Polytechnique, XXII cahier. Journal des mathématiques t. III.

²⁾ Théorie des fonctions elliptiques.

³⁾ Comptes Rendus, 1880.

⁴⁾ Annales de l'École Normale, 1883, 1885.

⁵⁾ Acta mathematica, 1887.

zadania za pomocą metody współczynników nieoznaczonych nowym sposobem.

2. *Twierdzenie.* Niechaj P będzie funkcją całkowitą zmiennej x ; z — funkcją, czyniącą zadość równaniu nieprzywiedlnemu o współczynnikach całkowitych:

$$z^n + \varphi_1(x) z^{n-1} + \varphi_2(x) z^{n-2} + \dots = 0.$$

Oznaczmy przez:

$$z_1, z_2, \dots, z_n$$

n wartości funkcji z , a przez $\sqrt[n]{\Delta}$ wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 1, z_1, z_1^2, \dots, z_1^{n-1} \\ 1, z_2, z_2^2, \dots, z_2^{n-1} \\ \dots \\ 1, z_n, z_n^2, \dots, z_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Położmy wreszcie:

$$\Delta = D^2 E,$$

gdzie D jest wielomianem całkowitym, E zaś wielomianem całkowitym, nie mającym pierwiastków wielokrotnych.

Jeżeli całka

$$\int \frac{z}{P} dx$$

jest algebraiczną, natenczas

$$\int \frac{z}{P} dx = \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \dots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y},$$

gdzie $Y, X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ są wielomianami, dającymi się określić w sposób następujący:

1^o Wielomian Y jest iloczynem wielomianu D przez największy wspólny dzielnik wielomianu P i jego pochodnej $\frac{dP}{dx}$.

2^o Wielomiany X_0, X_1, \dots, X_{n-1} czynią zadość równaniom:

$$X_i = \frac{Y}{\sqrt[n]{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, z_1, z_1^2, \dots, z_1^{i-1}, \int \frac{z_1}{P} dx, z_1^{i+1}, \dots, z_1^{n-1} \\ 1, z_2, z_2^2, \dots, z_2^{i-1}, \int \frac{z_2}{P} dx, z_2^{i+1}, \dots, z_2^{n-1} \\ \dots \\ 1, z_n, z_n^2, \dots, z_n^{i-1}, \int \frac{z_n}{P} dx, z_n^{i+1}, \dots, z_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad (i=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

nieskończonym tylko dla wartości x , która jest pierwiastkiem wielomianu P . Przypuśćmy, że

$$P = (x-a_1)^{\alpha_1} (x-a_2)^{\alpha_2} \dots (x-a_i)^{\alpha_i}.$$

Łatwo zrozumieć, że dla $x = a$ całka (2) będzie skończoną lub nieskończenie wielką porządku nie wyższego niż ułamek $\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}$. Stąd wypada, że omawiany wyznacznik sprowadza się do wyrażenia

$$\frac{f(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1} (x-a_2)^{\alpha_2-1} \dots (x-a_i)^{\alpha_i-1}},$$

gdzie $f(x)$ przedstawia funkcję skończoną dla wszystkich skończonych wartości x . Przypomnijmy jeszcze, że $\sqrt[n]{\Delta}$ we wzorze (3) równa się $D\sqrt[n]{E}$, gdzie wielomian E nie ma pierwiastków wielokrotnych.

A zatem na mocy wzoru (3) otrzymujemy:

$$\frac{X_i}{Y_i} = \frac{f(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1} (x-a_2)^{\alpha_2-1} \dots (x-a_i)^{\alpha_i-1} D\sqrt[n]{E}}.$$

Z własności funkcji $f(x)$, E , X_i , Y_i wynika, że wielomian Y_i jest dzielnikiem wielomianu

$$Y = D(x-a_1)^{\alpha_1-1} (x-a_2)^{\alpha_2-1} \dots (x-a_i)^{\alpha_i-1}$$

A więc w równaniu (1) można napisać:

$$Y_i = Y \quad (i=0, 1, 2, \dots, n-1);$$

co dowodzi pierwszej części naszego twierdzenia.

Podstawiając znaną wartość Y_i we wzorze (3), otrzymujemy wyrażenie wielomianu X_i , stwierdzające drugą część twierdzenia.

4. *Zastosowanie.* Dla rozwiązania postawionego w § 1 zagadnienia na zasadzie naszego twierdzenia, postępujemy w ten sposób:

Sprowadzamy funkcję y do postaci

$$\frac{z}{P},$$

wielomian zaś Δ , t. j. kwadrat wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} 1, z_1, z_1^2, \dots, z_1^{n-1} \\ 1, z_2, z_2^2, \dots, z_2^{n-1} \\ \dots \\ 1, z_n, z_n^2, \dots, z_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

do postaci

$$\Delta = D^2 E.$$

Na zasadzie wyrażeń, stanowiących drugą część twierdzenia, obliczamy granice wyższe stopni tych wielomianów; poczem wyznaczamy ich współczynniki pod warunkiem, by równość, podana w n^{tze} poprzedzającym, była tożsamością.

Uwaga. Przy użyciu tego drugiego sposobu wystarczają działania arytmetyczne dla rozwiązania postawionego w № 1 zagadnienia.

6. *Przykłady.* I. Rozpatrzmy całkę

$$\int z dx,$$

gdzie z czyni zadość równaniu nieprzywiedlnemu

$$z^3 - 3z + 2x = 0.$$

Dla tego równania jest:

$$\Delta = -108x^2 + 108;$$

zatem

$$D = 1.$$

Otrzymujemy tedy:

$$Y = 1.$$

Przystępujemy do oznaczenia wielomianów X_0, X_1, X_2 . W tym celu szukamy całkowitych części rozwinięć trzech wyrażeń:

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} \int z_1 dx, & z_1, & z_1^2 \\ \int z_2 dx, & z_2, & z_2^2 \\ \int z_3 dx, & z_3, & z_3^2 \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, & \int z_1 dx, & z_1^2 \\ 1, & \int z_2 dx, & z_2^2 \\ 1, & \int z_3 dx, & z_3^2 \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, & z_1, & \int z_1 dx \\ 1, & z_2, & \int z_2 dx \\ 1, & z_3, & \int z_3 dx \end{vmatrix}$$

według potęg malejących ilości x .

Z równania, któremu czyni zadość ilość z , wynika:

$$z_1 = \alpha_1 x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\alpha_1} x^{-\frac{1}{3}} + \beta_1 x^{-\frac{5}{3}} + \dots,$$

$$z_2 = \alpha_2 x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\alpha_2} x^{-\frac{1}{3}} + \beta_2 x^{-\frac{5}{3}} + \dots,$$

$$z_3 = \alpha_3 x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\alpha_3} x^{-\frac{1}{3}} + \beta_3 x^{-\frac{5}{3}} + \dots;$$

$$\text{gdzie } \alpha_1 = \sqrt[3]{-2}, \alpha_2 = \sqrt[3]{-2} \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \alpha_3 = \sqrt[3]{-2} \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2};$$

wartość współczynników $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ nie jest nam potrzebna. Stąd mamy bezpo-

$$z_1^2 = \alpha_1^2 x^{\frac{2}{3}} + 2 + \frac{1}{\alpha_1^2} x^{-\frac{2}{3}} + 2\alpha_1\beta_1 x^{-\frac{4}{3}} + \dots,$$

$$z_2^2 = \alpha_2^2 x^{\frac{2}{3}} + 2 + \frac{1}{\alpha_2^2} x^{-\frac{2}{3}} + 2\alpha_2\beta_2 x^{-\frac{4}{3}} + \dots,$$

$$z_3^2 = \alpha_3^2 x^{\frac{2}{3}} + 2 + \frac{1}{\alpha_3^2} x^{-\frac{2}{3}} + 2\alpha_3\beta_3 x^{-\frac{4}{3}} + \dots,$$

oraz:

$$\int z_1 dx = \frac{3\alpha_1}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2\alpha_1} x^{\frac{2}{3}} + c_1 - \frac{3\beta_1}{2} x^{-\frac{2}{3}} + \dots,$$

$$\int z_2 dx = \frac{3\alpha_2}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2\alpha_2} x^{\frac{2}{3}} + c_2 - \frac{3\beta_2}{2} x^{-\frac{2}{3}} + \dots,$$

$$\int z_3 dx = \frac{3\alpha_3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2\alpha_3} x^{\frac{2}{3}} + c_3 - \frac{3\beta_3}{2} x^{-\frac{2}{3}} + \dots$$

Mamy jeszcze:

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} = 1 : \begin{vmatrix} 1, z_1, z_1^2 \\ 1, z_2, z_2^2 \\ 1, z_3, z_3^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6\sqrt{-3}} \left(x^{-1} + \frac{1}{2} x^{-3} + \dots \right).$$

Na mocy tych rozwinięć otrzymujemy:

$$X_0 = \text{stałej}, \quad X_1 = \frac{3}{4}x, \quad X_2 = -\frac{3}{8}.$$

A więc, jeżeli całka dana jest algebraiczną, przyjąć można:

$$\int z dx = \frac{3}{4}xz - \frac{3}{8}z^2.$$

Wziąwszy pochodną tego równania, przekonywamy się, że druga jego strona przedstawia nam rzeczywiście wartość całki daniej.

II. Niechaj będzie całka

$$\int z dx,$$

gdzie z czyni zadość równaniu nieprzywiedlnemu:

$$z^3 - 3xz + x^3 = 0.$$

Dla tego równania jest:

$$\Delta = -27x^6 + 108x^3,$$

a zatem:

$$D = x.$$

Otrzymujemy tedy:

$$Y = x.$$

Przystępujemy teraz do oznaczenia wielomianów X_0, X_1, X_2 na podstawie prawidła, wskazanego w № 5. W tym celu szukamy wyższych granic stopni tych wielomianów, t. j. wyrażeń

$$\frac{x}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} \int z_1 dx, & z_1, & z_1^2 \\ \int z_2 dx, & z_2, & z_2^2 \\ \int z_3 dx, & z_3, & z_3^2 \end{vmatrix}, \frac{x}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, & \int z_1 dx, & z_1^2 \\ 1, & \int z_2 dx, & z_2^2 \\ 1, & \int z_3 dx, & z_3^2 \end{vmatrix}, \frac{x}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, & z_1, & \int z_1 dx \\ 1, & z_2, & \int z_2 dx \\ 1, & z_3, & \int z_3 dx \end{vmatrix}$$

Z równania, określającego funkcją z , wynika, że ilości z_1, z_2, z_3 są stopnia pierwszego; stąd wnioskujemy, że ilości z_1^2, z_2^2, z_3^2 i całki $\int z_1 dx, \int z_2 dx, \int z_3 dx$ są stopnia drugiego; zauważmy jeszcze, że $\frac{x}{\sqrt{\Delta}}$ jest stopnia $(-2)^{\text{go}}$. A zatem granicami wyższymi stopni omawianych wyrażeń będą odpowiednio liczby

$$3, \quad 2, \quad 1.$$

Przystępujemy do wyznaczenia współczynników wielomianów X_0, X_1, X_2 . Równanie

$$\frac{d}{dx} \left[\int z dx - \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2}{x} \right] = 0,$$

po podstawieniu w niem w miejsce pochodnej $\frac{dz}{dx}$ jej wartości, wyrażonej przez ilość x i z , po wyłączeniu ułamków i potęg ilości z , wyższych nad drugą, da nam związek między ilościami x i z stopnia drugiego względem z . Ze związku tego wypływają bezpośrednio równania następujące:

$$\begin{aligned} x \frac{dX_0}{dx} - X_0 + x^3 \frac{dX_1}{dx} - x^4 &= 0, \\ 2x \frac{dX_1}{dx} - X_1 - x^3 \frac{dX_2}{dx} - x^2 X_2 - 2x^2 &= 0, \\ x \frac{dX_0}{dx} - X_0 + 2x^2 \frac{dX_2}{dx} &= 0, \end{aligned}$$

którym powinny czynić zadość szukane wielomiany. Znając granice wyższe tych wielomianów, możemy metodą współczynników nieoznaczonych znaleźć same wielomiany. Nie od rzeczy będzie uwaga, że, ponieważ stopień wielomianu X_1 nie jest wyższy od 2, to, jak to bezpośrednio wypływa z otrzymanych równań, wielomian X_2 będzie stopnia nie wyższego od 0, wielomian X_0 stopnia nie wyższego od 1.

W ten sposób odszukanie wielomianów X_0, X_1, X_2 nie przedstawia żadnej trudności; otrzymujemy tedy:

$$X_0 = bx, \quad X_1 = \frac{1}{2}x^2, \quad X_2 = -\frac{1}{2},$$

gdzie b jest stałą dowolną.

A więc wartość całki danej może być wyrażoną wzorem:

$$\int z dx = \frac{\frac{1}{2} x^2 z - \frac{1}{2} z^2}{x}.$$

III. Rozpatrzmy całkę:

$$\int \frac{z}{x} dx,$$

gdzie z czyni zadość równaniu nieprzywiedlnemu:

$$z^2 - 2x^3z + x^6 - x^4 - 1 = 0.$$

Dla tego równania jest

$$\Delta = 4x^4 + 4,$$

zatem:

$$D = 1.$$

Ponieważ

$$P = x,$$

więc:

$$Y = 1.$$

Przystępujemy do odszukania wielomianów X_0, X_1 . Szukamy całkowitych części rozwinięć wyrażeń:

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} \int \frac{z_1}{x} dx, & z_1 \\ \int \frac{z_2}{x} dx, & z_2 \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, & \int \frac{z_1}{x} dx \\ 1, & \int \frac{z_2}{x} dx \end{vmatrix}.$$

Z równania, określającego funkcją z , otrzymujemy

$$z_1 = x^3 + x^2 + \frac{1}{2} x^{-2} - \frac{1}{8} x^{-6} + \dots;$$

$$z_2 = x^3 - x^2 - \frac{1}{2} x^{-2} + \frac{1}{8} x^{-6} \dots;$$

stąd:

$$\int \frac{z_1}{x} dx = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + c_1 - \frac{1}{4} x^{-2} + \frac{1}{48} x^{-6} + \dots,$$

$$\int \frac{z_2}{x} dx = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + c_2 + \frac{1}{4} x^{-2} - \frac{1}{48} x^{-6} + \dots.$$

Zauważmy jeszcze, że:

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} = 1: \begin{vmatrix} 1, z_1 \\ 1, z_2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2} \left(x^{-2} - \frac{1}{2} x^{-6} + \dots \right).$$

Na mocy tych rozwinięć będzie:

$$X_0 = \frac{-1}{6}x^3 - \frac{c_1 - c_2}{2}x + \frac{c_1 + c_2}{2}, \quad X_1 = \frac{1}{2}.$$

A więc, jeżeli całka dana jest algebraiczną, to przyjąć można, że

$$\int \frac{z}{x} dx = \frac{-1}{6}x^3 - \frac{c_1 - c_2}{2}x + \frac{c_1 - c_2}{2} + \frac{1}{2}z.$$

Stałych c_1, c_2 nie możemy tu wyznaczyć z warunku, by pochodna tego równania była tożsamością, skąd wnioskujemy, że całka dana nie przedstawia się algebraicznie.

Żegiestów, w lipcu 1888 r.



UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA

515C126
CALCULUS [S.L.]

C001 V008



3 0112 017225142